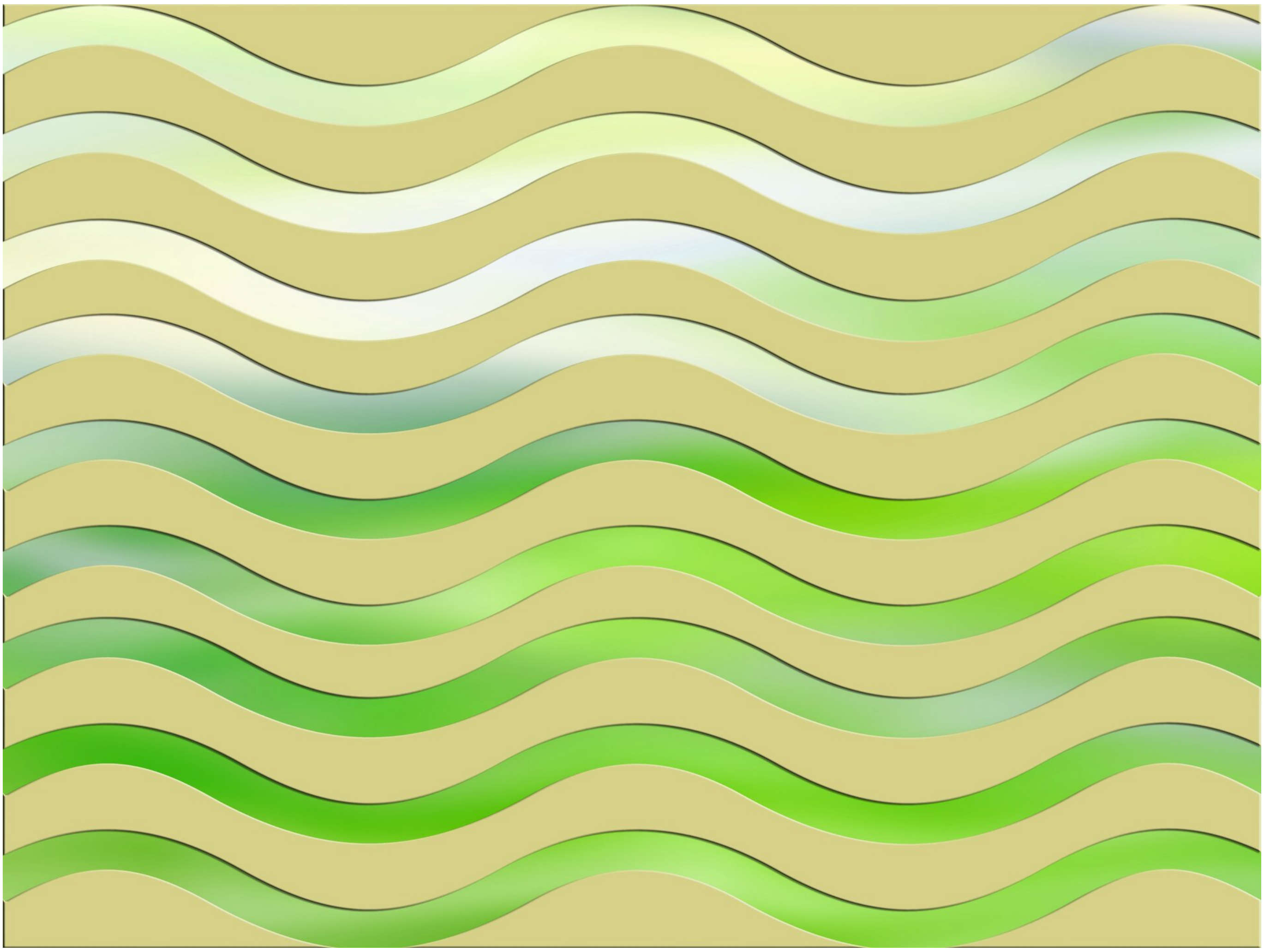
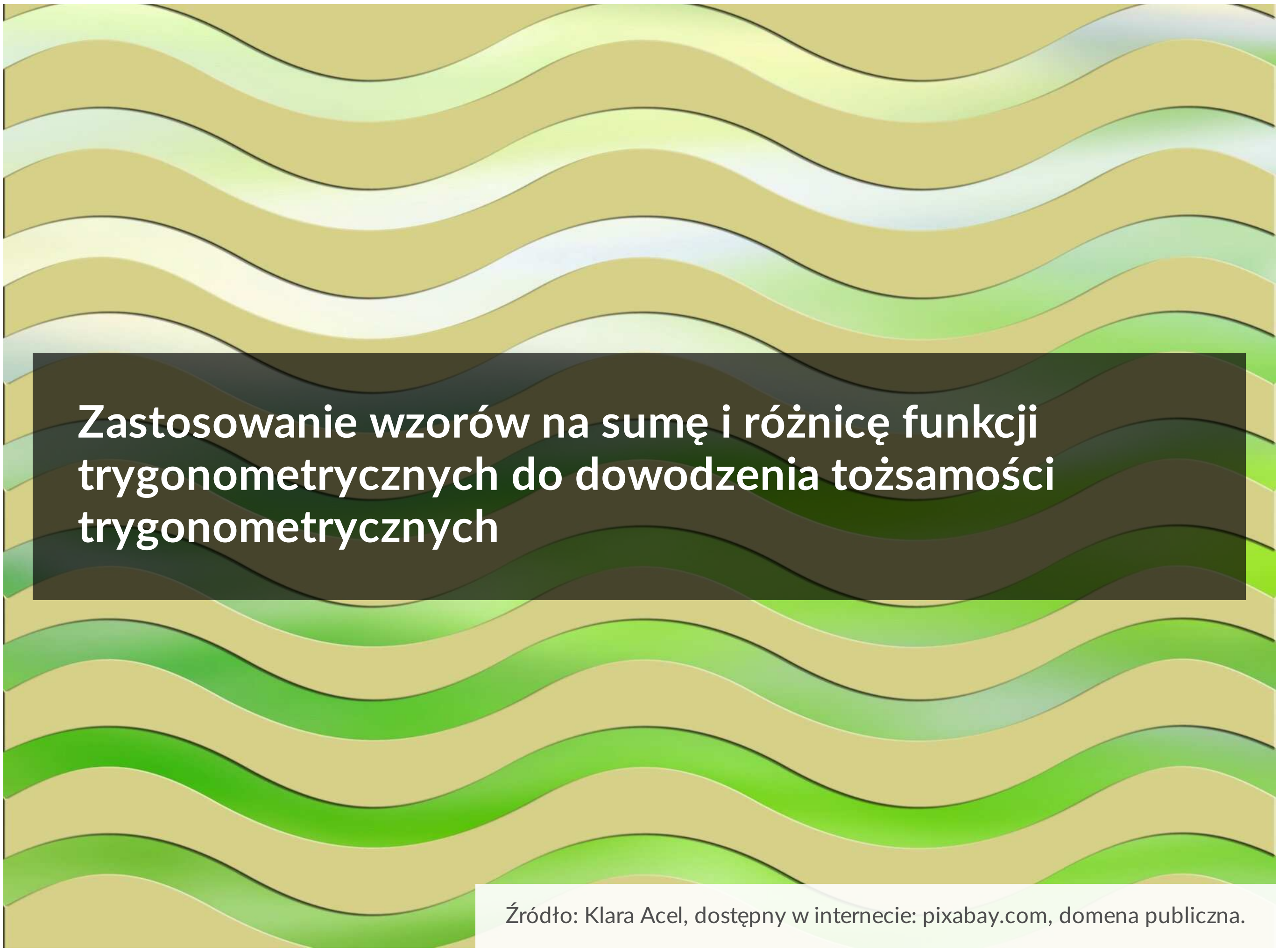


Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych



Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych

Źródło: Klara Acel, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znasz już wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych. W tym materiale skupimy się na wykorzystaniu poznanych wzorów do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych. Będziemy także sprawdzać, kiedy równości nie są tożsamościami.

Twoje cele

- Nauczysz się stosować wzory na sumy oraz różnice sinusów, cosinusów, tangensów do dowodzenia tożsamości.
- Nauczysz się stosować wzory na sumy oraz różnice sinusów, cosinusów, tangensów do dowodzenia, że równość nie jest tożsamością.

Przeczytaj

W tym materiale przedstawimy kilka typów tożsamości trygonometrycznych.
W przedstawionych przykładach będziemy przekształcać jedną ze stron równości, zwykle tę bardziej skomplikowaną, tak długo, aż otrzymamy drugą stronę równości.

Przykład 1

Uzasadnimy, że równość $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = \frac{4 \sin x \cos 2x}{\cos 3x}$ jest tożsamością trygonometryczną.

Rozwiązanie

Najpierw zapiszmy założenia: $\cos x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$.

Skorzystajmy ze wzoru na sumę tangensów i zapiszmy w nowej postaci lewą stronę równości:

$$\mathrm{L} = \mathrm{tg}3x + \mathrm{tg}x = \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x}$$

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego argumentu $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$ zapisujemy lewą stronę w nastepującej postaci:

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} = \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 3x}$$

Po skróceniu $\cos x$ otrzymujemy prawą stronę równości:

$$\frac{4 \sin x \cos 2x}{\cos 3x} = \mathrm{P}$$

A to oznacza, że równość jest tożsamością.

Przykład 2

Udowodnimy tożsamość: $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \mathrm{tg}\ x$.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia: $\cos 3x + \cos x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

Zapiszemy licznik lewej strony równości za pomocą wzoru na różnicę sinusów $\sin 3x - \sin x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$ oraz mianownik korzystając ze wzoru na sumę cosinusów $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$.

Wówczas możemy przekształcić lewą stronę równości do postaci:

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos 2x}{2 \cos 2x \cdot \cos x}.$$

Po skróceniu wspólnego czynnika w liczniku i mianowniku otrzymujemy prawą stronę:

$\frac{2\sin x\cdot\cos 2x}{2\cos 2x\cdot\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\text{tg }x$.

A to oznacza, że równość jest tożsamością.

Przykład 3

Uzasadnimy, że równość: $\frac{\sin 2x+2\sin x\cdot\cos 2x}{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\text{tg }x$ jest tożsamością.

Rozwiązanie

Jak zawsze, zaczniemy od wypisania założeń: $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x\neq 0$, $\cos x\neq 0$.

Aby przekształcić lewą stronę równości, skorzystamy ze wzorów na funkcje podwojonego argumentu: $\sin 2x=2\sin x\cos x$ i $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ oraz zastosujemy wzór na sumę cosinusów: $\cos x+\cos 3x=2\cos x\cos 2x$.

Wówczas lewą stronę możemy zapisać następująco:

$\text{L}=\frac{\sin 2x+2\sin x\cdot\cos 2x}{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x+2\sin x\cdot\cos 2x}{1+2\cos^2 x-1+2\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x+2\sin x\cdot\cos 2x}{2\cos^2 x+2\cos x\cdot\cos 2x}$

Po wyłączeniu z licznika przed nawias $2\sin x$ i wyłączeniu z mianownika przed nawias $2\sin x$, otrzymujemy prawą stronę równości:

$\frac{2\sin x\cdot(\cos x+\cos 2x)}{2\cos x\cdot(\cos x+\cos 2x)}=\text{tg }x=\text{P}$.

A to oznacza, że równość jest tożsamością.

W poniższym przykładzie najpierw odpowiednio uporządkujemy funkcje trygonometryczne, aby potem je w odpowiedni sposób pododawać. Zwracamy uwagę na to, że chodzi o to, by powstały wyrażenia podobne, które będzie można wyłączyć przed nawias i skrócić.

Przykład 4

Uzasadnimy, że równość $\frac{\sin 6x-\sin 7x-\sin 8x+\sin 9x}{\cos 6x-\cos 7x-\cos 8x+\cos 9x}=\text{tg }\frac{15x}{2}$ jest tożsamością.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia: $\cos 6x-\cos 7x-\cos 8x+\cos 9x\neq 0$, $\cos x\neq 0$.

Uporządkujemy w taki sposób funkcje w liczniku i mianowniku, aby można je było odpowiednio dodać:

$\text{L}=\frac{\sin 6x-\sin 7x-\sin 8x+\sin 9x}{\cos 6x-\cos 7x-\cos 8x+\cos 9x}=\frac{\sin 6x+\sin 9x-(\sin 7x+\sin 8x)}{\cos 6x+\cos 9x-(\cos 7x+\cos 8x)}$

Korzystając ze wzoru na sinus sumy zapisujemy:

$\sin 6x + \sin 9x = 2\sin \frac{6x+9x}{2} \cdot \cos \frac{6x-9x}{2}$

$\sin 7x + \sin 8x = 2\sin \frac{7x+8x}{2} \cdot \cos \frac{7x-8x}{2}$

Korzystając ze wzoru na cosinus sumy zapisujemy:

$\cos 6x + \cos 9x = 2\cos \frac{6x+9x}{2} \cdot \cos \frac{6x-9x}{2}$

$\cos 7x + \cos 8x = 2\cos \frac{7x+8x}{2} \cdot \cos \frac{7x-8x}{2}$

Wówczas lewa strona przyjmuje postać:

$\mathrm{L} = \frac{2\sin \frac{6x+9x}{2} \cdot \cos \frac{6x-9x}{2} - 2\sin \frac{7x+8x}{2} \cdot \cos \frac{7x-8x}{2}}{2\cos \frac{6x+9x}{2} \cdot \cos \frac{6x-9x}{2} - 2\cos \frac{7x+8x}{2} \cdot \cos \frac{7x-8x}{2}}$

Po wyłączeniu wspólnych czynników przed nawias w liczniku i mianowniku otrzymujemy prawą stronę:

$\mathrm{L} = \frac{\sin \frac{15x}{2} \cdot \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{15x}{2} \cdot \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)} = \mathrm{tg}\, \frac{15x}{2} = \mathrm{P}$

A to oznacza, że równość jest tożsamością.

Słownik

wzory na sumę oraz różnicę sinusów

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

wzory na sumę oraz różnicę cosinusów

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

wzory na sumę oraz różnicę tangensów

$$\mathrm{tg}\, \alpha + \mathrm{tg}\, \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha - \mathrm{tg}\, \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spełniających warunki: $\cos \alpha \neq 0$ i $\cos \beta \neq 0$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z infografiką i przeanalizuj metody w niej wykorzystane do dowodu tożsamości.

Polecenie 2

Udowodnij, że równość $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ jest tożsamością.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że równość

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

jest tożsamością.

Ćwiczenie 8

Udowodnij, że równość

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg} 4\alpha$$

jest tożsamością.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dowodzi, że równość jest tożsamością trygonometryczną stosując wzory na sumy oraz różnice sinusów, cosinusów, tangensów,
- dowodzi, że równość nie jest tożsamością trygonometryczną stosując wzory na sumy oraz różnice sinusów, cosinusów, tangensów,

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
3. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych”.