Przekształcanie wyrażeń z wartością bezwzględną

Przekształcanie wyrażeń z wartością bezwzględną

Źródło: Nick Hillier, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiesz już, że wartość bezwzględną liczby możemy obliczyć korzystając z definicji geometrycznej lub algebraicznej. Znasz już również podstawowe własności modułu i wiesz jak można je wykorzystać przy rozwiązywaniu zadań.

W tym materiale zobaczysz, jak można jeszcze używać własności wartości bezwzględnych. Zapoznasz się z przykładami, dzięki którym poznasz nowe metody ich wykorzystania.

Udoskonalisz również nabyte wcześniej umiejętności w przekształcaniu wyrażeń z wartością bezwzględną liczby.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję wartości bezwzględnej liczby podczas obliczenia wartości wyrażeń.
- Korzystając z definicji modułu, uprościsz wyrażenia z wartością bezwzględną.
- Korzystając z własności modułu, uprościsz wyrażenia z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Przypomnij sobie najpierw definicję algebraiczną wartości bezwzględniej liczby rzeczywistej a.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dla } a \geq 0 \\ -a, & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Przykład 1

Oblicz wartość wyrażenia

$a = |-5| + 2 \cdot \left|-\frac{3}{4}\right| - \left|2\frac{1}{2}\right|$.

Obliczamy najpierw wartości modułów, które pojawiły się w przykładzie.

Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

$|-5| = 5$

$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

$\left|2\frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{2}$

Następnie, pamiętając o kolejności wykonywania działań, obliczamy wartość wyrażenia a.

$a = 5 + 2 \cdot \frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} = 5 + \frac{3}{2} - 2\frac{1}{2} = 5 + 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 4$

Przykład 2

Oblicz wartość wyrażenia

$b = \left|\sqrt{3}\right| - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + (-3) \cdot \left|-\left(-\sqrt{2}\right)\right| - (-2) \cdot \left|-\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right|$.

Obliczamy najpierw wartości modułów, które pojawiły się w przykładzie.

Ponownie korzystamy z definicji wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

$\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

$\left|-\left(-\sqrt{2}\right)\right| = \left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

Ostatnią wartość bezwzględną możemy obliczyć dwoma sposobami.

I sposób

Doprowadzamy wyrażenie pod modułem do najprostszej postaci i określamy jego znak, a następnie opuszczamy symbol wartości bezwzględnej.

$$\left|-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right| = \left|-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right| = \underbrace{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}_{\sqrt{2}-\sqrt{3}<0} = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

II sposób

Określamy znak wyrażenia pod modułem i opuszczamy symbol wartości bezwzględnej.

$$\underbrace{\left|-\overbrace{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}>0}\right|}_{-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)<0} = -\left[-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right] = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Teraz, pamiętając o kolejności wykonywania działań oraz zasadach dodawania i odejmowania pierwiastków, obliczamy wartość wyrażenia b.

$$b = \sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+(-3)\cdot\sqrt{2}+2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) =$$
$$= {\color{blue}\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{\color{green}-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}+2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) =$$
$$= {\color{blue}-\sqrt{3}}-{\color{green}5\sqrt{2}}{\color{blue}+2\sqrt{3}}{\color{green}-2\sqrt{2}} = \sqrt{3}-7\sqrt{2}$$

Pierwiastki, które maja taka samą liczbę podpierwiastkową oznaczono takim samym kolorem.

Własność: Własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej

Przypomnij sobie poznane własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

1. $|a| \geq 0, a \in \mathbb{R}$
2. $|a| = |-a|, a \in \mathbb{R}$

3. $\sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R}$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Przykład 3

Zapisz wyrażenie $|x-1| + |x-2| + 3$ w najprostszej postaci, wiedząc, że $x < 1$.

Określamy znak wyrażeń znajdujących się pod symbolami wartości bezwzględnej aby, korzystając z definicji, opuścić te symbole.

Możemy to zrobić następująco:

1. Korzystamy z założenia:
   $x < 1$.
2. Odejmujemy od obu stron nierówności 1, tak aby po lewej stronie nierówności otrzymać wyrażenie tożsame z tym, które znajduje się w pierwszej wartości bezwzględnej.
   $x < 1 \, |{-1}$
   $x - 1 < 0$
3. Otrzymaliśmy nierówność, dzięki której wiemy, że wyrażenie znajdujące się pod pierwszym modułem jest ujemne, a zatem:
   $|x-1| = -x + 1$.
4. Ponownie korzystamy z założenia
   $x < 1$.
5. Tym razem od obu stron nierówności odejmujemy 2, tak aby po lewej stronie nierówności otrzymać wyrażenie tożsame z tym, które znajduje się w drugiej wartości bezwzględnej.
   $x < 1 \, |{-2}$
   $x - 2 < -1 < 0$
6. A zatem wyrażenie znajdujące się pod drugim modułem jest również ujemne, stąd:
   $|x-2| = -x + 2$.

Zapisujemy wyrażenie $|x-1| + |x-2| + 3$ w najprostszej postaci, dla $x < 1$.

$|x-1| + |x-2| + 3 = (-x+1) + (-x+2) + 3 = -x + 1 - x + 2 + 3 = -2x + 6$

Przykład 4

Zapisz wyrażenie $|x-2| - 2 \cdot |4-x| - 4$ w najprostszej postaci, wiedząc, że $x \in \langle 2,\ 4\rangle$.

Określamy znak wyrażeń znajdujących się pod symbolami wartości bezwzględnej aby, korzystając z definicji, opuścić te symbole.

Możemy to zrobić następująco:

1. Korzystamy z założenia
   $2 \leq x \leq 4.$
2. Otrzymaliśmy nierówność, dzięki której wiemy, że wyrażenie znajdujące się w pierwszym module jest nieujemne, a zatem
   $|x-2| = x-2.$
3. Ponownie korzystamy z założenia.
   $2 \leq x \leq 4$
4. Tym razem, aby otrzymać wyrażenie, które znajduje się w drugiej wartości bezwzględnej, musimy dokonać przekształceń.
   $2 \leq x \leq 4 \mid \cdot(-1)$ – mnożymy strony nierówności przez (-1)
   $-2 \geq -x \geq -4$
   $-4 \leq -x \leq -2 \mid +4$ – do stron nierówności dodajemy 4:
   $0 \leq -x+4 \leq 2.$
5. A zatem wyrażenie znajdujące się w drugim module jest również nieujemne, stąd:
   $|4-x| = 4-x.$

Zapisujemy wyrażenie $|x-2| + 2 \cdot |4-x| - 4$ w najprostszej postaci, dla $x \in \langle 2,\ 4\rangle$.

$$|x-2| + 2 \cdot |4-x| - 4 = (x-2) + 2 \cdot (4-x) - 4 = x-2+8-2x = 6-x$$

Przykład 5

Zapisz wyrażenie $|x-2| - 2x$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, dla $x \in \mathbb{R}$.

W tym przykładzie najpierw zapisujemy wyrażenie $|x-2|$ bez symbolu wartości bezwzględnej zgodnie z definicją modułu.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{dla } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{dla } x-2 < 0 \end{cases},$$

czyli

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{dla } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{dla } x < 2 \end{cases}.$$

Zapisujemy wyrażenie $|x-2| - 2x$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

1. dla $x \geq 2$
   $|x-2| - 2x = x-2-2x = -x-2$
2. dla $x < 2$
   $|x-2| - 2x = 2-x-2x = 2-3x$

Podsumowując:

$$|x-2| - 2x = \begin{cases} -x-2, & \text{dla } x \geq 2 \\ 2-3x, & \text{dla } x < 2 \end{cases}.$$

Przykład 6

Zapisz wyrażenie $|2x-4|-|x-5|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, dla $x \in \mathbb{R}$.

Najpierw zapisujemy wyrażenia bez symbolu wartości bezwzględnej zgodnie z definicją modułu.

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{dla } 2x-4 \geq 0 \\ -(2x-4), & \text{dla } 2x-4 < 0 \end{cases},$$

czyli

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{dla } x \geq 2 \\ 4-2x, & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

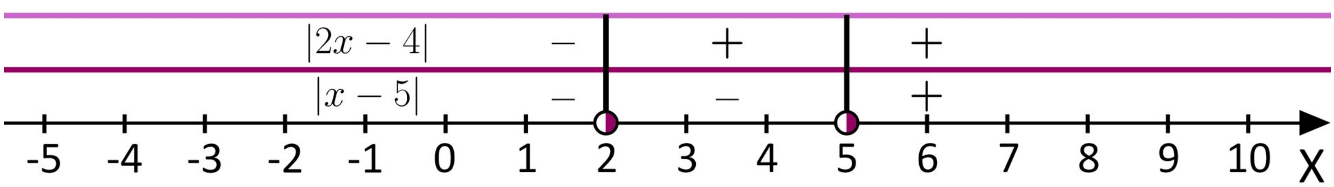
oraz

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{dla } x-5 \geq 0 \\ -(x-5), & \text{dla } x-5 < 0 \end{cases},$$

czyli

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{dla } x \geq 5 \\ 5-x, & \text{dla } x < 5 \end{cases}.$$

Możemy wykonać rysunek pomocniczy, na którym zaznaczymy znak wartości wyrażeń znajdujących się w modułach, w wyznaczonych wyżej przedziałach liczbowych.



A zatem:

1. Dla $x \in (-\infty, \ 2)$ mamy:

$2x-4<0$, więc $|2x-4| = 4-2x$ i $x-5<0$, więc $|x-5| = 5-x$.

2. Dla $x \in \langle 2, \ 5)$ mamy:

$2x-4>0$, więc $|2x-4| = 2x-4$ i $x-5<0$, więc $|x-5| = 5-x$.

3. Dla $x \in \langle 5, \ +\infty)$ mamy:

$2x - 4 > 0$, więc $|2x - 4| = 2x - 4$ i $x - 5 > 0$, więc $|x - 5| = x - 5$.

Zapisujemy wyrażenie $|2x - 4| - |x - 5|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

1. Dla $x \in (-\infty,\ 2)$:

$|2x - 4| - |x - 5| = (4 - 2x) - (5 - x) = 4 - 2x - 5 + x = -x - 1$.

2. Dla $x \in \langle 2,\ 5)$:

$|2x - 4| - |x - 5| = (2x - 4) - (5 - x) = 2x - 4 - 5 + x = 3x - 9$.

3. Dla $x \in \langle 5,\ +\infty)$:

$|2x - 4| - |x - 5| = (2x - 4) - (x - 5) = 2x - 4 - x + 5 = x + 1$.

Podsumowując:

$$|2x - 4| - |x - 5| = \begin{cases} -x - 1, & \text{dla } x \in (-\infty,\ 2) \\ 3x - 9, & \text{dla } x \in \langle 2,\ 5) \\ x + 1, & \text{dla } x \in \langle 5,\ +\infty) \end{cases}.$$

Słownik

moduł liczby rzeczywistej a

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej a

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w materiale. Następnie wykonaj Polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DAdyMmVDX

Film nawiązujący do treści materiału: "Przekształcenia wyrażeń z wartością bezwzględną".

Polecenie 2

Podane wyrażenia przekształć do najprostszej postaci. Uwzględnij warunek dotyczący x.

a) $W(x) = x - 2 \cdot |x| + \sqrt{x^2}$, dla $x \geq 0$

b) $W(x) = \frac{x+5}{|x+5|}$, dla $x \neq -5$

c) $W(x) = \sqrt{(3-x)^2} - \sqrt{16 - 8x + x^2}$, dla $x \in (3,\ 4)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Uporządkuj wyrażenia w odpowiedniej kolejności.

$$2\cdot|x-5|+|3-x| = \begin{cases} \text{.............................., dla } x \in (-\infty, 3\rangle \\ \text{.............................., dla } x \in (3, 5) \\ \text{.............................., dla } x \in \langle 5, +\infty) \end{cases}$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie wyrażeń z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x+4|=5$, $|x-2|<3$, $|x+3|\geq 4$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej a
- korzystając z własności modułu, upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych
- JIGSAW
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą JIGSAW.

Faza realizacyjna:

1. Pracując w parach, uczniowie analizują się przykłady zawarte w części „Przeczytaj" oraz w medium bazowym. Porównują swoje notatki, dyskutują nad wątpliwościami.
2. Konsultując z nauczycielem, uczniowie wykonują polecenie umieszczone pod medium bazowym.
3. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3 osobowe. Każdy uczestnik grupy otrzymuje inne zadania do rozwiązania (wybrane z ćwiczeń 1–8).
4. Po rozwiązaniu zadania uczniowie spotykają się w grupach, które rozwiązywały to samo zadanie. Omawiają rozwiązania, wyjaśniają wątpliwości.
5. Następnie wracają do początkowych grup i przedstawiają rozwiązania innym członkom grupy.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń i wyjaśnia wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują pozostałe ćwiczenia.

Materiały pomocnicze:

Wartość bezwzględna - definicja
Własności wartości bezwzględnej

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz medium bazowym jako pomoc przy pracy w grupach na lekcji oraz do utrwalenia informacji w domu.