

## Porządkowanie wielomianów

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Porządkowanie wielomianów

Źródło: caveman, dostępny w internecie: [wallpapercave.com/](http://wallpapercave.com/), domena publiczna.

Znane są Ci już pojęcia wielomianu jednej i wielu zmiennych. Wiesz, co to jest stopień wielomianu.

Wielomiany można zapisać w różnej formie. Mogą być zapisane np. w postaci iloczynu, mogą być sumami jednomianów. W różnych sytuacjach różne sposoby zapisu mogą być wygodniejsze. Gdy za pomocą wielomianów zapisujemy jakieś wzory matematyczne czy fizyczne, pożądanym może być sposób zapisu ułatwiający zapamiętanie wzoru.

W tym materiale zajmiemy się głównie porządkowaniem wielomianów zapisanych w postaci sumy jednomianów.

### Twoje cele

- Poznasz przykłady porządkowania zarówno wielomianów z jedną zmienną, jak i wielomianów z kilkoma zmiennymi.
- Wykorzystasz sposoby porządkowania wielomianów ze względu na stopień jednomianów składowych.
- Udoskonalisz umiejętności nabyte przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.

# Przeczytaj

---

W kilku przykładach pokażemy, jak można porządkować [wielomiany](#) kilku zmiennych  $W(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

Będziemy przestrzegać następujących zasad:

- Na początek zredukujemy wyrazy podobne.
- Dla każdego jednomianu ustalimy jakiego jest stopnia, wyrazy większego stopnia umieścimy wcześniej, niż wyrazy mniejszego stopnia.
- Jeśli dwa wyrazy będą tego samego stopnia, to wcześniej zapiszemy ten, w którym wykładnik przy pierwszej niewiadomej (czyli w naszym przypadku  $x_1$ ) będzie większy.
- Jeśli wykładniki przy pierwszej niewiadomej będą takie same, analogicznie porównamy wykładniki przy drugiej niewiadomej itd.

## Przykład 1

Uporządkuj wielomian dwóch zmiennych

$$W(x, y) = (xy^2)^2 x + (xy^2)^2 y + xy^2 y + x^2 y x^4 + (xy)^2 - 6xyy x + (xy)^3 y - 6y^3 (xy)^2 + 5xyx^5 - 12xy \cdot y^2.$$

Uprośćmy wyrazy wielomianu:

Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DT6tpnj2B>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący porządkowania wielomianów.

---

### Przykład 2

Uporządkuj wielomian trzech zmiennych

$$P(a, b, c) = (a + b^2)^3 + (b + c^2)^3 + (c + a^2)^3.$$

- Przekształćmy najpierw wyrażenie  $(a + b^2)^3$  używając wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy:  $(a + b^2)^3 = a^3 + 3a^2b^2 + 3ab^4 + b^6$ .
- Uzyskaliśmy sumę czterech jednomianów kolejno trzeciego, czwartego, piątego i szóstego stopnia.
- Zauważmy, że sześcian  $(b + c^2)^3$  możemy rozpisać analogicznie zastępując w poprzednim przykładzie  $a$  przez  $b$  oraz  $b$  przez  $c$ .
- Analogicznie możemy postąpić z sześcianem  $(c + a^2)^3$ .
- Podsumowując:  
$$P(a, b, c) = a^6 + b^6 + c^6 + 3a^4c + 3ab^4 + 3bc^4 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3b^2c^2 + a^3 + b^3 + c^3$$

## Porządkowanie wielomianu kilku zmiennych z uwzględnieniem cykliczności

W przypadku [wielomianu](#) z ostatniego przykładu sensowniejszy może być np. zapis w kolejności

$$P(a, b, c) = a^6 + b^6 + c^6 + 3ab^4 + 3bc^4 + 3ca^4 + 3a^2b^2 + 3b^2c^2 + 3c^2a^2 + a^3 + b^3 + c^3$$

który uwzględnia pewien rodzaj cykliczności wyrazów wielomianu.

### Ciekawostka

Wielomian  $W(x, y, z)$  nazywa się **wielomianem symetrycznym**, gdy po dowolnym przestawieniu kolejności zmiennych będzie go można uporządkować do tej samej postaci. Analogicznie można to pojęcie określić dla innej liczby zmiennych.

### Przykład 3

Dany jest wielomian  $W(a, b) = a^3b + ab^3$ . Zauważmy, że  $W(b, a) = b^3a + ba^3$ , co można uporządkować do tej samej postaci jak wielomian  $W(a, b)$ .

Wielomian  $W(a, b)$  jest zatem wielomianem symetrycznym.

### Przykład 4

Czy wielomian  $W(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a$  jest wielomianem symetrycznym?

- Łatwo można zauważyć, że  $W(a, b, c) = W(b, c, a) = W(c, a, b)$ .
- Sprawdźmy  $W(a, c, b) = a^2c + c^2b + b^2a$ .
- Zauważmy, że wielomianów  $W(a, b, c)$  i  $W(a, c, b)$  nie da się uporządkować do tej samej postaci (np. składnik  $a^2c$  występuje tylko w drugim z nich).
- Zatem podany wielomian nie jest wielomianem symetrycznym.

### Przykład 5

## Porządkowanie wielomianu jednej zmiennej

W przypadku wielomianu jednej zmiennej porządkujemy go zwykle w kolejności malejących stopni jednomianów - czyli doprowadzamy do znanej z definicji wielomianu postaci  $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ .

### Przykład 6

Uporządkujmy wielomian  $W(x) = -3x + 11x^7 - 5x^2 - 7x^3 - 2x^7 - 9$

### Przykład 7

W podobny sposób uporządkujmy wielomian

$$W(x) = 7x\sqrt{3} - 12x^3 + x\sqrt{5} + 4x^2\sqrt{2} - 9x - x^2\sqrt{11} + 4 - 8\sqrt{2}x^3.$$

## Słownik

## wielomian

wyrażenie, które jest sumą jednomianów (w szczególności może to być jeden jednomian); wielomian można zapisać w postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

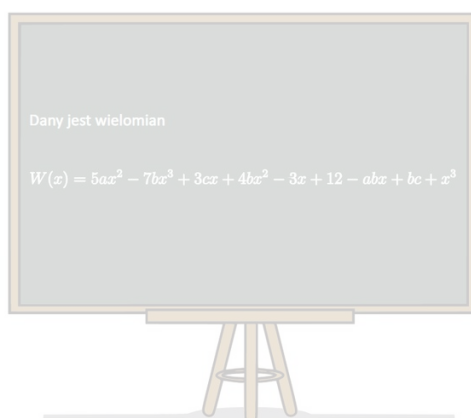
liczby  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$  to **współczynniki** wielomianu ( $a_n \neq 0$ )

# Prezentacja multimedialna

---

## Polecenie 1

Dany jest wielomian jednej zmiennej  $x$ , w którego zapisie występują również parametry. Przeanalizuj poniższą prezentację pokazującą, jak uporządkować taki wielomian.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1E90Mmvc>

## Polecenie 2

Postępując analogicznie jak w prezentacji, uporządkuj wielomian

$W(x) = 3\sqrt{7}x^6 - 2x^2 + 5\sqrt{2}x^3 + 4x^6 - 11x + 7x^2 - \sqrt[3]{2}x + \frac{2}{3} + \frac{x^3}{2} - 5\sqrt{3}x^5 + 3\sqrt{5}x^3$ , zapisując go w kolejności malejących potęg przy niewiadomej.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Michał Niedźwiedź

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Porządkowanie wielomianów

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony.

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- porządkuje wielomiany z jedną zmienną oraz wielomiany z kilkoma zmiennymi,
- wykorzystuje umiejętności nabyte przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych,
- tworzy algorytmy porządkowania wielomianów ze względu na stopień jednomianów składowych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Przed lekcją:**

Uczniowie przed lekcją analizują samodzielnie prezentację multimedialną.

### **Faza wstępna:**

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Porządkowanie wielomianów” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie podzieleni na 4-5 osobowe grupy zapoznają się z Przykładami 1 i 2 w sekcji „Przeczytaj”. Każda z grup zapisuje trzy pytania do materiału. Następnie na forum klasy przedstawiciele grup przedstawiają pytania. Uczniowie porównują je z pytaniami, które postawili na początku lekcji. Udzielają na nie odpowiedzi, nauczyciel ewentualnie uzupełnia je.
2. Nauczyciel wyjaśnia uczniom pojęcie wielomianu symetrycznego i przedstawia Przykłady 3, 4 i 5.
3. Uczniowie, pracując nadal w tych samych grupach, analizują Przykłady 6 i 7. W razie problemów, mogą prosić o pomoc kolegów z innej grupy.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Porządkowanie wielomianów” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

**Praca domowa:**

- Uczniowie wykonują Polecenie 2 pod prezentacją multimedialną. Następnie układają dwa analogiczne przykłady i samodzielnie je rozwiązują.

**Materiały pomocnicze:**

- Pierwiastki równań
- Jednomiany i sumy algebraiczne
- Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

**Materiały pomocnicze:**

- Prezentacja multimedialna może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy, przed sprawdzianem z działu Wielomiany.