

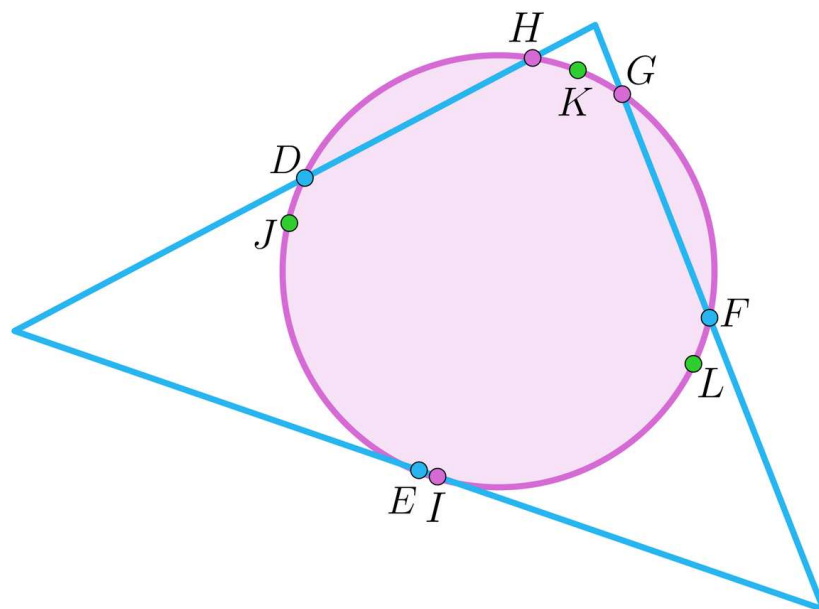


Okrąg dziewięciu punktów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Okrąg dziewięciu punktów

Źródło: domena publiczna, dostępny w internecie: pixy.org.



Przez trzy punkty, które nie są współliniowe można narysować dokładnie jeden okrąg.

W 1822 roku Karl Wilhelm Feuerbach dokonał fascynującego odkrycia, że środki boków trójkąta oraz spodki wysokości trójkąta leżą na wspólnym okręgu. Niedługo po tym odkryciu matematycy zauważyli, że oprócz tych sześciu punktów jeszcze inne trzy charakterystyczne

punkty leżą na tym okręgu. Są nimi środki odcinków łączących wierzchołki trójkąta z ortocentrum, czyli z punktem przecięcia wysokości.

Okrąg ten nosi nazwę „okręgu dziewięciu punktów” lub „okręgu Feuerbacha”. Ten materiał poświęcimy badaniu własności okręgu dziewięciu punktów. Treści przedstawione w tym materiale wykraczają poza podstawę programową, jednak w dowodach korzystamy tylko z własności zawartych w podstawie programowej. Okrąg dziewięciu punktów jest ciekawym tematem i wykorzystywany jest w dowodach w zadaniach konkursowych i olimpijskich.

Twoje cele

- Poznasz okrąg, na którym leży dziewięć punktów charakterystycznych dla trójkąta.
- Poznasz i udowodnisz własności okręgu dziewięciu punktów.
- Zastosujesz własności okręgu dziewięciu punktów w zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Fakty związane z okręgami

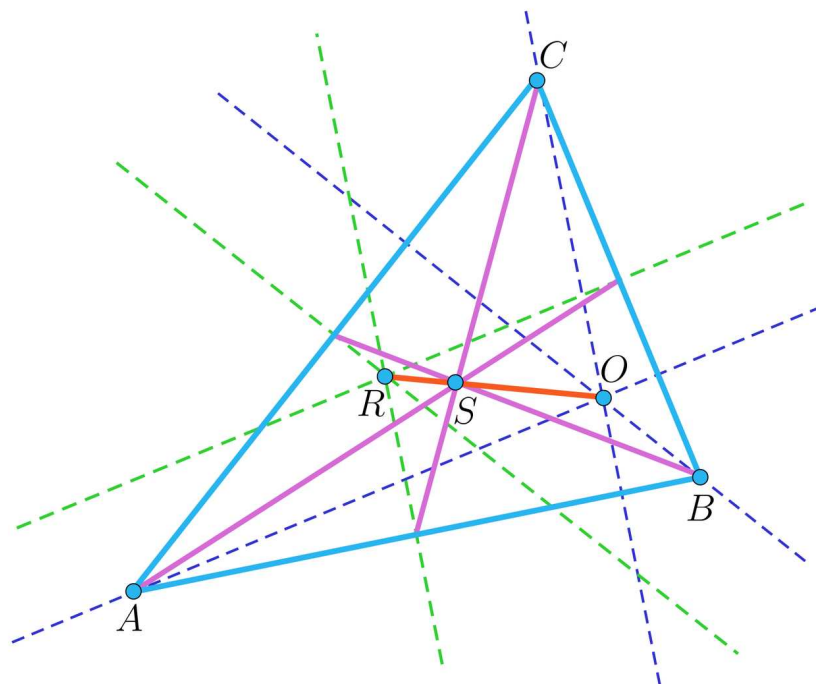
- Przez dane trzy niewspółliniowe punkty można poprowadzić dokładnie jeden okrąg lub równoważnie, na dowolnym trójkącie można opisać dokładnie jeden okrąg.
- Tematem tego materiału jest **okrąg dziewięciu punktów**, więc mamy natychmiastowy wniosek, że jeżeli wybierzemy dowolne trzy niewspółliniowe punkty z dziewięciu, to wyznaczymy ten sam okrąg tak jak każda inna trójka.
- Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty.
- Jeśli kąt wpisany jest prosty, to jest kątem opartym na średnicy okręgu.
- Jeśli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu, to wierzchołki tego trójkąta leżą na tym okręgu.
- Środkiem okręgu opisanego na trójkącie jest punkt przecięcia symetralnych boków tego trójkąta.
- Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.

Odcinek Eulera

Prosta Eulera dla trójkąta niebędącego trójkątem równobocznym, jest to prosta, która przechodzi przez:

1. **ortocentrum** tego trójkąta (punkt przecięcia prostych zawierających jego wysokości),
2. **środek** okręgu opisanego (punkt przecięcia symetralnych jego boków),
3. **środek ciężkości trójkąta** (punkt przecięcia jego **środkowych**).

Odcinek Eulera, jest to odcinek RO , gdzie R jest środkiem okręgu opisanego a O jest ortocentrum tego trójkąta. Jeśli trójkąt jest równoboczny to odcinek Eulera jest jednym punktem.



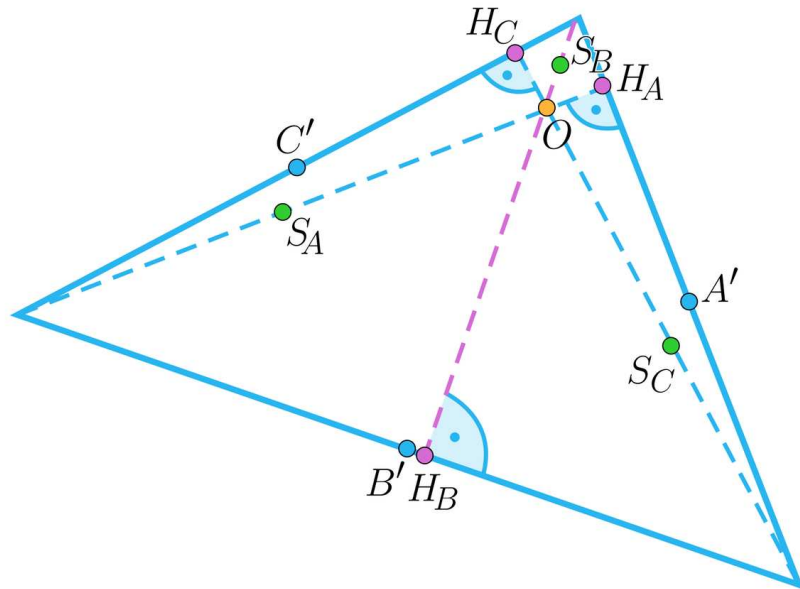
Środek ciężkości trójkąta niebędącego trójkątem równobocznym dzieli **odcinek Eulera** w stosunku 1 : 2 i leży w odległości jednej trzeciej od R , a jeśli trójkąt jest równoboczny to pokrywa się z odcinkiem Eulera zredukowanym do jednego punktu.

Środek okręgu wpisanego w trójkąt nie leży na prostej Eulera, a w przypadku, gdy trójkąt jest równoboczny to pokrywa się z odcinkiem Eulera zredukowanym do jednego punktu.

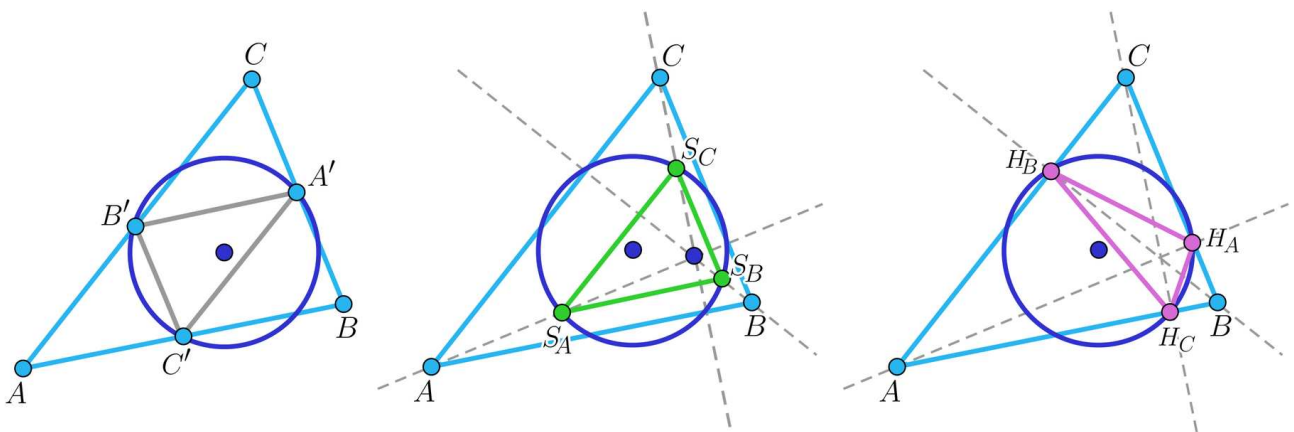
Definicja: Okrąg dziewięciu punktów

Okręgiem dziewięciu punktów w trójkącie ABC nazywamy okrąg przechodzący przez środki boków tego trójkąta A' , B' , C' , spodki wysokości H_A , H_B , H_C oraz środki S_A , S_B , S_C odcinków łączących punkt przecięcia O wysokości trójkąta (ortocentrum) z wierzchołkami trójkąta.

Na rysunku wprowadzone są oznaczenia interesujących punktów.

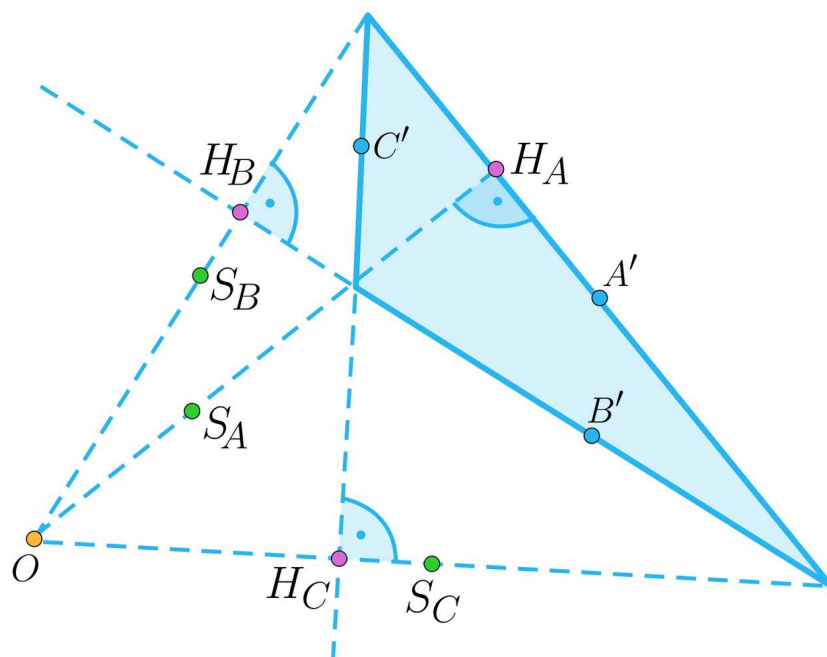


- Punkty niebieskie są środkami boków.
- A' oznacza środek boku BC , czyli środek boku leżący naprzeciwko punktu A . Analogicznie B' i C' .
- Punkty czerwone są spodkami wysokości.
- H_A oznacza spodek wysokości opuszczonej z punktu A na bok BC . Analogicznie H_B i H_C .
- Punkt żółty O jest punktem przecięcia wysokości. Dla uproszczenia będziemy stosowali nazwę ortocentrum.
- Punkty zielone są środkami odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum.
- S_A oznacza środek odcinka AO . Analogicznie S_B, S_C .

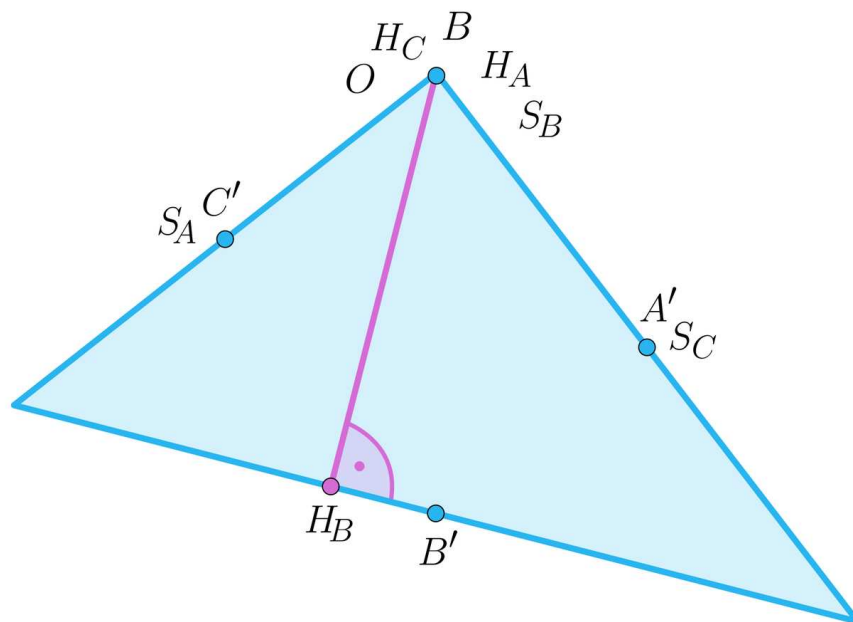


Na rysunkach przedstawiony jest ten sam trójkąt i okręgi opisane odpowiednio, na środkach boków trójkąta, środkach odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum, spodkach wysokości.

Na rysunku poniżej zaznaczone są omawiane punkty w trójkącie rozwartokątnym ABC . Ortocentrum leży wtedy poza trójkątem ABC .



Na poniższym rysunku zaznaczone są omawiane punkty w trójkącie prostokątnym ABC .



Kąt prosty jest przy wierzchołku B . Wtedy punkty O , H_A , H_C , S_B pokrywają się z wierzchołkiem B . Własność ta wynika z faktu, że przyprostokątne są wysokościami trójkąta, więc wierzchołek B jest ich punktem przecięcia. Ponadto, odcinek BO jest punktem, więc S_B pokrywa się z O i z B .

Zauważmy też, że C' pokrywa się z S_A , bo odcinki AB i AO są tym samym odcinkiem.

Podobnie $A' = S_C$.

Przykład 1

Pokażemy, że okrąg dziewięciu punktów dla trójkąta równobocznego jest okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Stąd środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami trójkąta leżą na okręgu wpisanym w ten trójkąt.

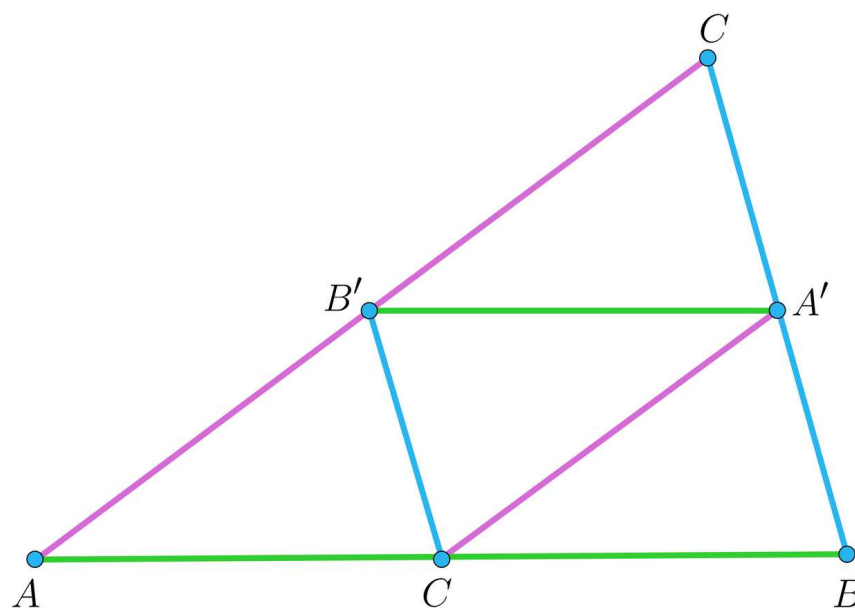
Rozwiązanie

Rozważmy okrąg wpisany w ten trójkąt. Jego środek leży w ortocentrum trójkąta. Stąd spodki wysokości są punktami styczności okręgu wpisanego i boków trójkąta i pokrywają się z odpowiednimi środkami boków. Zatem okrąg wpisany w trójkąt równoboczny jest okręgiem, na którym leżą spodki wysokości i środki boków, więc jest to okrąg dziewięciu punktów. Ponieważ promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny stanowi jedną trzecią wysokości, a odległość środka tego okręgu od dowolnego wierzchołka trójkąta ma długość dwóch trzecich wysokości, to środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami trójkąta leżą na okręgu wpisanym w ten trójkąt.

Własność: Własności linii łączącej środki boków trójkąta

Linia środkowa w trójkącie jest to odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta.

Trójkąt, którego boki są liniami środkowymi będziemy nazywali **trójkątem środkowym**.



Twierdzenie: Twierdzenie o linii środkowej w trójkącie

1. Linia środkowa w trójkącie jest równoległa do podstawy i długość linii środkowej jest równa połowie długości podstawy. Jeżeli odcinek łączący dwa boki trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i ma długość równą połowie długości trzeciego boku, to odcinek ten jest linią środkową w trójkącie.
2. Trójkąt środkowy w trójkącie ABC jest podobny do trójkąta ABC w skali $1 : 2$.
3. Trójkąty wyznaczone przez linie środkowe są przystające do trójkąta środkowego.

Przykład 2

Przy oznaczeniach przyjętych w tym materiale, wskażemy linie środkowe w trójkącie ABC i wyznaczmy ich długości na podstawie długości boków trójkąta. Wskażemy też pary boków odpowiednich.

Rozwiązanie

Ponieważ odcinek $A'C'$ łączy środki boków AB i BC , to $A'C'$ jest równoległy do boku AC i $|A'C'| = \frac{|AC|}{2}$. Ponadto, bok $A'C'$ trójkąta środkowego $A'B'C'$ odpowiada bokowi AC trójkąta ABC .

Analogicznie dla pozostałych boków trójkąta środkowego.

Przykład 3

Pokażemy trójkąty przystające wyznaczone przez linie środkowe oraz boki odpowiadające.

Rozwiązanie

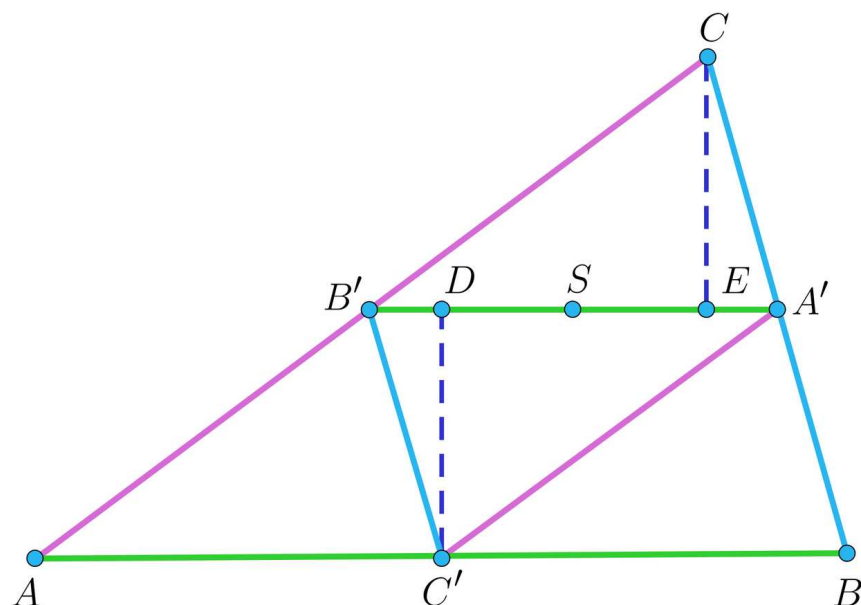
Trójkąt $A'B'C'$ jest trójkątem środkowym. Trójkąty $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ są przystające do trójkąta środkowego. Bokom trójkąta środkowego odpowiadają boki pozostałych trójkątów oznaczone tym samym kolorem.

Własność: Własność środków boków trójkąta środkowego

Środek dowolnego boku trójkąta środkowego jest środkiem odcinka łączącego spodek wysokości trójkąta środkowego opuszczonej na ten bok i spodek wysokości trójkąta przystającego opuszczonej na ten wspólny bok obu trójkątów.

Dowód

Przy oznaczeniach jak na rysunku należy pokazać, że środek S odcinka $A'B'$ jest środkiem odcinka DE .



Punkty A' , E , S , D , B' leżą na jednym odcinku w położeniu jak na rysunku. Ponieważ trójkąty $A'B'C'$ i $A'B'C$ są przystające, to $|A'E| = |B'D|$. Stąd S jest środkiem odcinka DE .

Analogicznie dla pozostałych boków trójkąta środkowego.

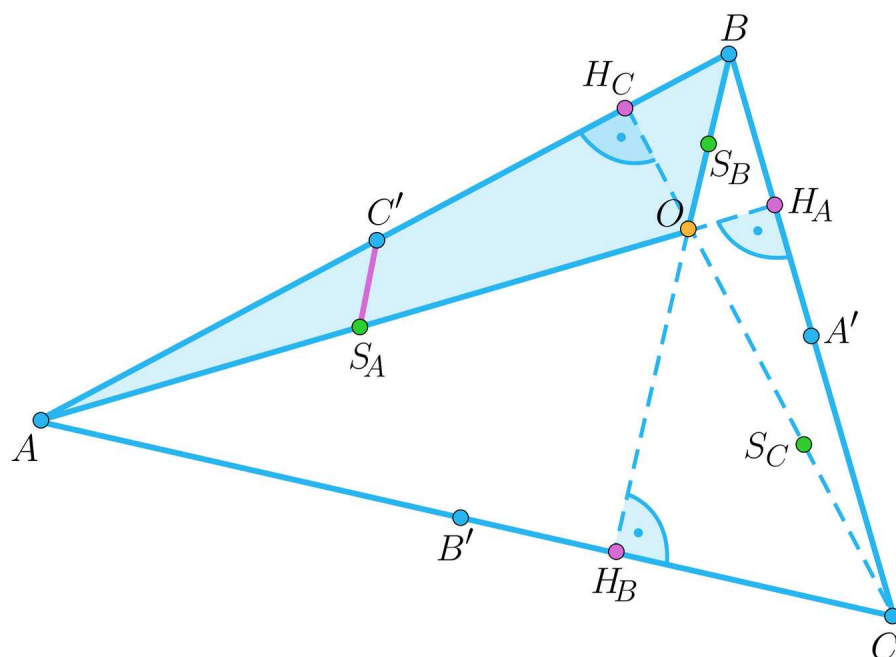
Twierdzenie: Twierdzenie o trójkątach, których jednym wierzchołkiem jest ortocentrum

1. W trójkącie AOB odcinek $C'S_A$ jest równoległy do boku OB i $|C'S_A| = |OS_B| = |BS_B|$.
2. Odcinek $C'S_A$ jest równoległy do wysokości BH_B .

Analogiczna własność zachodzi dla trójkątów AOC i COB .

Dowód

Na rysunku zaznaczony jest trójkąt AOB .



1. Z definicji punkt C' jest środkiem boku AB , a punkt S_A jest środkiem odcinka AO . Stąd $C'S_A$ jest linią środkową w trójkącie AOB . Stąd mamy, że $C'S_A \parallel OB$ oraz $|C'S_A| = \frac{1}{2}|OB| = |OS_B| = |BS_B|$. Przy czym ostatnie dwie równości wynikają z definicji S_B jako środka odcinka OB .
2. Ponieważ odcinek $C'S_A$ jest równoległy do boku OB , a bok OB leży na wysokości BH_B , to z przechodniości relacji równoległości odcinek $C'S_A$ jest równoległy do wysokości BH_B .

Przedstawione własności zachodzą również dla trójkątów AOC i COB .

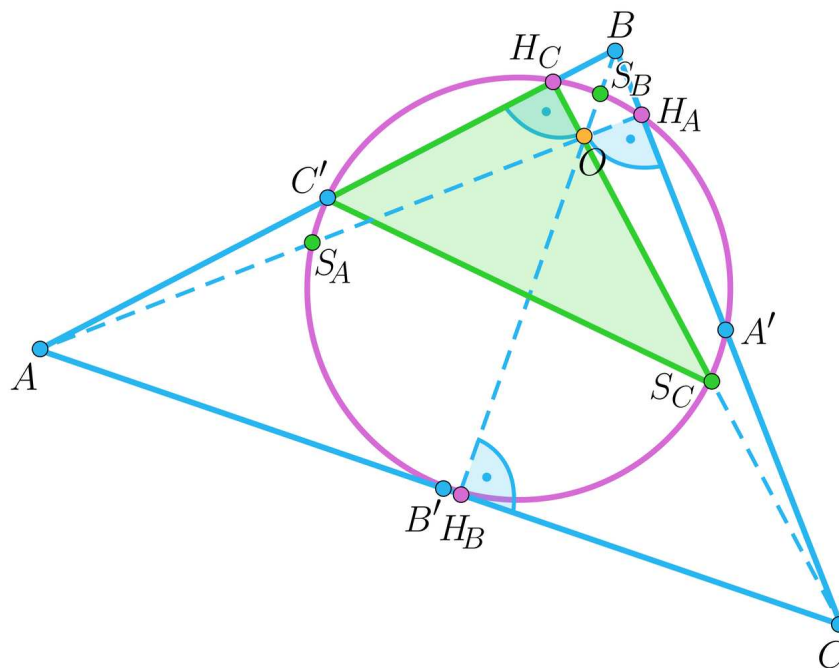
Twierdzenie główne

Twierdzenie: Twierdzenie o okręgu dziewięciu punktów

W trójkącie ABC , środki A' , B' , C' jego boków, spodki wysokości H_A , H_B , H_C oraz środki S_A , S_B , S_C odcinków łączących ortocentrum O z wierzchołkami trójkąta leżą na jednym okręgu.

Dowód

Popatrzmy na rysunek.



Jeśli trójkąt ABC jest równoboczny, to okrąg dziewięciu punktów jest okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Środki boków pokrywają się z odpowiednimi spodkami wysokości, więc dziewięć charakterystycznych punktów redukuje się do sześciu i wszystkie leżą na okręgu wpisanym w ten trójkąt.

Jeśli trójkąt ABC nie jest równoboczny, to możemy wybrać trzy niewspółliniowe punkty, na przykład C' , H_C , S_C .

Prowadzimy okrąg przez punkty C' , H_C , S_C . Trójkąt $C'H_C S_C$ zaznaczony jest na zielono.

Punkt S_C leży na wysokości CH_C poprowadzonej na bok AB , a punkt C' leży na boku AB . Stąd kąt $C'H_C S_C$ jest kątem prostym. Z własności okręgu wynika, że jest kątem opartym na średnicy okręgu, więc odcinek $C'S_C$ jest średnicą tego okręgu.

Teraz rozważmy trójkąt $C'S_C A'$.

$C'A'$ jest równoległy do AC jako [linia środkowa w trójkącie](#). Ponadto, na mocy twierdzenia o trójkątach, których jednym wierzchołkiem jest ortocentrum $A'S_C$ jest równoległy do BH_B . Zatem $C'A'$ jest prostopadły do $A'S_C$, a to oznacza, że kąt $\angle C'A'S_C$ jest kątem prostym w trójkącie o przeciwprostokątnej równej średnicy okręgu. Z własności okręgu wynika, że punkt A' leży na okręgu.

Pokazaliśmy więc, punkt A' leży na okręgu wyznaczonym przez punkty C' , H_C , S_C .

Analogiczne rozważanie prowadzimy dla trójkąta $C'S_C B'$.

Wynika z nich, że również punkt B' leży na tym okręgu.

Stąd 5 punktów C' , H_C , S_C , A' , B' leży na jednym okręgu.

Teraz powtarzamy całe rozumowanie dla okręgu poprowadzonego przez punkty A' , H_A , S_A oraz dla okręgu poprowadzonego przez punkty B' , H_B , S_B .

Ostatecznie dostajemy, że

5 punktów H_C , S_C , A' , B' , C' leży na jednym okręgu.

5 punktów H_A , S_A , A' , B' , C' leży na jednym okręgu.

5 punktów H_B , S_B , A' , B' , C' leży na jednym okręgu.

Ponieważ na każdym z okręgów leżą te same 3 punkty A' , B' , C' i ponieważ dokładnie jeden okrąg można poprowadzić przez 3 niewspółliniowe punkty, to wszystkie 9 punktów leży na tym samym okręgu. To kończy dowód.

Przykład 4

Pokażemy, że jeśli punkt P jest równoodległy od wybranych dwóch spodków wysokości trójkąta i jednocześnie jest równoodległy od środków wybranych dwóch boków trójkąta takich, że przynajmniej jeden z nich jest różny od wybranych spodków wysokości, to P jest środkiem okręgu dziewięciu punktów.

Rozwiązanie

Okrąg dziewięciu punktów jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie środkowym trójkąta i okręgiem opisanym na trójkącie o wierzchołkach w spodkach wysokości tego trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia symetralnych boków.

Jeśli punkt P jest równoodległy od wybranych dwóch spodków wysokości trójkąta to leży na symetralnej trójkąta o wierzchołkach w spodkach wysokości.

Jeśli punkt P jest równoodległy od wybranych dwóch środków boków trójkąta to leży na symetralnej trójkąta środkowego. Jeśli przynajmniej jeden z tych środków jest różny od wybranych spodków wysokości, to symetralne przecinają się w jednym punkcie, którym jest środek okręgu dziewięciu punktów. Stąd od razu wynika, że odległość punktu P od dowolnego spodka wysokości jest równa odległości tego punktu od środka dowolnego boku trójkąta.

Własności okręgu dziewięciu punktów

Własność: Średnica okręgu dziewięciu punktów

Średnicą okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta ABC jest każdy z odcinków $A'S_A$, $B'S_B$, $C'S_C$.

Dowód

W dowodzie twierdzenia o okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta ABC wykazaliśmy, że $C'S_C$ jest średnicą okręgu poprowadzonego przez punkty C' , H_C , S_C , a stąd też jest średnicą okręgu dziewięciu punktów. Przez analogię pozostałe odcinki $A'S_A$, $B'S_B$ są też średnicami okręgu dziewięciu punktów.

Przykład 5

Odcinek łączący środek boku BC trójkąta ABC ze środkiem odcinka OA , gdzie O jest ortocentrum trójkąta ABC ma długość 12. Wyznamy promień okręgu dziewięciu punktów dla tego trójkąta.

Rozwiązanie

Opisany odcinek to $A'S_A$, więc $|A'S_A| = 12$. Z własności średnicy okręgu dziewięciu punktów $A'S_A$ jest średnicą okręgu dziewięciu punktów, więc długość promienia tego okręgu wynosi $\frac{12}{2} = 6$.

Własność: Zależność między promieniem okręgu dziewięciu punktów i promieniem okręgu opisanego

Promień R' okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta ABC jest równy połowie promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód

Na okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta ABC leżą środki boków tego trójkąta, więc okrąg ten jest opisany na trójkącie środkowym o którym wiemy, że jest podobny do trójkąta ABC w skali 1 : 2.

Stąd $\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}$.

Przykład 6

Średnica okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta ABC ma długość a . Pokażemy, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie też ma długość a .

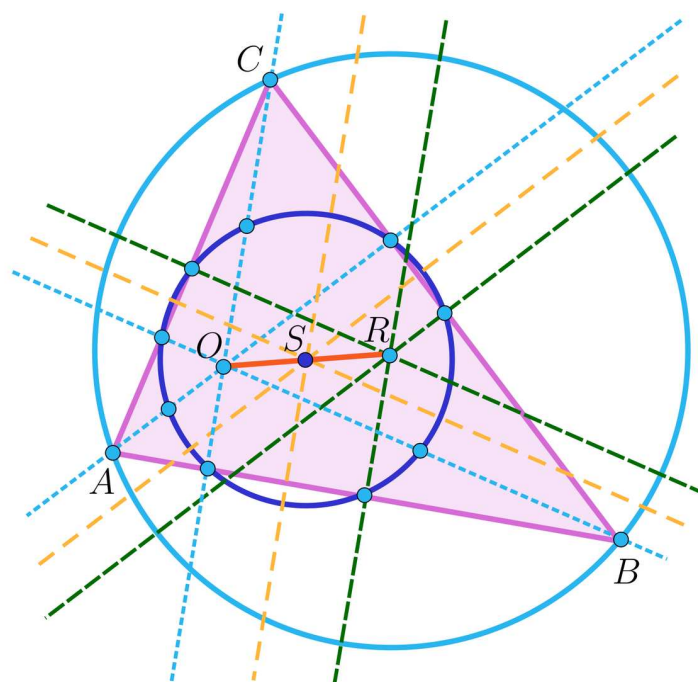
Rozwiązanie

Rzeczywiście, średnica okręgu dziewięciu punktów ma długość dwa razy większą od jego promienia. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie też ma długość dwa razy

większą od promienia okręgu dziewięciu punktów, więc ma długość równą długości średnicy okręgu dziewięciu punktów.

Związek okręgu dziewięciu punktów wyznaczonych dla danego trójkąta z symetralnymi boków trójkąta i środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie

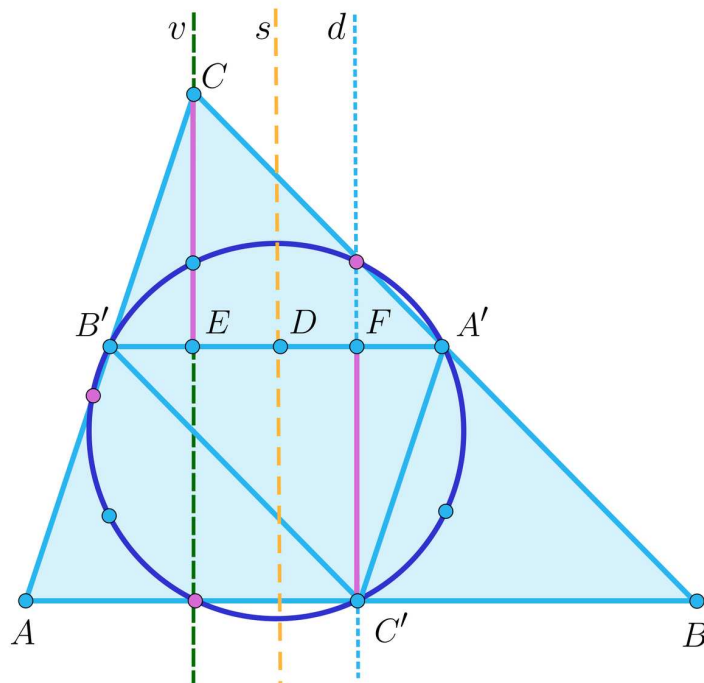
Rozważania tej części oprzemy na rysunku, w którym linie niebieskie zawierają wysokości, linie zielone są symetralnymi boków, a linie pomarańczowe są symetralnymi linii środkowych w trójkącie.



Własność: Własność symetralnych trójkąta środkowego

Symetralna s boku trójkąta środkowego w trójkącie ABC

1. jest równoległa do symetralnej v odpowiadającego boku trójkąta ABC oraz do prostej d zawierającej wysokość trójkąta ABC opuszczoną na ten odpowiadający bok,
2. leży między prostymi v i d ,
3. jest równoodległa od tych prostych.



Dowód

Z własności środków boków trójkąta środkowego, środek D odcinka $A'B'$ jest środkiem odcinka EF , więc $|DE| = |DF|$.

Prosta v jest prostopadła do boku AB , bo jest symetralną tego boku, prosta d też jest prostopadła do boku AB , bo zawiera wysokość opuszczoną na ten bok. Ostatecznie prosta s jest prostopadła do boku AB , bo jest prostopadła do odcinka $A'B'$, który jest równoległy do AB .

To dowodzi, że proste s , v , d są równoległe oraz odległość prostej s od każdej z prostych v i d , jest równa i wynosi $|DE|$. Stąd też prosta s leży między prostymi v i d .

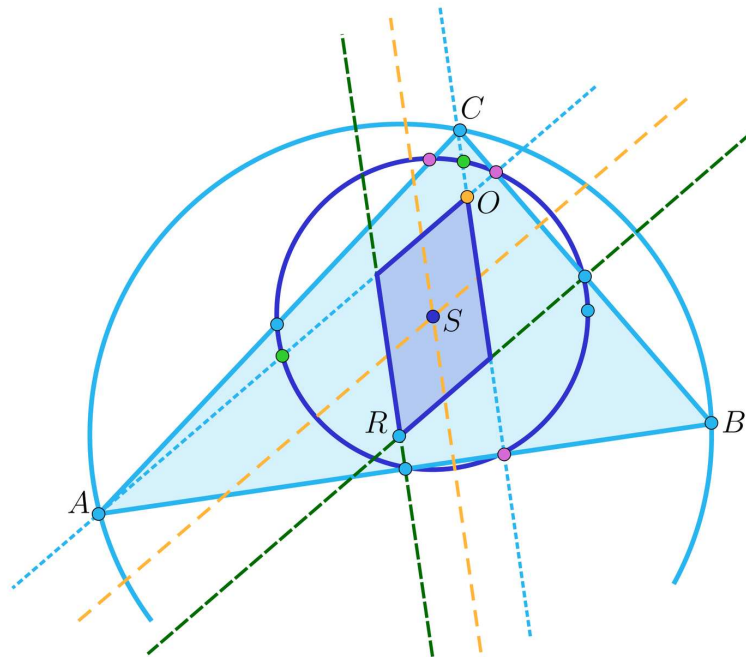
Analogicznie dla pozostałych boków [trójkąta środkowego](#).

Własność: Położenie środka okręgu dziewięciu punktów

Środek S okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta ABC jest środkiem odcinka Eulera RO , gdzie O jest ortocentrum tego trójkąta, a R jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód

Ortocentrum jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta. Środek okręgu opisanego jest punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta. Stąd i z równoległości odpowiednich prostych wynika, że zaznaczony na poniższym rysunku czworokąt jest równoległobokiem. Z własności symetralnych boków trójkąta środkowego wynika, że środek S okręgu dziewięciu punktów jako punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta środkowego, jest środkiem odcinka Eulera RO .



Słownik

ortocentrum

punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta

odcinek Eulera

odcinek RO , gdzie R jest środkiem okręgu opisanego a O jest ortocentrum tego trójkąta; jeśli trójkąt jest równoboczny to odcinek Eulera jest jednym punktem

okrąg dziewięciu punktów

okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta, spodki jego wysokości oraz środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami trójkąta

linia środkowa w trójkącie

odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta

trójkąt środkowy

trójkąt, którego boki są liniami środkowymi w trójkącie

środkowa trójkąta

odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku

środek ciężkości trójkąta

| punkt przecięcia jego środków

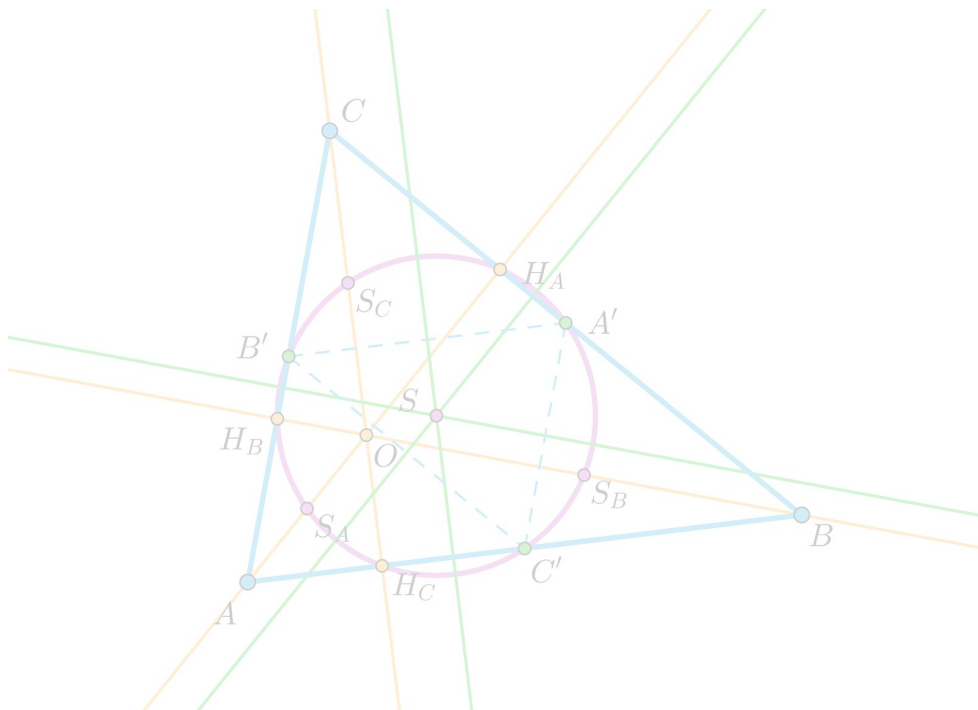
Aplet

Polecenie 1

Poruszaj punktami A , B , C , tak by uzyskać trójkąt: równoboczny, równoramienny, prostokątny, ostrokątny, rozwartokątny.

Dla każdego rodzaju trójkąta:

- obserwuj zachowanie odcinka Eulera i wzajemne położenie punktów O , R , S ,
- obserwuj zachowanie okręgu dziewięciu punktów i okręgu opisanego na trójkącie,
- obserwuj, położenie dziewięciu punktów i sytuacje, gdy niektóre z nich się pokrywają.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D64K8CnWm>

Polecenie 2

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Jeśli na okręgu dziewięciu punktów dla pewnego trójkąta spośród 9 charakterystycznych punktów widzimy tylko

3 punkty, to trójkąt ten może być:

☐

prostokątny

☐

nie ma takiego trójkąta

☐

równoramienny

☐

równoboczny

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

Jeżeli odcinek Eulera w pewnym trójkącie jest średnicą okręgu dziewięciu punktów, to ten trójkąt jest:

- ☐ prostokątny
- ☐ równoboczny
- ☐ o różnych kątach
- ☐ równoramienny, ale nie prostokątny

Ćwiczenie 2

Jeżeli odcinek Eulera w pewnym trójkącie jest jednym punktem, to ten trójkąt jest:

- ☐ o różnych bokach
- ☐ równoboczny
- ☐ równoramienny, ale nie prostokątny
- ☐ prostokątny

Ćwiczenie 3

Jeżeli jeden z końców odcinka Eulera w pewnym trójkącie leży na okręgu dziewięciu punktów i jednocześnie w środku okręgu opisanego na tym trójkącie, to ten trójkąt jest:

☐ równoramienny o kącie przy podstawie 30°

☐ prostokątny, ale nie równoramienny

☐ równoboczny

☐ równoramienny o kącie przy podstawie 45°

Ćwiczenie 4

Jeżeli ortocentrum pewnego trójkąta leży wewnątrz okręgu dziewięciu punktów w pewnym trójkącie, to ten trójkąt jest:

☐ równoramienny o kącie rozwartym

☐ równoboczny

☐ ostrokątny

☐ prostokątny

Ćwiczenie 5



Ocen prawdziwość zdań.

	Prawda	Fałsz
Okrąg dziewięciu punktów dla trójkąta jest okręgiem opisanym na trójkącie środkowym tego trójkąta.	☐	☐
Okrąg dziewięciu punktów dla trójkąta jest okręgiem wpisanym w trójkąt o wierzchołkach w spodkach wysokości tego trójkąta.	☐	☐
Promień okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta jest dwukrotnie mniejszy od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.	☐	☐
Pole okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta jest dwukrotnie mniejsze od pola okręgu opisanego na tym trójkącie.	☐	☐

Ćwiczenie 6



Uzupełnij luki.

1. Środek okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta leży w odcinka łączącego ortocentrum ze środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

jednej trzeciej

dwóch trzecich

połowie

2. Na okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta leżą .

środki odcinków łączących środek okręgu wpisanego w trójkąt z wierzchołkami trójkąta

środki odcinków łączących ortocentrum trójkąta z wierzchołkami trójkąta

środki odcinków łączących środek ciężkości trójkąta z wierzchołkami trójkąta

3. Do zbioru dziewięciu charakterystycznych punktów dla okręgu dziewięciu punktów dla trójkąta **nie należą** .

środki boków trójkąta

spodki wysokości trójkąta

punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z jego bokami

Ćwiczenie 7



Dany jest trójkąt o bokach 5, 5, 8. Wyznacz długość promienia okręgu dziewięciu punktów.

Ćwiczenie 8



Ortocentrum trójkąta ABC leży w odległości 4 od wierzchołka C i w odległości 13 od spodka wysokości opuszczonej na bok AB . Odległość spodka wysokości opuszczonej na bok AB od środka tego boku wynosi 4. Wyznacz długość promienia okręgu dziewięciu punktów.

Ćwiczenie 9



W trójkącie ABC środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest odległy od środka ciężkości tego trójkąta o 1. Jaka jest odległość środka okręgu dziewięciu punktów od ortocentrum tego trójkąta?

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg dziewięciu punktów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje punkty leżące na okręgu dziewięciu punktów, wyznacza ortocentrum;
- korzysta z własności odcinka Eulera w celu wyznaczenia środka okręgu dziewięciu punktów oraz wyznacza środek okręgu opisanego na trójkącie;
- znajduje zależność między rodzajem trójkąta i punktami na okręgu dziewięciu punktów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm;
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka;
- interaktywna aplikacja;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu lekcji.
2. Wyznaczenie celów i kryteriów sukcesu.
3. Dyskusja jakie punkty charakterystyczne można wyznaczyć w trójkącie.
Przypomnienie, że trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają jednoznacznie okrąg.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel omawia konstrukcję ortocentrum i środka okręgu opisanego na trójkącie oraz treść i przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel przedstawia uczniom Aplet. Prosi uczniów o wykonanie poleceń w parach.
3. Uczniowie sprawdzają poprawność wykonanych poleceń.
4. Uczniowie wykonują samodzielnie wybrane ćwiczenia spośród 1 – 5 z sekcji „Sprawdź się”, następnie rozwiązania są omawiane.

5. Wybrani uczniowie wykonują na tablicy ćwiczenia 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”

Faza podsumowująca:

1. Sprawdzenie nabytych umiejętności i wiedzy podczas rozwiązywania wskazanych ćwiczeń w sekcji „Sprawdź się”.
2. Podsumowanie lekcji, wskazanie mocnych i słabych stron pracy uczniów.

Praca domowa:

- Przy pomocy cyrkla i linijki wykonanie konstrukcji okręgu dziewięciu punktów i zaznaczenie na nim 9 charakterystycznych punktów.

Materiały pomocnicze:

[Okrąg wpisany w trójkąt](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać Aplet

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.