



Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory

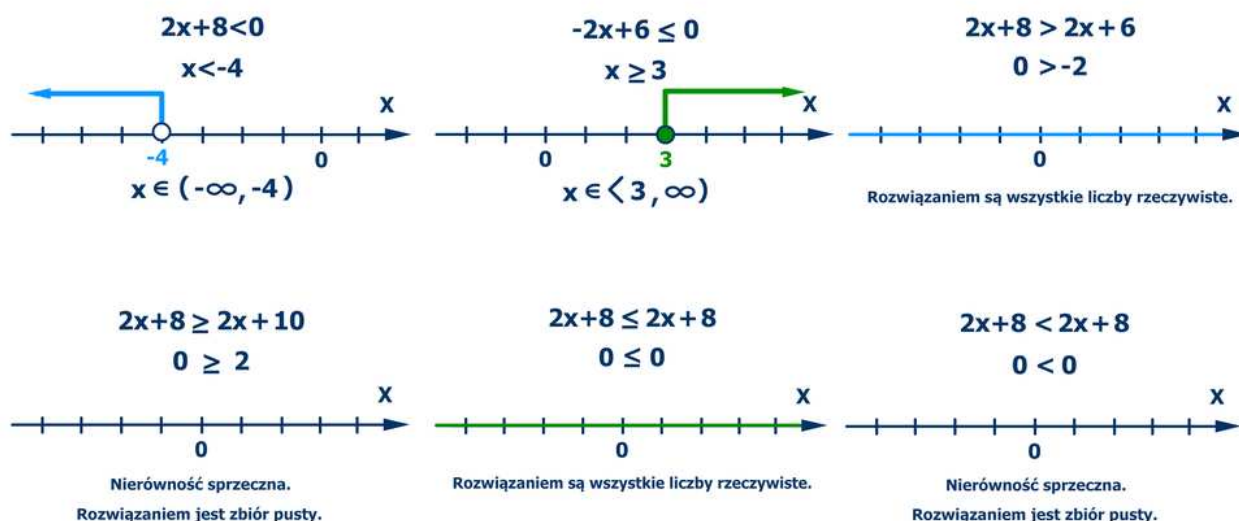
Rozwiązywanie nierówności. Interpretacja rozwiązania na osi liczbowej. Przedziały liczbowe ograniczone. Część wspólna zbiorów. Animacje: rozwiązywanie nierówności, przykłady przedziałów na osi liczbowej. Ćwiczenie - zaznaczanie przedziałów liczb na osi liczbowej.

Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory

Materiał ten poświęcony jest przedziałom liczbowym. Analizując zawarte tu przykłady, poznasz rodzaje przedziałów liczbowych i ich interpretację geometryczną.

Już wiesz

Rozwiązywanie nierówności liniowych



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RXKaKI6fRWOYI>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja ilustruje na osi liczbowej rozwiązywanie nierówności liniowych.

Rozwiązania powyższych nierówności doprowadziły nas do zdefiniowania przedziałów nieograniczonych.

Definicja: Przedziały nieograniczone

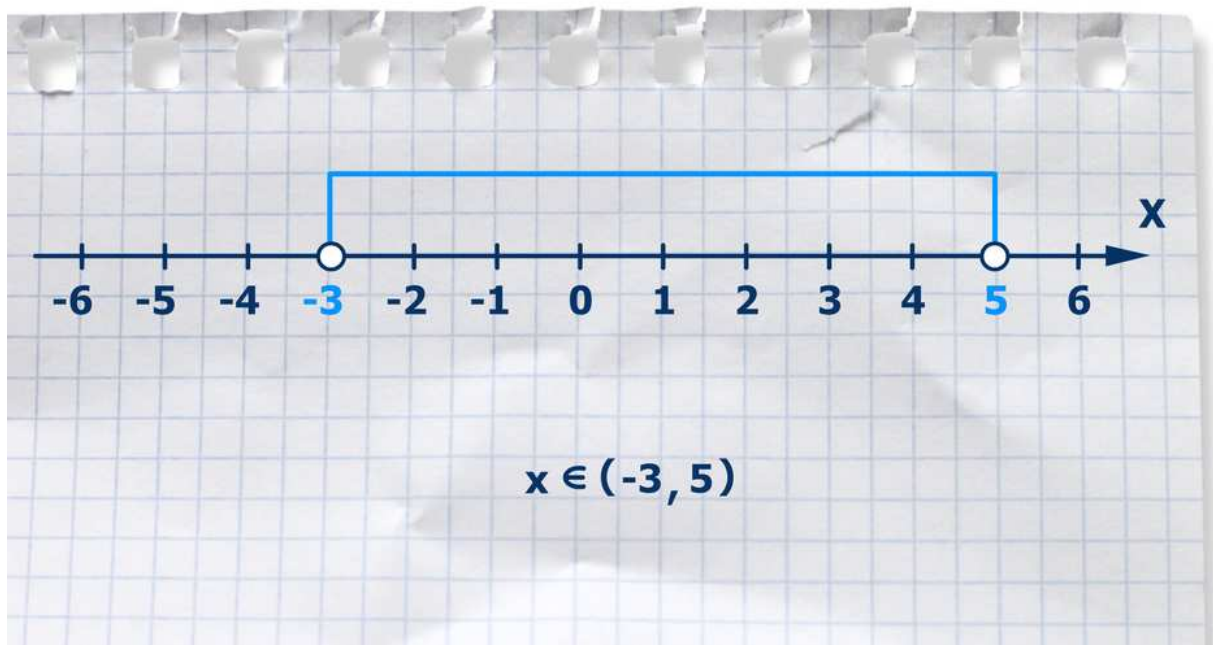
Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

- Zbiór liczb spełniających nierówność $x > a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie otwartym. Taki przedział oznaczamy (a, ∞) .
- Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie domkniętym. Taki przedział oznaczamy $[a, \infty)$.
- Zbiór liczb x spełniających nierówność $x < a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie otwartym. Taki przedział oznaczamy $(-\infty, a)$.
- Zbiór liczb x spełniających nierówność $x \leq a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie domkniętym. Taki przedział oznaczamy $(-\infty, a]$.

Przyjrzyjmy się teraz przedziałom ograniczonym.

Przykład 1

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które jednocześnie spełniają nierówności $x > -3$ i $x < 5$.



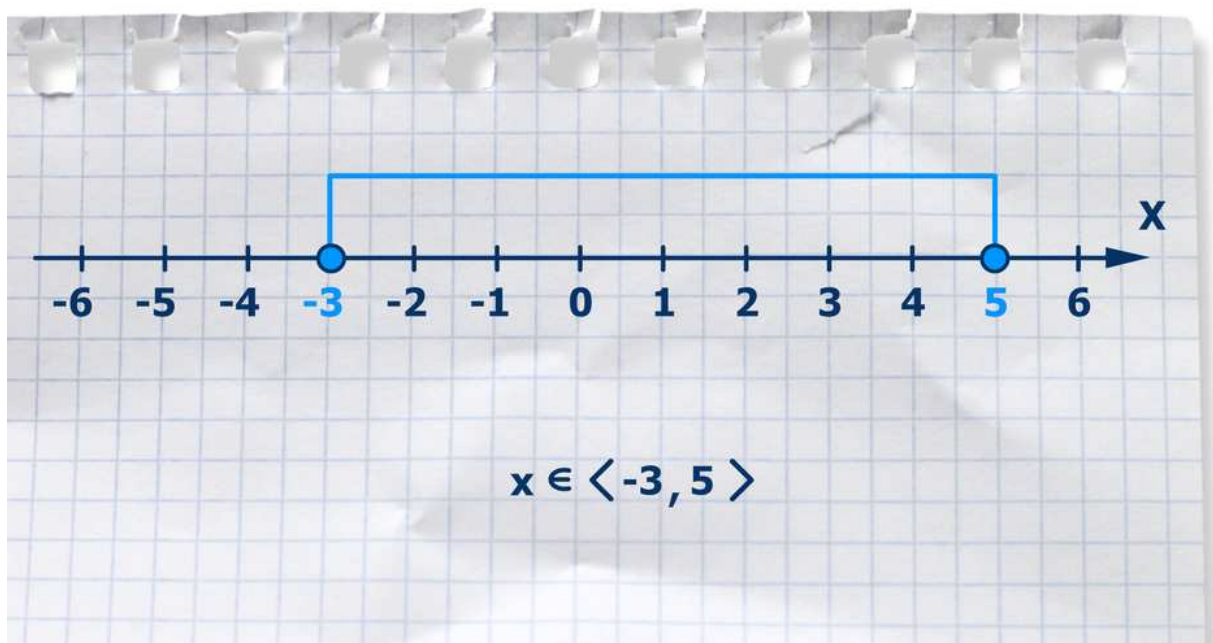
Film dostępny pod adresem </preview/resource/RCPFpxmDMMClQ>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punktach o współrzędnych -3 i 5 niezamalowane kółka. Zaznaczone liczby większe od -3 i mniejsze od 5. Zapis: x należy $(-3, 5)$.

Taki przedział nazywamy otwartym. Należą do niego wszystkie liczby większe od (-3) i jednocześnie mniejsze od 5. Przedział otwarty oznaczamy $(-3, 5)$. Nierówności $x > -3$ i $x < 5$ możemy zastąpić nierównością podwójną $-3 < x < 5$.

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają warunek $-3 \leq x \leq 5$.



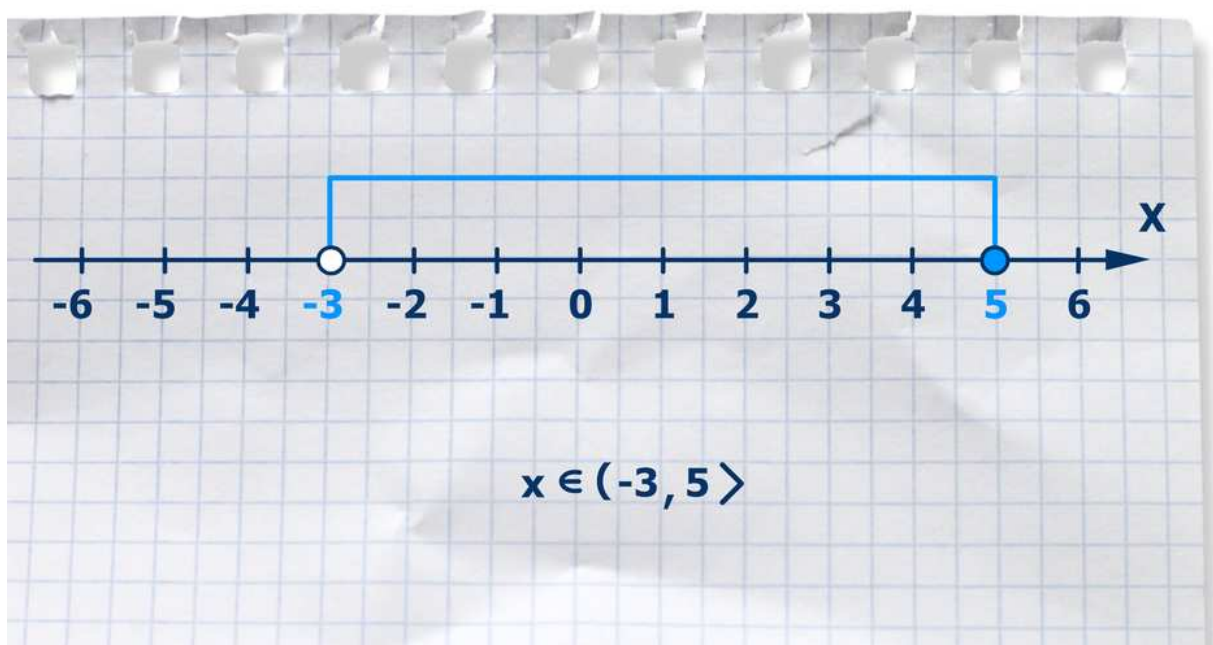
Film dostępny pod adresem </preview/resource/R9QghuCT8sgQn>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punktach o współrzędnych -3 i 5 zamalowane kółka. Zaznaczone liczby większe lub równe -3 i mniejsze lub równe 5. Zapis: x należy $[-3, 5]$.

Taki przedział nazywamy domkniętym. Należą do niego wszystkie liczby większe lub równe (-3) i jednocześnie mniejsze lub równe 5. Przedział domknięty oznaczamy $[-3, 5]$.

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają warunek $-3 < x \leq 5$.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1SrpBXL9zYDb>

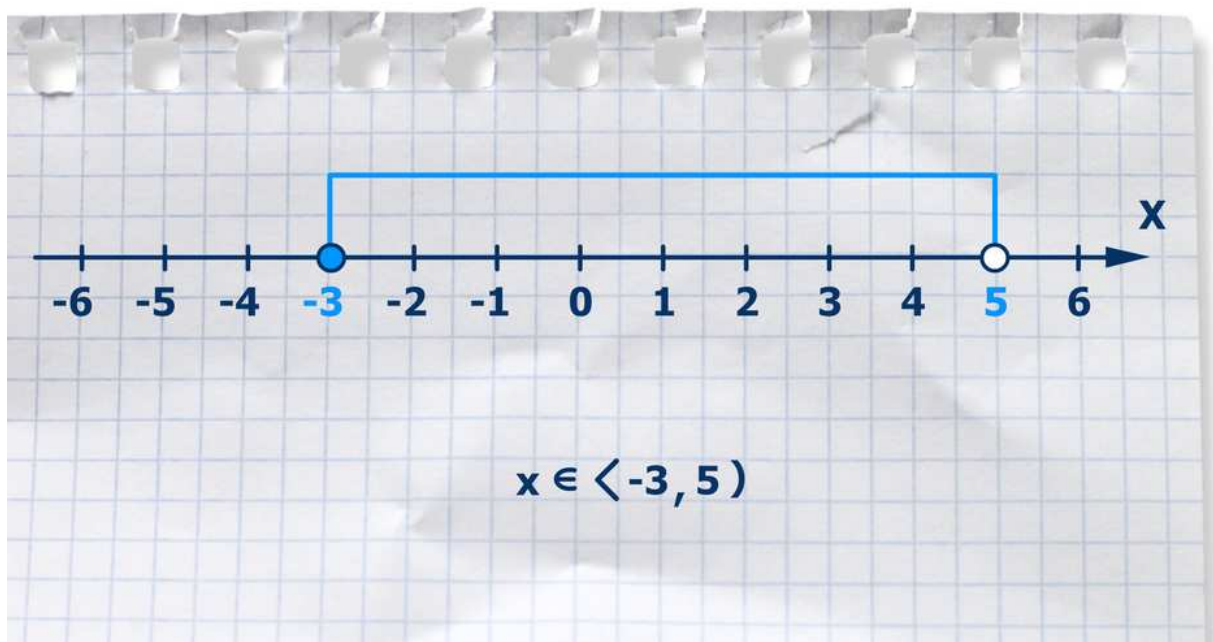
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko, w punkcie 5 zamalowane kółko.

Zaznaczone liczby większe od -3 i mniejsze lub równe 5. Zapis: x należy $(-3, 5]$.

Taki przedział jest otwarty z lewej strony i domknięty z prawej. Należą do niego wszystkie liczby większe od (-3) i jednocześnie mniejsze lub równe 5. Musimy pamiętać, że liczba (-3) nie należy do tego przedziału, a liczba 5 do niego należy. Przedział ten oznaczamy $(-3, 5]$.

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają warunek $-3 \leq x < 5$.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1WvJGs3F5NeG>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 zamalowane kółko, w punkcie 5 niezamalowane kółko.

Zaznaczone liczby większe lub równe -3 i mniejsze od 5. Zapis: x należy $[-3, 5)$.

Taki przedział jest domknięty z lewej strony i otwarty z prawej. Należą do niego wszystkie liczby większe lub równe (-3) i jednocześnie mniejsze od 5. Musimy pamiętać, że liczba (-3) należy do tego przedziału, a liczba 5 do niego nie należy. Przedział ten oznaczamy $[-3, 5)$.

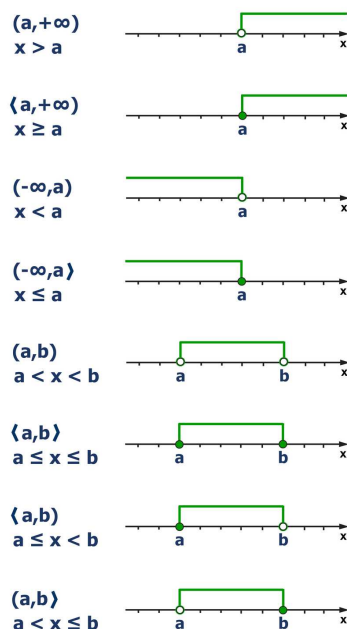
Definicja: Przedziały ograniczone

Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a < b$.

- Przedziałem obustronnie otwartym nazywamy zbiór liczb x spełniających warunek $a < x < b$. Przedział ten oznaczamy (a, b) .
- Przedziałem obustronnie domkniętym nazywamy zbiór liczb x spełniających warunek $a \leq x \leq b$. Przedział ten oznaczamy $\langle a, b \rangle$.

Przykład 2

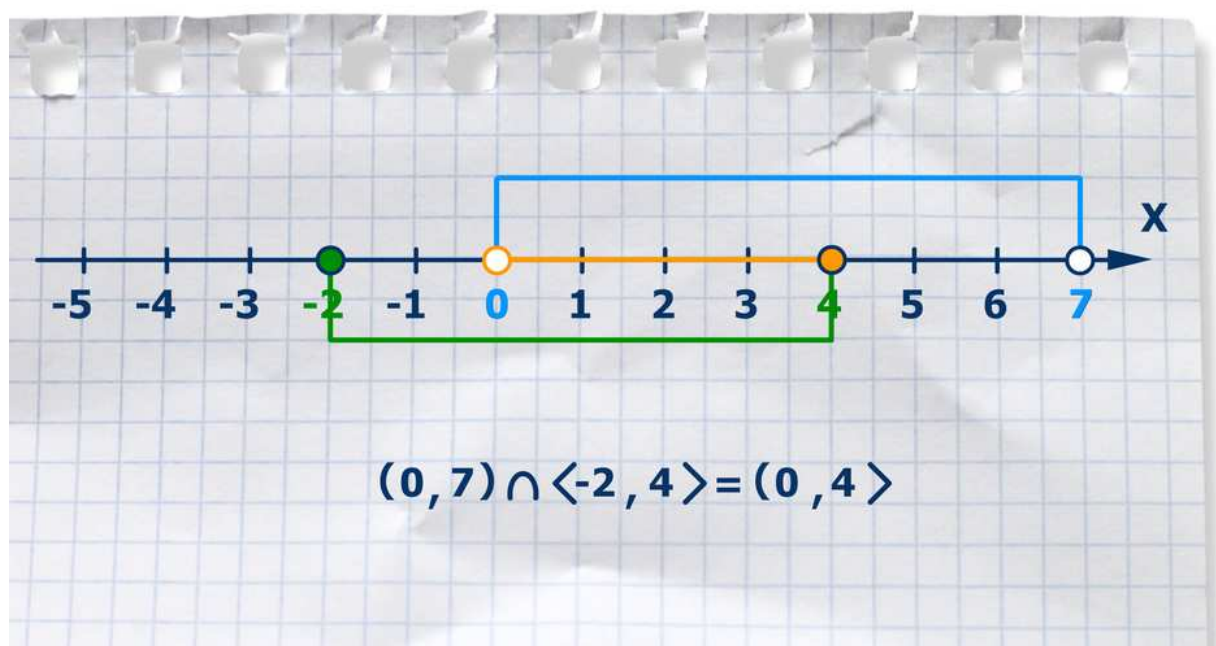
Usystematyzujemy wiadomości dotyczące przedziałów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

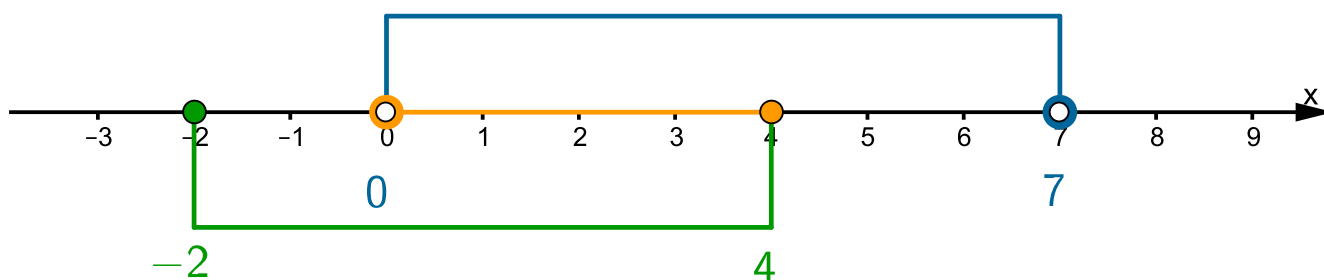
Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby należące jednocześnie do przedziału $(0, 7)$ i do przedziału $\langle -2, 4 \rangle$.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RBbFYs4cJny9a>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -5 do 7. W punktach o współrzędnych -2 i 7 zamalowane kółka, w punktach 0 i 4 niezamalowane kółka. Zaznaczone przedziały $(0, 7)$ i $\langle -2, 4 \rangle$ oraz ich część wspólna. Zapis: $(0, 7)$ iloczyn zbioru $\langle -2, 4 \rangle = (0, 4)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

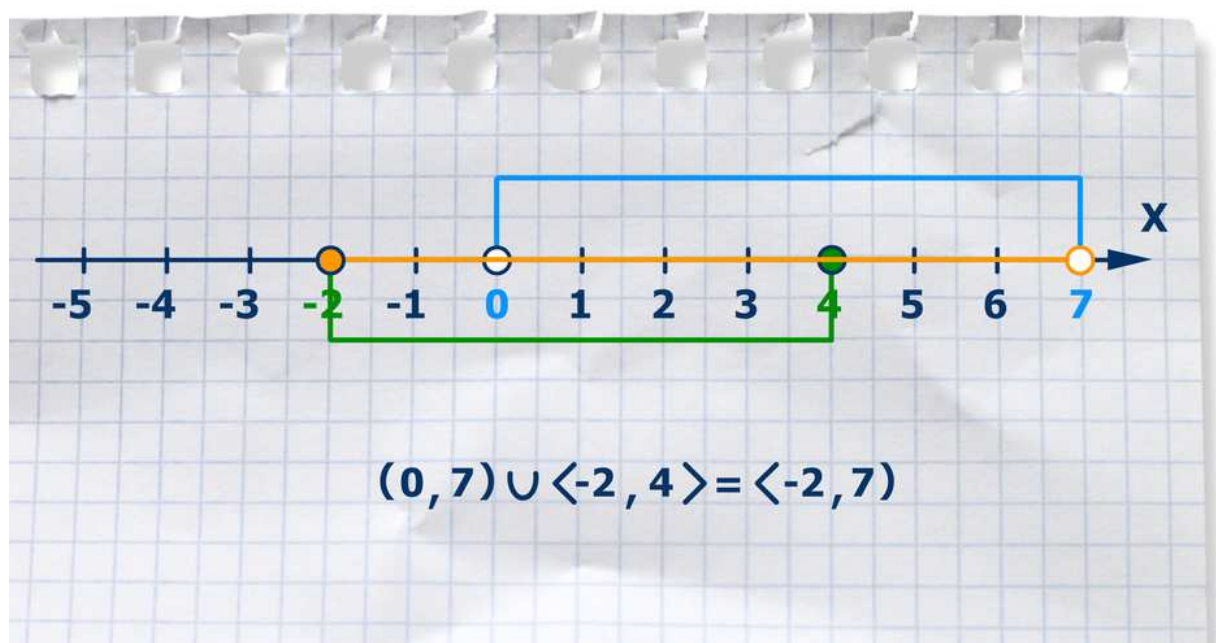
Przedział $(0, 4)$ zawiera liczby, które należą do obu przedziałów jednocześnie. Przedział $(0, 4)$ jest częścią wspólną (iloczynem) przedziałów $(0, 7)$ i $\langle -2, 4 \rangle$.

Symbolicznie zapisujemy

$$(0, 7) \cap \langle -2, 4 \rangle = (0, 4).$$

Przykład 4

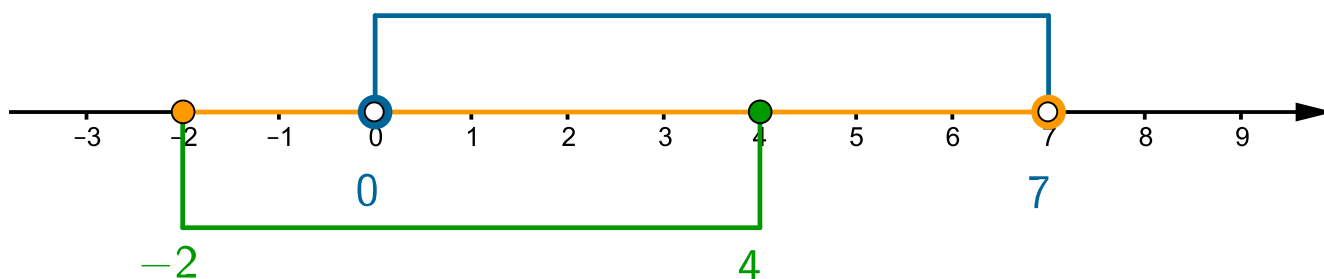
Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby należące do przedziału $(0, 7)$ lub do przedziału $\langle -2, 4 \rangle$.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1aXbXRlsCFPY>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -5 do 7. W punktach o współrzędnych -2 i 4 zamalowane kółka, w punktach 0 i 7 niezamalowane kółka. Zaznaczone przedziały $(0, 7)$ i $\langle -2, 4 \rangle$ oraz ich suma. Zapis: $(0, 7)$ suma zbioru $\langle -2, 4 \rangle = \langle -2, 7 \rangle$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przedział $\langle -2, 7 \rangle$ zawiera liczby, które należą do jednego z dwóch przedziałów (lub do obu jednocześnie). Przedział $\langle -2, 7 \rangle$ jest sumą przedziałów $\langle 0, 7 \rangle$ i $\langle -2, 4 \rangle$. Symbolicznie zapisujemy

$$(0, 7) \cup \langle -2, 4 \rangle = \langle -2, 7 \rangle.$$

Definicja: Część wspólna przedziałów. Suma przedziałów

- Częścią wspólną (iloczynem) przedziałów A i B nazywamy zbiór złożony z liczb, które należą jednocześnie do obu przedziałów. Iloczyn przedziałów oznaczamy $A \cap B$.
- Sumą przedziałów A i B nazywamy przedział zawierający wszystkie liczby z przedziałów A i B . Sumę przedziałów oznaczamy $A \cup B$.

Ćwiczenie 1



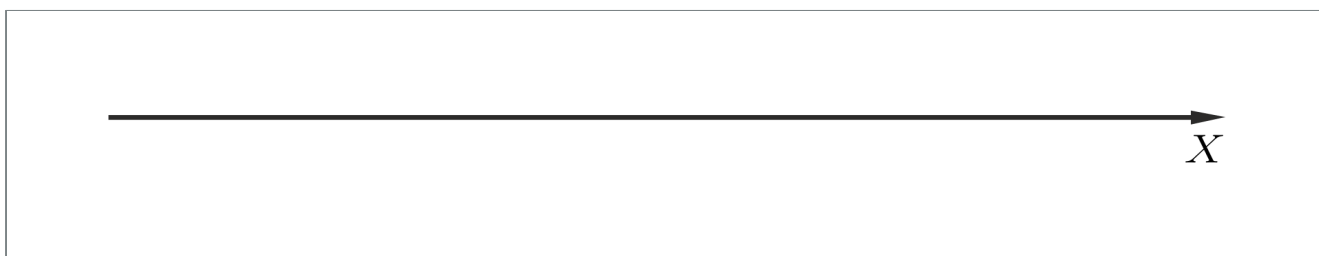
Zaznacz na osi liczbowej liczby, które

1. należą do sumy przedziałów $(-3, 4)$ oraz $(0, \infty)$,



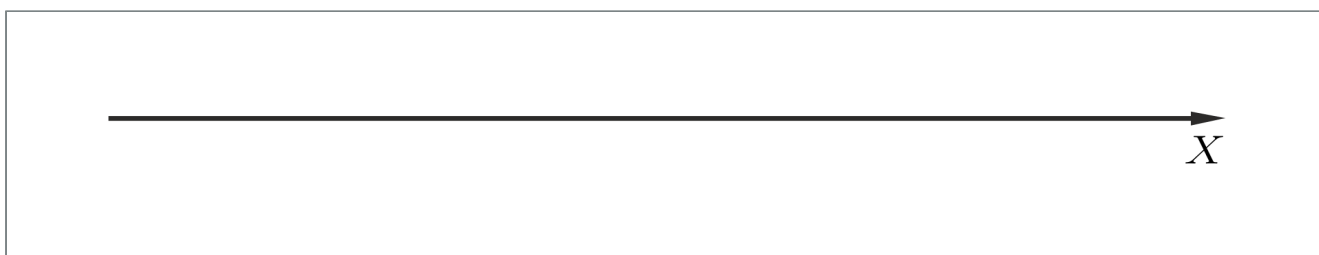
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. należą do sumy przedziałów $(-5, -2)$ oraz $(-2, 5)$,



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. należą do części wspólnej przedziałów $(-\infty, 5)$ i $(-2, 4)$,



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4. należą do części wspólnej przedziałów $(4, 6)$ i $(6, 10)$.

