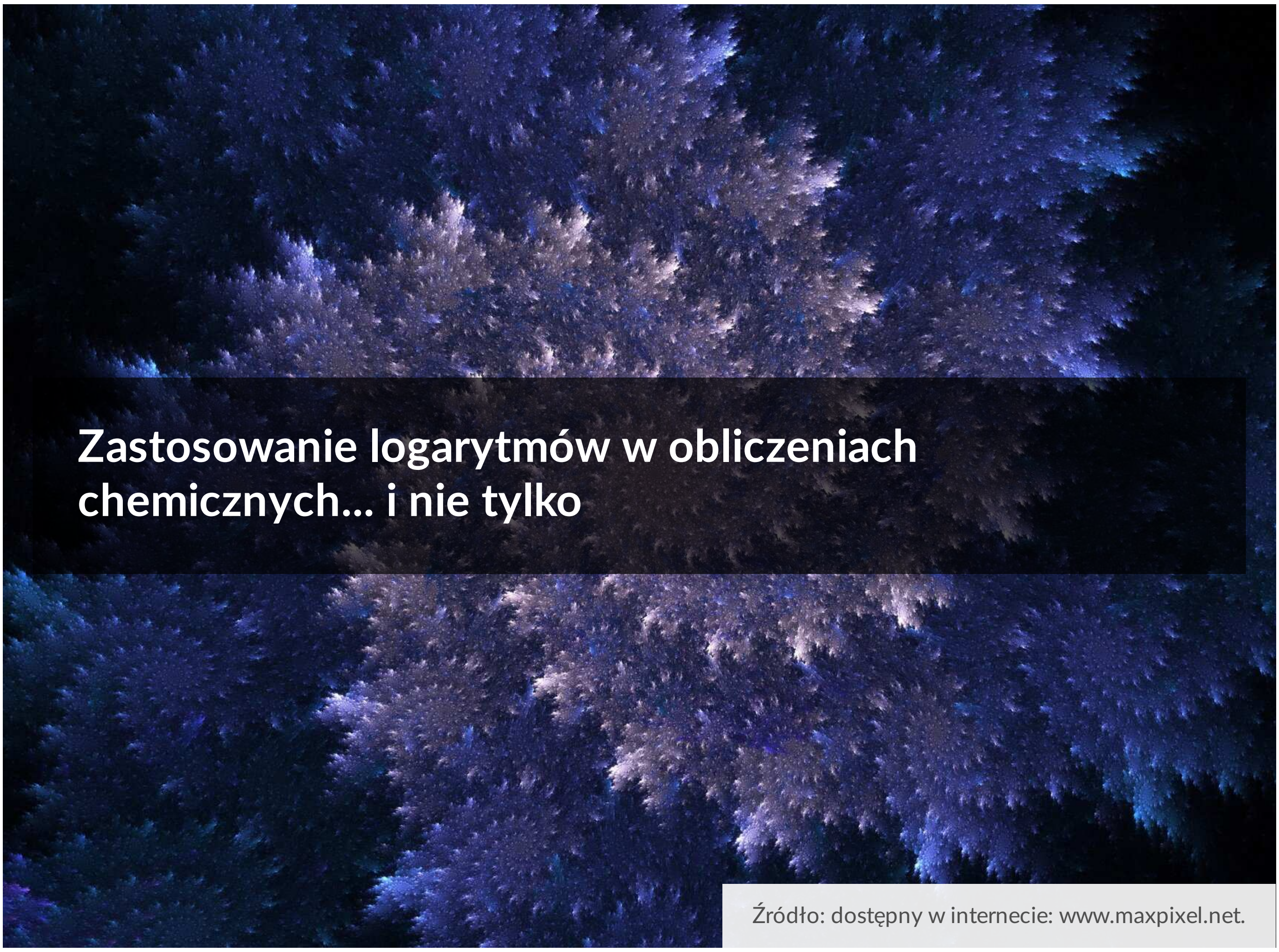
Zastosowanie logarytmów w obliczeniach chemicznych... i nie tylko

Zastosowanie logarytmów w obliczeniach chemicznych... i nie tylko



Źródło: dostępny w internecie: www.maxpixel.net.

Logarytmy mają wiele zastosowań w różnych dziedzinach wiedzy.

Logarytmy o podstawie e (czyli logarytmy naturalne) są powszechnie stosowane w obliczeniach matematycznych rachunku różniczkowego i całkowego, pojawiają się we wzorach obliczeniowych dotyczących liczb pierwszych.

Logarytm o podstawie 2, zwany logarytmem binarnym, ma zastosowanie w informatyce. Logarytmy pomagają określać głośność dźwięku, siłę trzęsienia ziemi, szybkość reakcji na bodźce.

Cyklon Catarina nad południowym Atlantykiem,
marzec 2004 i Galaktyka spiralna
Źródło: Pixabay.com, dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Wiele zjawisk i obiektów przyrodniczych ma kształt spirali logarytmicznej. Na przykład taki kształt ma tor ruchu owada lecącego do źródła światła, ruch powietrza w czasie cyklonu czy muszle łodzików – morskich głowonogów. Spiralną strukturę mają też niektóre galaktyki.

Twoje cele

- Zastosujesz logarytmy w obliczeniach z chemii i innych dziedzin wiedzy.
- Przekształcisz wyrażenia zawierające logarytmy.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny opisując sytuację z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Dla przypomnienia – definicja logarytmu.

Definicja: Logarytm

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b.

Poniżej przykład jednego z najbardziej znanych zastosowań logarytmów w obliczeniach chemicznych – wyznaczanie kwasowości roztworów.

Określanie pH roztworów

Skala pH jest ilościową skalą kwasowości i zasadowości roztworów wodnych związków chemicznych.

Skala ta opiera się na aktywności jonów hydroniowych $[H_3O^+]$ w roztworach wodnych.

Najczęściej pH oblicza się według wzoru:

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

gdzie:
$[H_3O^+]$ – oznacza stężenie jonów hydroniowych, wyrażone w molach na dm^3.

Przykładowe wartości pH

Substancja	pH
1 M kwas solny	0
Coca-Cola	$2{,}5$
Ocet	$2{,}9$
Herbata	$5{,}5$
Mleko	$6{,}5$
Chemicznie czysta woda	7
Woda morska	$8{,}0$
Mydło	$9{,}0 - 10{,}0$
Woda amoniakalna	$11{,}5$

Chemicy zwykle przyjmują uproszczoną wersję wzoru określającego pH roztworu, opartą o stężenia jonów wodorowych.

$$pH = -\log[H^+]$$

Dla chemicznie czystej wody $pH = -\log 10^{-7} = 7$ – woda ma odczyn obojętny.

Jeśli:		
$pH < 7$	$pH = 7$	$pH > 7$
roztwór ma odczyn kwaśny	roztwór ma odczyn obojętny (woda)	roztwór ma odczyn zasadowy

Przykład 1

Obliczymy, jakie jest pH treści żołądka, jeżeli stężenie jonów wodorowych w badanej próbce jest równe $2,5 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{dm}^3}$.

$pH = -\log\left[2,5 \cdot 10^{-4}\right]$

$pH = -(\log 2,5 - 4 \cdot \log 10)$

$pH \approx 4 - 0,4 = 3,6$

Odpowiedź:

pH treści żołądka wynosi ok. $3,6$, czyli treść żołądka ma odczyn kwaśny.

Przykład 2

Obliczmy przybliżone stężenie jonów wodorowych w wodzie morskiej.

Z informacji podanych wyżej wnioskujemy, że pH wody morskiej wynosi 8. Oznaczając szukane stężenie przez S, otrzymujemy:

$8 = -\log S$

Zatem:

$S = 10^{-8}$

Odpowiedź:

Stężenie jonów wodorowych w wodzie morskiej wynosi około $10^{-8}\ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{dm}^3}$.

Określanie wieku znaleziska

Do określania wieku znaleziska archeologicznego można wykorzystać wynik pomiaru zawartości izotopu węgla ^{14}C w żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) – stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C jest stały i wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ${}^{12}C$ pozostaje niezmieniona.

W 1946 r. amerykański fizyk F. Libby zaproponował wzór opisujący masę m próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T, po upływie czasu t.

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:
m_0 – początkowa masa próbki.

Przykład 3

Obliczymy wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ${}^{14}C$ jest równa 60% początkowej zawartości tego izotopu.

Z informacji zapisanej powyżej wnioskujemy, że $T = 5700$. Z treści zadania wynika, że $m = 0,6m_0$.

Korzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Mamy wyznaczyć t.

$0,6m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \Big| : m_0$

$0,6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

Logarytmujemy obie strony zapisanego równania.

$\log(0,6) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$

Przekształcamy równanie, korzystając z własności działań na logarytmach.

$\log 6 - \log 10 = \frac{t}{5700}(\log 1 - \log 2)$

$t = \frac{5700 \cdot (\log 6 - 1)}{-\log 2}$

Z tablic logarytmicznych odczytujemy:

$\log 2 \approx 0,30$

$\log 6 \approx 0,78$

Wyznaczamy przybliżoną wartość t.

$t \approx \frac{5700 \cdot (0,78 - 1)}{-0,30} = 4180$

Odpowiedź:

Przybliżony wiek znaleziska to około 4180 lat.

Demografia

Pokażemy teraz zastosowanie logarytmów do obliczeń demograficznych. Wykorzystamy wzór na procent składany.

Przykład 4

Średni przyrost naturalny ludności w miejscowości Jedlicze wynosi 20 promili rocznie. Obliczymy, po ilu latach liczba mieszkańców tej miejscowości wzrośnie o 40%.

Oznaczmy:
M – obecna liczba mieszkańców,
x – szukana liczba lat.

Jeśli teraz liczba ludności wynosi M, to za x lat będzie wynosiła $140\%M$, czyli $\frac{7}{5}M$.

Stosujemy wzór na procent składany.

$\frac{7}{5}M = M\left(1 + \frac{20}{1000}\right)^x$

Z tego wzoru wyznaczamy x.

$\frac{7}{5}M = M\left(1 + \frac{20}{1000}\right)^x \mid : M$

$\frac{7}{5} = \left(1 + \frac{20}{1000}\right)^x$

Logarytmujemy obie strony zapisanego równania.

$\log \frac{7}{5} = x \cdot \log\ (1,02)$

$x = \frac{\log(1{,}4)}{\log(1{,}02)}$

$x \approx 17$

Odpowiedź:

Liczba mieszkańców wzrośnie o 40% po około17 latach.

Zmiany ciśnienia atmosferycznego

Aby obliczyć wysokość szczytu górskiego można użyć barometru i skorzystać ze wzoru:

$$h = 18400 \cdot (\log b_1 - \log b_2)$$

gdzie:
h – wysokość góry,
b_1, b_2 – ciśnienie barometryczne (wyrażone w mm słupka rtęci) odpowiednio u podnóża góry i na jej wierzchołku.

Z tego wzoru można też korzystać, chcąc obliczyć wartość ciśnienia atmosferycznego u podnóża góry lub na jej wierzchołku.

Przykład 5

Obliczymy, jakie jest ciśnienie na wierzchołku góry o wysokości 1150 m, jeżeli u podnóża góry ciśnienie wynosi $750\ \frac{\text{mm}}{\text{Hg}}$. Wynik podamy z dokładnością do $0,1\ \frac{\text{mm}}{\text{Hg}}$.

Do wzoru $h = 18400 \cdot (\log b_1 - \log b_2)$ wstawiamy $h = 1150$ m, $b_1 = 750\ \frac{\text{mm}}{\text{Hg}}$.

$1150 = 18400 \cdot (\log 750 - \log b_2)$

Przekształcamy zapisaną równość.

$\frac{1150}{18400} - \log 750 = -\log b_2$

$\log 750 - 0,0625 = \log b_2$

Z tablic logarytmicznych odczytujemy wartość $\log 750$.

$\log 750 \approx 2,8751$

Stąd

$\log b_2 \approx 2,8126$

$b_2 \approx 10^{2,8126}$

Ponownie korzystamy z tablic matematycznych.

$b_2 \approx 649,53$

Odpowiedź:

Ciśnienie atmosferyczne na wierzchołku góry wynosi około $649,5\ \frac{\text{mm}}{\text{Hg}}$.

Wymiar fraktalny

Słowo fraktal pochodzi od łacińskiego *frangere* (łamać). Jest to bardzo trafna nazwa, bowiem wymiar fraktala zwykle nie jest liczbą całkowitą. Geometrycznie fraktal można zinterpretować jako figurę samopodobną, czyli taką, której części są podobne do całości.

Dla figur samopodobnych określa się wielkość zwaną wymiarem samopodobieństwa (wymiarem fraktalnym), będącą uogólnieniem klasycznej definicji wymiaru.

Obliczanie wymiaru fraktala oparte jest na koncepcji tzw. pudełek. Daną figurę pokrywamy mniejszymi („pudełkami”), podobnymi do wyjściowej figury. Wymiar pudełkowy oparty jest na zliczaniu ilości „pudełek” pokrywających zbiór.

Jeśli figura w całej wielkości zawiera N samopodobnych kopi siebie wielkości s, to jej wymiar samopodobieństwa jest równy:

$$D_s = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$$

Dla przykładu wymiar fraktalny płuc szacuje się na ok. $2,97$, a powierzchni mózgu na ok. $2,79$.

Przykład 6

Obliczymy wymiar fraktalny zbioru Cantora.

Tworzenie zbioru Cantora rozpoczynamy od narysowania odcinka. Odcinek dzielimy na trzy, a następnie „wycinamy” środek. W podobny sposób postępujemy z utworzonymi „pozostałymi” odcinkami. Procedurę powtarzamy w nieskończoność.

Każdy nowo powstały odcinek jest więc podobny do poprzedniego w skali 3, a z każdego odcinka powstają dwa nowe.

Zatem:

$N = 2$

$s = \frac{1}{3}$

$D_s = \dfrac{\log 2}{\log\left(\dfrac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3}$

$D_s \approx 0,63$

Odpowiedź:

Wymiar zbioru Cantora jest równy w przybliżeniu $0,63$.

Słownik

logarytm

logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a dodatniej i różnej od jedności, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b

Audiobook

Polecenie 1
Zapoznaj się jeszcze z kilkoma ciekawymi możliwościami wykorzystania logarytmów w różnych dziedzinach życia.

Polecenie 2
Po podaniu człowiekowi pewnego leku, substancja czynna przenika do krwioobiegu. Jednak z każdą godziną ilość substancji zmniejsza się o 60%. Podana dawka leku zawierała $200\ \text{mg}$ substancji. Oblicz, po ilu godzinach zostanie w krwioobiegu tego człowieka mniej niż $50\ \text{mg}$ substancji czynnej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Szybkość wiatru w pobliżu centrum tornada zależy od odległości, jaką tornado może pokonać.

Opisuje to wzór:

$$v = 93 \cdot \log s + 65,$$

gdzie:
v – prędkość w milach na godzinę,
s – długość drogi w milach.

Określ prędkość tornada, które pokonało dystans 100 mil.

Ćwiczenie 8

Oblicz, ile procent światła przenika do lasu na głębokość $10 \mathrm{~m}$, jeśli średnio na $1 \mathrm{~m}^2$ rośnie jedno drzewo, a średnica pni drzew na wysokości $150 \mathrm{~cm}$ jest równa $40 \mathrm{~cm}$.

Skorzystaj ze wzoru:

$$-0,43 \cdot n \cdot d \cdot l = \log \frac{I}{I_0},$$

gdzie:
n – liczba drzew rosnących na $1 \mathrm{~m}^2$,
d – średnica drzew,
l – głębokość lasu,
I – natężenie światła na głębokości l,
I_0 – natężenie światła padającego na brzeg lasu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie logarytmów w obliczeniach chemicznych… i nie tylko

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa I lub II, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

I. Liczby rzeczywiste. Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje logarytmy w obliczeniach z różnych dziedzin wiedzy

- przekształca wyrażenia zawierające logarytmy
- dobiera odpowiedni model matematyczny opisując sytuację z kontekstem realistycznym
- analizuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wzorów i opisów
- kształtuje umiejętności związane z pracą w grupie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- praca z ekspertem metodą stolików zadaniowych

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Krótkie powtórzenie wiadomości na temat logarytmów – nauczyciel wyznacza 3 uczniów, którzy na przemian odpowiadają na pytania zadawane przez koleżanki i kolegów (zadający pytania mogą korzystać z zeszytów i książek). Odpowiadający uczniowie zostają nagrodzeni „plusami" lub ukarani „minusami".
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 6 grupach metodą stolików zadaniowych. Przy każdym stoliku siedzi ekspert, który w domu przygotował jedno z zagadnień omawianych w sekcji „Przeczytaj". Opracował też swoje zadania dotyczące danej tematyki. Jego zadaniem jest zapoznanie każdej grupy z danym problemem i pokazanie sposobu rozwiązywania zadań danego typu. Może wspomagać się przygotowaną wcześniej przez siebie prezentacją lub przygotowanymi ćwiczeniami interaktywnymi.
2. Po zapoznaniu się z zagadnieniami przy wszystkich stolikach, uczniowie wspólnie sporządzają mapę myśli obrazującą zastosowania funkcji logarytmicznej. Przy czym

mogą bazować również na wcześniej pozyskanych informacjach, dotyczących zastosowania logarytmów w fizyce, zagadnieniach matematycznych, itp.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Eksperci – uczniowie „odpowiedzialni” za poszczególne stoliki komentują pracę grup, zwracając szczególną uwagę na sposób pracy grup, wzajemne relacje między uczniami, itp.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i ekspertów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wysłuchanie audiobooka i rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Działania na logarytmach. Przykłady

Wskazówki metodyczne:

Audiobook może być wstępem do zagadnień dotyczących funkcji logarytmicznej i wykładniczej.