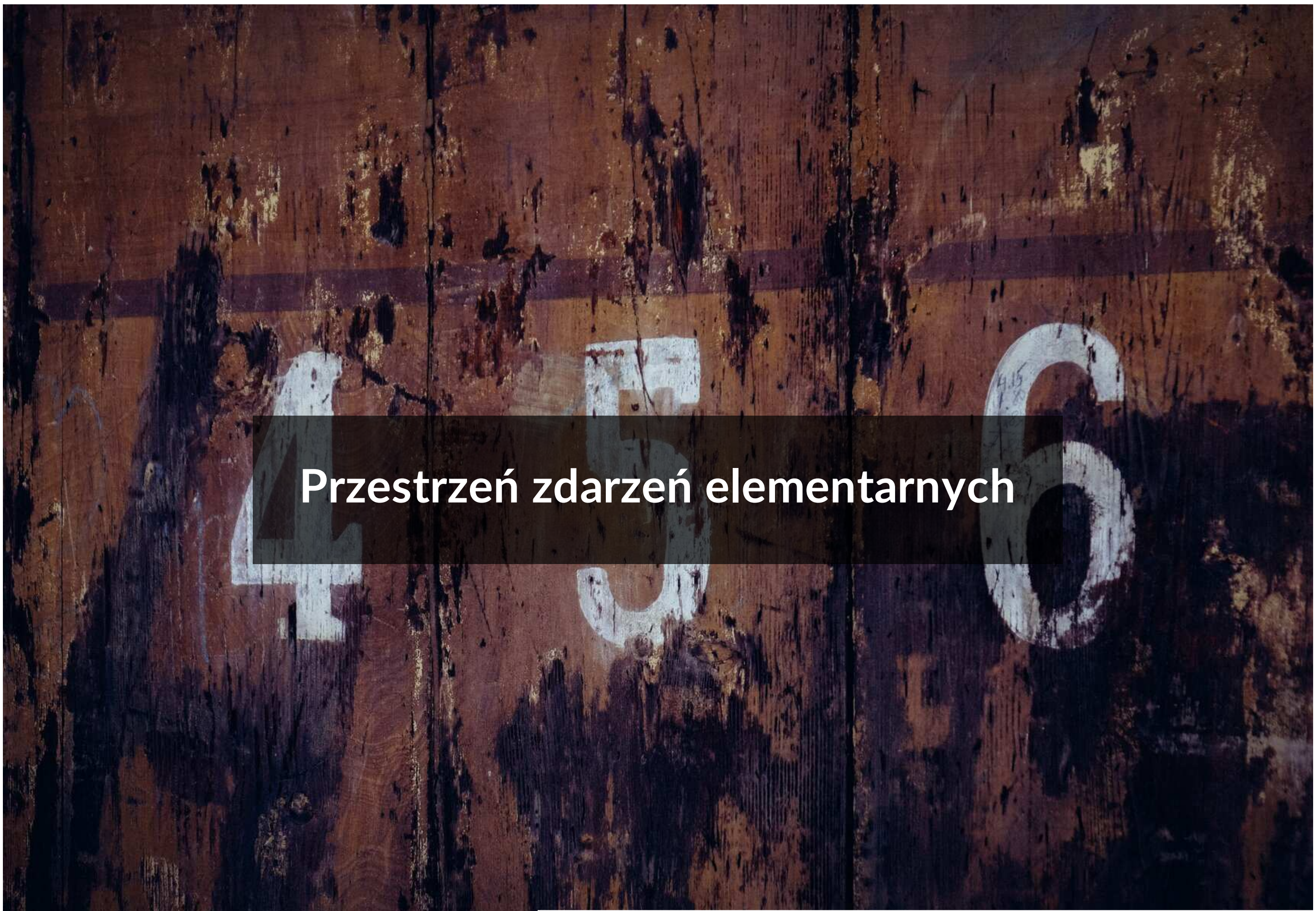
Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Przestrzeń zdarzeń elementarnych



Źródło: Francesco Ungaro, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Źródło: Minamdobrev, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 4.0.

Wyobraź sobie, że jesteś kompozytorem i chcesz skomponować oryginalną melodię, która stanie się światowym przebojem. Czy w ogóle jest to możliwe? Być może wszystkie „lepsze” melodie już zostały stworzone!

A może opłacałoby się napisać program komputerowy, który odrzuci znane już melodie i spośród pozostałych wybierze te najciekawsze?

Ponieważ nie masz pomysłu, koncentrujesz się tylko nad refrenem, który ma składać się z 10 nut i próbujesz ułożyć je na różne sposoby.

Jak myślisz – ile co najmniej masz możliwości, jeśli uwzględnisz najpotrzebniejsze elementy – np. tonację, rytm?

Ktoś bardzo mądry obliczył (korzystając z narzędzi kombinatorycznych), że możesz w ten sposób stworzyć ponad $82 \cdot 10^{18}$ prostych melodii. To całkiem sporo.

Dlaczego warto o tym wiedzieć? Bo w tym materiale będziemy między innymi wypisywać elementy danej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Więc gdyby przyszło Ci do głowy jako przykład podać przestrzeń, której elementami są wszystkie możliwe melodie składające się z 10 nut, to wypisanie ich mogłoby zająć Ci całe lata...

Twoje cele

- Określisz przestrzeń zdarzeń elementarnych.
- Obliczysz moc zbioru zdarzeń elementarnych.
- Wykorzystasz aparat kombinatoryczny do zliczania elementów zbioru zdarzeń elementarnych.

Przeczytaj

Doświadczeniem losowym nazywamy taki eksperyment, który można powtarzać wielokrotnie w jednakowych (lub bardzo zbliżonych warunkach) i którego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć.

Każdy wynik doświadczenia losowego to **zdarzenie elementarne**. Jeśli w doświadczeniu losowym podamy wszystkie możliwe zdarzenia, to mówimy, że określiliśmy przestrzeń zdarzeń elementarnych. Przestrzeń zdarzeń elementarnych może być zbiorem skończonym bądź nieskończonym.

W aksjomatycznym ujęciu rachunku prawdopodobieństwa zdarzenie elementarne i przestrzeń zdarzeń elementarnych to pojęcia pierwotne. Aby jednak przybliżyć to ostatnie pojęcie, często przyjmuje się opisową definicję przestrzeni zdarzeń elementarnych.

> **Definicja: Przestrzeń zdarzeń elementarnych**
>
> Przestrzenią zdarzeń elementarnych lub zbiorem zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego.

Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy Ω.

W zastosowaniach praktycznych najczęściej interesuje nas nie pojedyncze zdarzenie elementarne rozpatrywanego doświadczenia losowego, ale zbiory tych zdarzeń, czyli podzbiory zbioru Ω. Każdy taki podzbiór (gdy przestrzeń Ω jest skończona), nazywamy **zdarzeniem losowym** (związanym z rozpatrywanym doświadczeniem losowym).

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że zbiór Ω jest zbiorem skończonym, a liczbę jego elementów oznaczymy $|\Omega|$.

> **Przykład 1**
>
> Rzucamy jednocześnie dwoma monetami. Za zdarzenia elementarne przyjmujemy uporządkowane pary wyników: reszka lub orzeł na pierwszej monecie, reszka lub orzeł na drugiej monecie. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne.
>
> $\Omega = \{(R,\ R),\ (R,\ O),\ (O,\ R),\ (O,\ O)\}$
>
> Są cztery zdarzenia elementarne, zatem
>
> $|\Omega| = 4.$

> **Przykład 2**

Rzucamy jednocześnie czworościenną kostką do gry, na ściankach której zapisane są liczby: 1, 1, 3, 5 oraz monetą.

Za zdarzenia elementarne przyjmujemy uporządkowane pary: 1, 3 lub 5 na kostce do gry, reszka lub orzeł na monecie.

$\Omega = \{(1,\ R),\ (3,\ R),\ (5,\ R),\ (1,\ O),\ (3,\ O),\ (5,\ O)\}$

Jest sześć zdarzeń elementarnych.

$|\Omega| = 6.$

Przykład 3

Trzy osoby rzucają pierwszy raz w życiu piłką do kosza.

Rzut celny oznaczmy jako 1, niecelny jako 0. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy uporządkowane trójki wyników rzutów danych osób.

Przy czym np. zapis $(1,\ 1,\ 0)$ oznacza, że dwie pierwsze osoby trafiły piłką do kosza, a trzecia nie trafiła.

$\Omega = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,0,0)\}$

Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z ośmiu elementów.

$|\Omega| = 8$

W przypadku, gdy liczba zdarzeń elementarnych jest duża, nie wypisujemy ich bezpośrednio, ale staramy się znaleźć ich liczbę. Możemy wtedy posłużyć się modelem graficznym lub wzorami kombinatorycznymi.

Przykład 4

Rzucamy dwa razy kostką do gry.

Za zdarzenia elementarne przyjmujemy uporządkowane pary wyników rzutów:
w pierwszym rzucie wypadła 1, 2, 3, 4, 5 lub 6, w drugim rzucie wypadła 1, 2, 3, 4, 5 lub 6.

Zbiór Ω określimy najpierw za pomocą tabelki.

W wierszach zapisujemy wyniki pierwszego rzutu, w kolumnach – drugiego rzutu.

Wyniki po dwóch rzutach kostką

	1	2	3	4	5	6
1	$1,1$	$2,1$	$3,1$	$4,1$	$5,1$	$6,1$
2	$1,2$	$2,2$	$3,2$	$4,2$	$5,2$	$6,2$

Wyniki po dwóch rzutach kostką						
3	$1, 3$	$2, 3$	$3, 3$	$4, 3$	$5, 3$	$6, 3$
4	$1, 4$	$2, 4$	$3, 4$	$4, 4$	$5, 4$	$6, 4$
5	$1, 5$	$2, 5$	$3, 5$	$4, 5$	$5, 5$	$6, 5$
6	$1, 6$	$2, 6$	$3, 6$	$4, 6$	$5, 6$	$6, 6$

Na podstawie tabelki określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 36$.

Do określenia liczby zdarzeń elementarnych możemy wykorzystać też informację, że pierwszy element pary wyników wybieramy spośród liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6, więc można go wybrać na 6 sposobów.

Drugi element pary można wybrać również na 6 sposobów.

Zatem liczba wszystkich możliwych par, które możemy uzyskać jest równa $6 \cdot 6$.

$|\Omega| = W_6^2 = 6^2 = 36$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z 36 elementów.

Czasem do określenia liczby elementów przestrzeni zdarzeń elementarnych używamy określenia: **moc zbioru**.

Czyli w tym przypadku moc zbioru zdarzeń elementarnych jest równa 36.

Przykład 5

Doświadczenie losowe polega na wyborze spośród 12 dziewcząt i 8 chłopców delegacji pięcioosobowej. Obliczymy, z ilu elementów składa się zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

Mamy obliczyć, na ile sposobów można wybrać delegację spośród 12 dziewcząt i 8 chłopców, czyli spośród 20 osób.

Zauważmy najpierw, że przy wyborze delegacji kolejność wyboru nie jest istotna. Możemy więc skorzystać z kombinacji.

Delegację można więc wybrać na $\binom{20}{5}$ sposobów.

$|\Omega| = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$

Odpowiedź:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z 15504 elementów.

Przykład 6

W pudełku leży 6 karteczek, na których zapisane są koleje cyfry: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Wyjmujemy kolejno z pudełka (bez zwracania) trzy karteczki i układamy je w kolejności losowania, tworząc liczby trzycyfrowe. Za zdarzenia elementarne przyjmujemy utworzone w ten sposób liczby. Obliczymy, ile jest zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Dokonujemy wyboru kolejno – najpierw pierwszej cyfry, następnie drugiej i wreszcie trzeciej. Tworzymy więc 3 – wyrazowe ciągi z elementów zbioru 6 – elementowego.

Pierwszą cyfrę wybieramy spośród sześciu, drugą spośród pięciu, trzecią spośród czterech.

$|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Odpowiedź:

Zbiór zdarzeń elementarnych składa się ze 120 elementów.

Słownik

przestrzeń zdarzeń elementarnych

przestrzenią zdarzeń elementarnych lub zbiorem zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, pokazującą wykorzystanie wariacji bez powtórzeń do wyznaczania liczb spełniających dane warunki. Określ w każdym przypadku doświadczenie losowe, przestrzeń zdarzeń elementarnych i jej moc.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D4Of0Y1JH

Film pokazuje różne metody wykorzystania wariacji bez powtórzeń do obliczania liczby liczb spełniających określone warunki.

Polecenie 2

Doświadczenie losowe polega na układaniu z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$ liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach. Zbiór zdarzeń elementarnych składa się ze wszystkich tak utworzonych liczb. Określ z ilu elementów składa się ten zbiór.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Mamy cztery różne filiżanki. Doświadczenie polega na ustawianiu ich na półce w różnej kolejności. Ile jest równa moc zbioru zdarzeń elementarnych tego doświadczenia? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- 24
- 64
- 256
- 16

Ćwiczenie 2

Agata ma dwie bluzki i w sposób losowy wkłada je do trzech różnych szuflad. Z ilu elementów składa się przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- 6
- 9
- 5
- 8

Ćwiczenie 3

W torebce jest 6 cukierków czekoladowych i 8 cytrynowych. Doświadczenie polega na jednoczesnym losowaniu czterech cukierków – kolejność losowania nie jest istotna. Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Zbiór zdarzeń elementarnych tworzą czterowyrazowe kombinacje zbioru czternastoelementowego.	○	○
Liczba elementów przestrzeni zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu jest równa $77 \cdot 13$.	○	○
Moc zbioru zdarzeń elementarnych można obliczyć ze wzoru $\binom{8}{6}$.	○	○

Ćwiczenie 4

Doświadczenie polega na tworzeniu wyrazów dwuliterowych z liter słowa $ELKA$. Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Jeśli litery w tworzonych wyrazach nie mogą się powtarzać, to zbiór zdarzeń elementarnych składa się z ______ elementów.

Jeśli litery w tworzonych wyrazach mogą się powtarzać, to zbiór zdarzeń elementarnych składa się z ______ elementów.

Ćwiczenie 5

W urnie znajduje się $2n+1$ kul, ponumerowanych $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n+1$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 10.
Doświadczenie polega na jednoczesnym wylosowaniu 2 kul.
Uzupełnij zdanie, przeciągając odpowiednie wyrażenie. Możesz też kliknąć w lukę, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Moc zbioru zdarzeń elementarnych jest równa ______.

n^2+1 | $4n^2+2n$ | $(2n+1)^2$ | $2n^2+n$

Ćwiczenie 6

Podaj zbiór zdarzeń elementarnych w trzykrotnym rzucie monetą.

Ćwiczenie 7

Doświadczenie polega na tworzeniu liczb pięciocyfrowych z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, przestawiając je w dowolny sposób.

Oblicz, ile elementów ma zbiór zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Ćwiczenie 8

Na peronie do pociągu składającego się z dziesięciu wagonów wsiada sześciu pasażerów. Doświadczenie polega na wyborach wagonów przez pasażerów. Oblicz, ile jest zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa przestrzeń zdarzeń elementarnych
- oblicza moc zbioru zdarzeń elementarnych
- wykorzystuje aparat kombinatoryczny do zliczania elementów zbioru zdarzeń elementarnych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- papierowa wstęga
- tarcza strzelnicza

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie powtarzają wiadomości na temat doświadczeń losowych i sposobów zliczania obiektów kombinatorycznych – jeden uczeń zadaje pytania, inni odpowiadają.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą papierowej wstęgi.
2. Zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”. Pierwsza grupa na papierowym pasku zapisuje jedno zadanie podobne do przeczytanego. Pasek zawija tak, aby następna grupa nie widziała zapisu.
3. Kolejna grupa postępuje podobnie. Wstęga krąży tak długo, aż uczniom zabraknie pomysłów.
4. Jeden z uczniów odczytuje zapisy na wstędze. Uczniowie wspólnie rozwiązują najciekawsze zadania zapisane na wstędze.
5. Uczniowie wspólnie oglądają animację i rozwiązują problem określony w Poleceniu 2.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.
3. Podsumowaniem zajęć jest zaznaczenie przez każdego ucznia na „tarczy strzelniczej” pola odpowiadającego stopniu zrozumienia tematyki zajęć.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach pokazujących zastosowanie wariacji bez powtórzeń.