



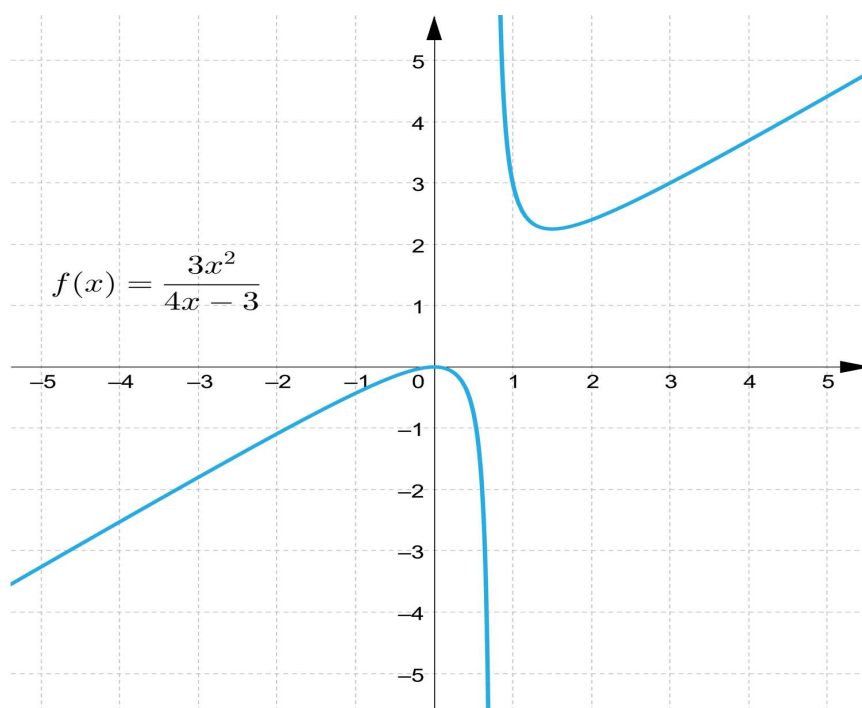
Funkcja wymierna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Funkcja wymierna

Źródło: dostępny w internecie: needpix.com, domena publiczna.

Co łączy poniższe wykresy z wykresem funkcji liniowej, kwadratowej, czy - szerzej - wielomianowej? Wszystkie są wykresami funkcji wymiernych. W tym materiale omówimy funkcje wymierne.



Twoje cele

- Rozpoznasz funkcje wymierne.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji wymiernej.
- Podasz warunek równości funkcji wymiernych.

Przeczytaj

Definicja: funkcja wymierna

Funkcję $f(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$, $W_2(x)$ są wielomianami i $W_2(x) \neq 0$, nazywamy **funkcją wymierną**.

Definicja: dziedzina funkcji wymiernej

Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem tych liczb x , które są **pierwiastkami wielomianu** $W_2(x)$.

Ważne!

Jeśli stopień wielomianu $W_2(x)$ wynosi zero, czyli $W_2(x)$ jest stałą różną od zera, to funkcja wymierna jest wielomianem.

Np. funkcję $f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 12}{3}$ można zapisać w postaci:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 - x^2 + 4.$$

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych, $D_f = \mathbb{R}$.

Ważne!

Każdy wielomian jest funkcją wymierną, ponieważ można go przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

Przykład 1

Wyznamy dziedzinę funkcji wymiernej $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-9}$.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć dziedzinę funkcji f należy wyznaczyć pierwiastki wielomianu znajdującego się w mianowniku ułamka opisującego funkcję f .

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -3,$$

$$\text{czyli } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}.$$

Przykład 2

Wyznamy dziedzinę funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2+x+2}$.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć dziedzinę funkcji f należy wyznaczyć pierwiastki wielomianu znajdującego się w mianowniku ułamka opisującego funkcję f .

$$x^2 + x + 2 = 0$$

Obliczamy $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$, $\Delta < 0$, czyli mianownik nigdy nie przyjmuje wartości równej zero, a zatem $D_f = \mathbb{R}$.

Przykład 3

Wyznamy wartość parametru m , dla którego dziedziną funkcji wymiernej $f(x) = \frac{2x^2-3x-6}{x^2+mx+m}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Aby dziedziną funkcji wymiernej był zbiór $\mathbb{R}$, to mianownik nie może mieć miejsc zerowych. W naszym przypadku mianownik jest trójmianem kwadratowym, czyli nie będzie miał pierwiastków, jeśli $\Delta < 0$. Obliczamy Δ :

$$\Delta = m^2 - 4m.$$

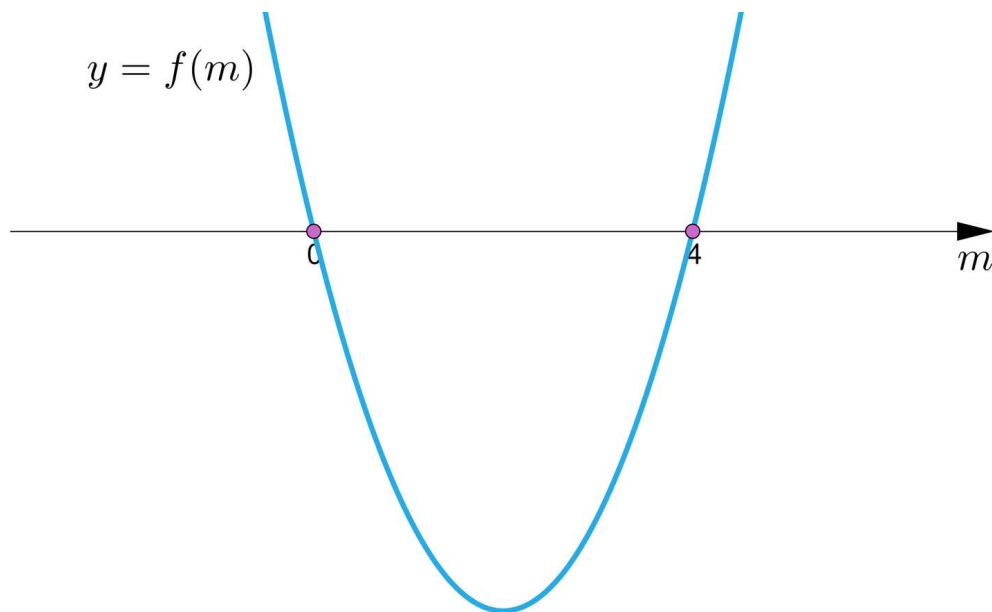
Następnie rozwiązujemy nierówność:

$$m^2 - 4m < 0$$

$$m(m - 4) < 0$$

Wyznamy miejsca zerowe funkcji $f(m) = m(m - 4)$ i naszkicujemy jej wykres:

$$m = 0 \vee m = 4.$$



Odpowiedź: $m \in (0; 4)$.

Definicja: równość funkcji

Funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne dziedziny oraz dla każdego argumentu należącego do ich wspólnej dziedziny wartości obu funkcji są jednakowe.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy funkcje $f(x) = \frac{x^4+x^2}{x^2}$ oraz $g(x) = x^2 + 1$ są równe.

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedziny podanych funkcji: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$, czyli funkcje nie są równe ponieważ $D_f \neq D_g$.

Przykład 5

Wyznamy a i b tak, aby funkcje $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-4}$ oraz $g(x) = \frac{4x-10}{x^2-6x+8}$ były równe.

Rozwiązanie

Wyznamy dziedziny podanych funkcji: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$ oraz $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$, czyli warunek dotyczący dziedzin funkcji jest spełniony.

Przekształcamy wzór funkcji f :

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-4} = \frac{ax-4a+bx-2b}{(x-2)(x-4)} = \frac{x(a+b)-4a-2b}{x^2-6x+8}.$$

Zauważamy, że mianowniki obu ułamków są równe, a liczniki będą równe, gdy:

$$a + b = 4 \text{ oraz } -4a - 2b = -10.$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -4a - 2b = -10 \end{cases}$$

Odpowiedź: $a = 1, b = 3$.

Przykład 6

Wyznamy pozostałe miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 - 16x + 32}{2 - x}$ wiedząc, że jednym z nich jest liczba (-4) .

Rozwiązanie

Wyznamy a korzystając z informacji, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba (-4) .

$$f(-4) = 0$$

$$\frac{(-4)^3 + a(-4)^2 - 16(-4) + 32}{2 - (-4)} = 0$$

$$\frac{-64 + 16a + 64 + 32}{6} = 0$$

$$a = -2$$

Zatem wzór funkcji ma postać $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{2 - x}$.

Aby wyznaczyć pozostałe miejsca zerowe, należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{2 - x} = 0$$

Wyznamy dziedzinę: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$x^3 - 2x^2 - 16x + 32 = 0$$

$$x^2(x - 2) - 16(x - 2) = 0$$

$$(x^2 - 16)(x - 2) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -4 \vee x = 2$$

Liczba $x = 2$ nie należy do dziedziny funkcji, zatem pozostałym miejscem zerowym jest liczba 4.

Słownik

wielomian

wyrażenie algebraiczne będące sumą [jednomianów](#)

jednomian

wyrażenie algebraiczne będące literą lub liczbą lub iloczynem liter i liczb

pierwiastek wielomianu

argument, dla którego wartość wielomianu wynosi zero

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z zadaniem i jego rozwiązaniem przedstawionym w galerii zdjęć interaktywnych.

Polecenie 2

Wskaż wszystkie wartości parametru m , $m \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{mx^2+mx+2}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

☐ $m \in (-8, 0)$

☐ $m \in (-8; 0)$

☐ $m \in \langle 0, 8 \rangle$

☐ $m \in (0; 8)$

Polecenie 3

Udowodnij, że dla każdego $m \in \mathbb{R}$ dziedziną funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^4+2x^2}{x^2+x+m^2+1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Które z poniższych funkcji są wymierne? Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ $f(x) = \frac{|x|}{x+7}$

☐ $f(x) = -x^5 + 3x^3 - x$

☐ $f(x) = \frac{-2x^8 + \sqrt{x}}{x^2 - 4}$

☐ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

☐ $f(x) = \frac{x^7 + 7}{x + \sqrt{7}}$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary funkcję wymierną z jej dziedziną.

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 7x - 3}{2x^2 + 8}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 13x^3 + 7x - 3}{x^2 - 2x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$f(x) = \frac{-2x^8 + 3}{x^2 - 4}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{-7x^5 - x^4 - 2x^3 + 7x + 5}{x^4 + 2x^3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$$

Ćwiczenie 3



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{-3x^5 + x^2 - 7x + 5}{-x^5 + 8x^3 + 9x}$ jest zbiór:

☐ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$

☐ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$

☐ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1; 0; 1; 3\}$

☐ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 3\}$

Ćwiczenie 4



Sprawdź, czy funkcje f i g są równe, jeśli $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ oraz $g(x) = x^2 + 1$.

Ćwiczenie 5



Sprawdź, czy funkcje $f(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{x^2 + 3}$ oraz $g(x) = x^2 + 3$ są równe.

Ćwiczenie 6



Jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 - x + 4}{2x + 2}$ jest liczba 4. Wyznacz pozostałe miejsca zerowe, a następnie zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $x = -1 \vee x = 1$

☐ $x = 1$

☐ $x = -1$

Ćwiczenie 7



Wyznacz największą całkowitą wartość parametru m , dla którego dziedziną funkcji $f(x) = \frac{3x - 13}{x^2 + 2mx + 3m}$ jest zbiór $\mathbb{R}$. Otrzymałą wartość wpisz w wyznaczone pole.

$m =$

Ćwiczenie 8



Wyznacz a i b tak, aby funkcje $f(x) = \frac{a+1}{x+2} + \frac{b-2}{x-5}$ oraz $g(x) = \frac{4x-20}{x^2-3x-10}$ były równe.

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcja wymierna.

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

13. Uczeń posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje funkcje wymierne;
- wyznacza dziedzinę funkcji wymiernej;
- sprawdza równość funkcji wymiernych;
- wykorzystuje własności funkcji wymiernych w zadaniach;

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego,

- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela;

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca indywidualna

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- tablica interaktywna/tablica, pisaki/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się z modulem Wprowadzenie.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup. Każda grupa ma zapoznać się z jednym przykładem z sekcji „Przeczytaj”, a następnie przedstawić przykład pozostałym uczniom.
2. Nauczyciel w razie potrzeby pomaga uczniom w wyjaśnianiu zagadnienia.
3. Następnie uczniowie pracują indywidualnie – zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych i wykonują wskazane polecenia oraz rozwiązują ćw. 1 – 5 w sekcji Sprawdź się. W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela,
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia 6 – 8 zawarte w module Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- [Dziedzina funkcji](#)
- [Własności funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Galerię można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości dotyczących rozwiązywania nierówności kwadratowych lub wyznaczania dziedziny funkcji wymiernej.