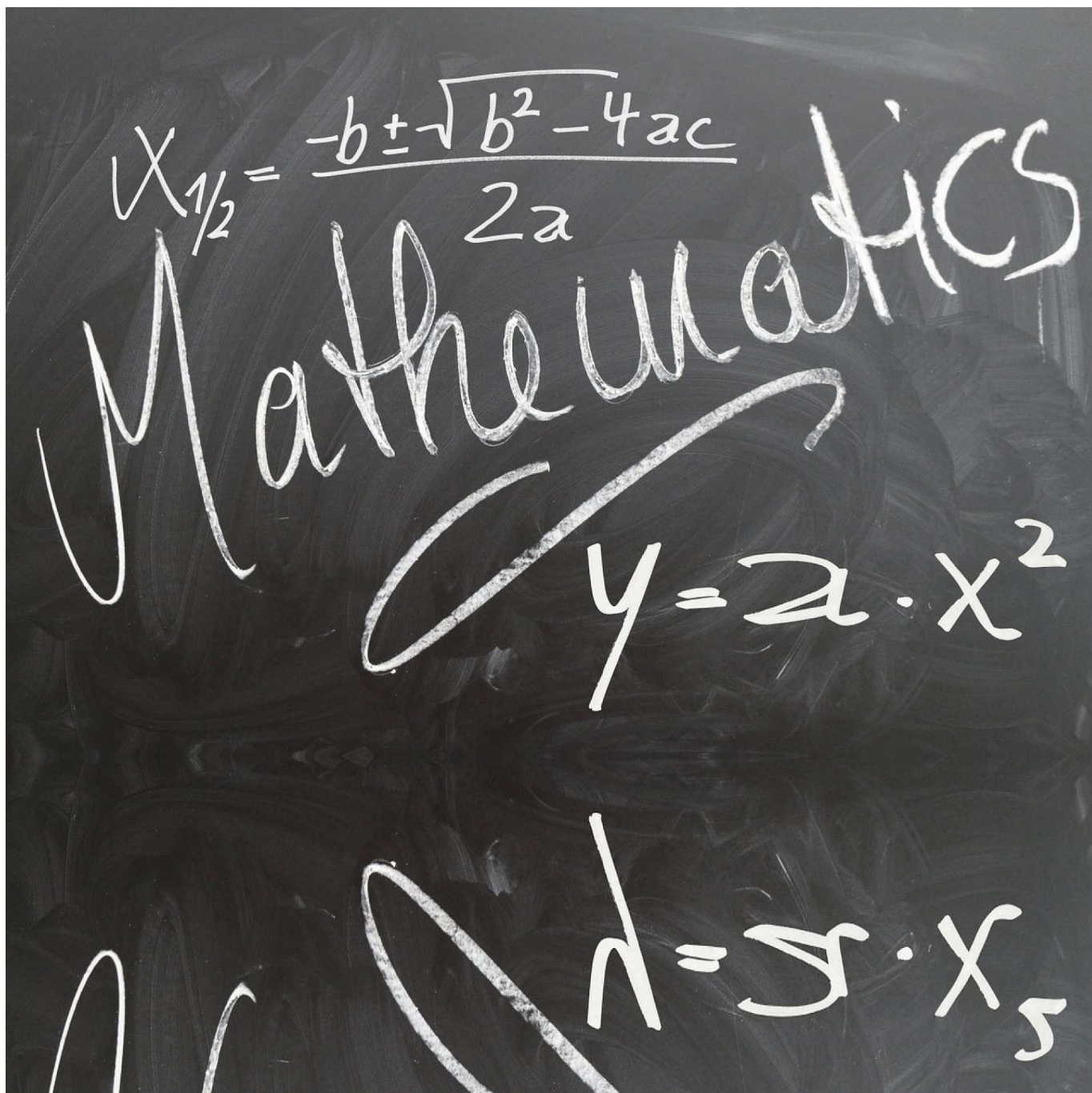
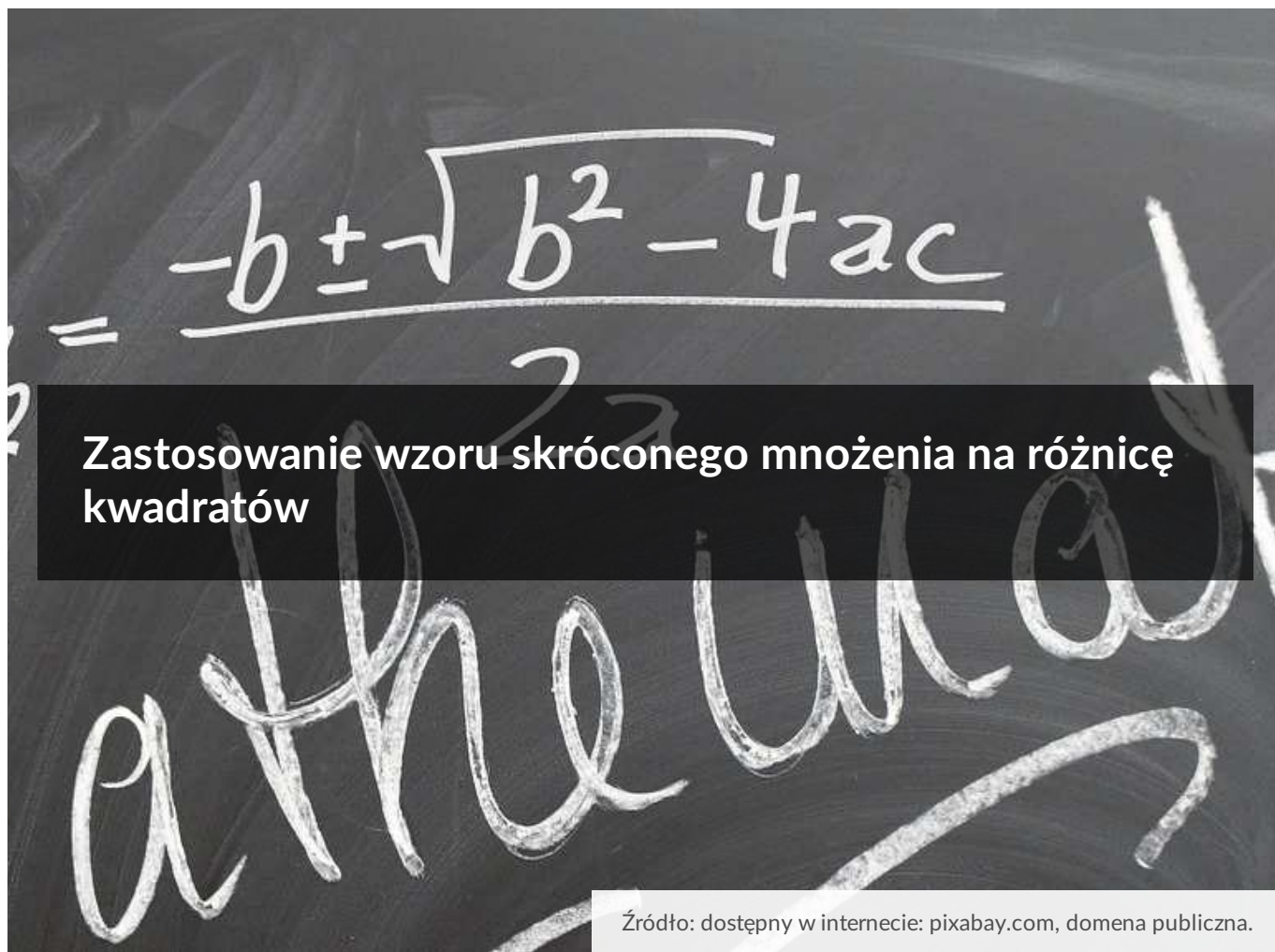




Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale poznamy zastosowania wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Wzór ten wykorzystamy między innymi do mnożenia dużych liczb, przekształcania wyrażeń algebraicznych, zapisywanie sumy w postaci iloczynu. Pokażemy też, jak za pomocą tego wzoru usunąć niewymierność z mianownika ułamka.

Twoje cele

- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów w obliczeniach arytmetycznych.
- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów w przekształceniach algebraicznych.

Przeczytaj

Algorytm to zbiór określonych reguł postępowania, które realizowane zgodnie z ustalonym porządkiem umożliwiają rozwiązanie określonego zadania. Jednym z takich algorytmów jest [wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów](#). Teraz poznasz zastosowanie tego wzoru w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych.

Obliczenia arytmetyczne

[Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów](#) można wykorzystać do szybkiego mnożenia niektórych liczb.

Przykład 1

Aby obliczyć $21 \cdot 19$ przedstawimy jedną z tych liczb w postaci sumy, a drugą w postaci różnicy liczby 20 i liczby 1. W ten sposób otrzymamy iloczyn sumy przez różnicę tych samych wyrażeń i skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$$21 \cdot 19 = (20 + 1)(20 - 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$$

Przykład 2

W podobny sposób jak w przykładzie 1 pomnożymy $98 \cdot 102$.

$$98 \cdot 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

Przykład 3

Stosując poznany wzór skróconego mnożenia, usuniemy niewymierność z mianowników podanych ułamków.

Rozszerzamy ułamek przez $2 + \sqrt{5}$, aby zastosować wzór skróconego mnożenia.

$$\frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{1}{2-\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{4-5} = \frac{2+\sqrt{5}}{-1} = -2 - \sqrt{5}$$

W mianowniku ułamka znajduje się suma, zatem rozszerzmy ułamek przez $9 - 3\sqrt{7}$, czyli przez różnicę.

$$\frac{\sqrt{7}}{9+3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{9+3\sqrt{7}} \cdot \frac{9-3\sqrt{7}}{9-3\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}-21}{81-63} = \frac{9\sqrt{7}-21}{18}$$

Przykład 4

Wykażemy, że liczba $K = \frac{1-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - \frac{1+9\sqrt{5}}{3}$ jest liczbą wymierną.

Usuniemy niewymierność z mianownika pierwszego ułamka i wykonujemy wskazane działania.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - \frac{1+9\sqrt{5}}{3} \\ K &= \frac{1-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} - \frac{1+9\sqrt{5}}{3} = \\ &= \frac{2+\sqrt{5}-10-4\sqrt{5}}{4-5} - \frac{1+9\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5} + 8 - 3\sqrt{5} - \frac{1}{3} = 7\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Liczbę $7\frac{2}{3}$ można zapisać w postaci ilorazu liczb całkowitych $\frac{23}{3}$, jest to więc liczba wymierna, co należało wykazać.

Przykład 5

Obliczymy wartość wyrażenia

$$W = \sqrt{113^3 - 112^2} \cdot \sqrt{13^2 - 12^2} + \sqrt{1600 + 720 + 81}.$$

Przekształcamy najpierw każdy z pierwiastków.

Zapisujemy różnicę kwadratów w postaci iloczynu, wykonujemy mnożenie i obliczamy pierwiastek.

$$\sqrt{113^3 - 112^2} = \sqrt{(113 - 112)(113 + 112)} = \sqrt{1 \cdot 225} = 15$$

Postępujemy podobnie – zapisujemy różnicę kwadratów w postaci iloczynu, wykonujemy mnożenie i obliczamy pierwiastek.

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13 - 12)(13 + 12)} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5$$

Wyrażenie $1600 + 720 + 81$ zapisujemy w postaci kwadratu sumy (korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy) i obliczamy pierwiastek.

$$\sqrt{1600 + 720 + 81} = \sqrt{(40 + 9)^2} = \sqrt{49^2} = 49$$

Wyznaczamy teraz wartość wyrażenia W .

$$W = 15 \cdot 5 + 49 = 124$$

Przekształcenia algebraiczne

Wzór $a^2 - b^2$ zastosujemy teraz do zapisu sum algebraicznych w postaci iloczynów, czyli do rozkładu sum na czynniki.

Przykład 6

Rozłożymy na czynniki podane sumy algebraiczne.

$$9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$$

$$81a^6 - y^2 = (9a^3 - y)(9a^3 + y)$$

$$7m^2 - 2t^2 = (\sqrt{7}m + \sqrt{2}t)(\sqrt{7}m - \sqrt{2}t)$$

$$a^2b^2 - 144 = (ab - 12)(ab + 12)$$

$$15 - y^8 = (\sqrt{15} - y^4)(\sqrt{15} + y^4)$$

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \text{ jeśli } x > 0, y > 0$$

Przykład 7

Pokażemy teraz, jak szybko można rozłożyć na czynniki wielodziałaniowe wyrażenia algebraiczne.

$$(3a - 2b)^2 - 4b^2 = (3a - 2b + 2b)(3a - 2b - 2b) = 3a(3a - 4b)$$

$$\begin{aligned}(5a + 6b)^2 - (5a - 6b)^2 &= (5a + 6b + 5a - 6b)(5a + 6b - 5a + 6b) = \\ &= 10a \cdot 12b = 120ab\end{aligned}$$

Wzór $a^2 - b^2$ jest często przydatny w skracaniu wyrażeń wymiernych.

Przykład 8

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $K = \frac{18x^2 - 8y^2}{6y - 9x}$, gdy $y \neq 1,5x$.

Wyłączamy wspólny czynnik w liczniku i mianowniku wyrażenia.

$$K = \frac{18x^2 - 8y^2}{6y - 9x} = \frac{2(9x^2 - 4y^2)}{3(2y - 3x)}$$

W liczniku sumę algebraiczną zapisujemy w postaci iloczynu.

$$K = \frac{2(3x - 2y)(3x + 2y)}{3(3x - 2y)}$$

Skracamy.

$$K = \frac{2(3x + 2y)}{3}$$

Dowodzenie twierdzeń

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów pozwala na uniknięcie pracochłonnych mnożeń, co jest szczególnie istotne, gdy chcemy szybko uzyskać wynik.

Przykład 9

Uzasadnimy, że dla dowolnych liczb całkowitych x, y liczba $M = (5 + 2x + y)^2 - (5 - 2x - y)^2$ jest podzielna przez 20.

Zapisujemy różnicę kwadratów w postaci iloczynu i redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{aligned} M &= (5 + 2x + y)^2 - (5 - 2x - y)^2 = \\ &= (5 + 2x + y - 5 + 2x + y)(5 + 2x + y + 5 - 2x - y) \\ M &= (4x + 2y) \cdot 10 \end{aligned}$$

Wyłączamy 2 przed nawias i mnożymy przez 10.

$$M = (4x + 2y) \cdot 10 = 2(2x + y) \cdot 10 = 20(2x + y)$$

Liczba M jest iloczynem liczb 20 oraz $2x + y$. Ponieważ $2x + y$ to liczba całkowita, zatem liczba M jest podzielna przez 20.

Słownik

wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

różnica kwadratów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez ich różnicę

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady szybkiego mnożenia liczb z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Polecenie 2

Oblicz najprostszym sposobem wartość wyrażenia W .

a) $W = 76 \cdot 84 - 22 \cdot 18$

b) $W = 640 \cdot 560 + 45 \cdot 55$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Liczba $\frac{\sqrt{708 \cdot 692 + 8^2}}{7} - 100$ jest

☐ całkowita ujemna większa od (-3)

☐ naturalna

☐ niewymierna

☐ całkowita ujemna mniejsza od (-3)

Ćwiczenie 2



Uzupełnij obliczenia, przeciągając odpowiednie liczby.

$$29 \cdot 31 = (\boxed{} - 1)(\boxed{} + 1) = \boxed{}^2 - 1^2 = \boxed{} \\ -1 = 899$$

1

900

900

1

30

30

900

30

1

Ćwiczenie 3



Wyrażenie $(x - 1)(x + 1)(x - 1)$ po uproszczeniu ma postać

☐ $x^3 + x^2 - x - 1$

☐ $x^3 + x^2 - x + 1$

☐ $x^3 - x^2 - x + 1$

☐ $x^3 - x^2 + x - 1$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary równanie z jego rozwiązaniem.

$(x - 2)^2 - (3x + 6)^2 = 0$

$-4 \text{ i } -1$

$(x - 4)^2 - (2x + 4)^2 = 0$

$1 \text{ i } 3$

$(5x + 1)^2 - (4x - 1)^2 = 0$

$-8 \text{ i } 0$

$(x + 2)^2 - (4x - 7)^2 = 0$

$-2 \text{ i } 0$

Ćwiczenie 5



Pole prostokąta o bokach długości $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ i $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$ jest równe

☐ $7 + 4\sqrt{5}$

☐ $2(25 - 3\sqrt{5})$

☐ $20\sqrt{3}$

☐ 7

Ćwiczenie 6



Po uproszczeniu wyrażenie $\frac{4x^2 - 20xy + 25y^2}{(2x - 5y)(4x^2 - 25y^2)} \cdot (-5y - 2x)$ jest równe

☐ $x - 2$

☐ $2x - 5y$

☐ -1

☐ 1

Ćwiczenie 7



Znajdź liczbę a , dla której liczba $K = a\sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ jest równa 15.

Ćwiczenie 8



Zapisz w postaci iloczynu wyrażenie $(4x + 2y)^2 - 256x^2$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych
- analizuje stosowane przez siebie metody rozwiązywania zadań wykorzystujących wzory skróconego mnożenia i dokonuje oceny własnej pracy
- rozwija umiejętność pracy w grupie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów

- stoliki zadaniowe
- gra dydaktyczna

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie sobie w domu umiejętności stosowania wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy i wzoru na kwadrat różnicy.

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze wiadomości dotyczące wyrażeń algebraicznych, a w szczególności wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.
2. Następnie rozwiązują wspólnie kilka przykładów, podanych przez nauczyciela, zamiany sumy algebraicznej na różnicę kwadratów.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą stolików zadaniowych. Na stolikach znajdują się przykłady rozwiązanych zadań pokazujących zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.
Na pierwszym stoliku zastosowanie wzoru w obliczeniach arytmetycznych (uczniowie zapoznają się też z galerią zdjęć interaktywnych, korzystając z komputerów), na drugim do przekształcania wzorów, na trzecim do dowodzenia twierdzeń (materiał taki, jak w sekcji „Przeczytaj”).
Każda grupa próbuje najpierw samodzielnie wykonać zadanie, a następnie porównuje z przedstawionym rozwiązaniem.
2. Uczniowie w grupach rozwiązują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, zwracają uwagę na zadania, które sprawiały problem. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości, dzieli się swoimi obserwacjami.

2. Grupy oceniają swoją pracę, wskazując swoje mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie poszukania jeszcze innych przykładów zastosowania wzoru na różnicę kwadratów.

Materiały pomocnicze:

- [Działania na wyrażeniach algebraicznych – przykłady](#)
- [Działania na wyrażeniach algebraicznych – zadania](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą w domu zapoznać się z galerią zdjęć interaktywnych.