



Modele przegródkowe w kombinatoryce

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym materiale pokażemy zastosowania tzw. **modelu przegródkowego** w zadaniach dotyczących zbiorów, których elementami są liczby całkowite o ustalonej sumie. Będziemy np. obliczali, ile jest liczb całkowitych, których suma cyfr spełnia warunek dający się zapisać w postaci równania lub nierówności.

Przed rozwiązywaniem tych zadań warto przypomnieć sobie własności kombinacji oraz twierdzenie o liczbie wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego.

Omawiane zagadnienie trudno spotkać w szkolnych podręcznikach. Jest ono jednak nietrudnym i ciekawym uzupełnieniem zastosowania własności kombinacji i nie wymaga stosowania skomplikowanych narzędzi.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się twierdzeniem o liczbie wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego.
- Dzięki analizie własności cyfr liczby naturalnej zapiszesz równania oraz nierówności opisujące warunki dotyczące sumy cyfr tej liczby.
- Znajomość modelu przegródkowego pozwoli Ci obliczyć, ile jest liczb opisanych powyższymi warunkami.

- Zapiszesz równania oraz nierówności opisujące warunki dotyczące sumy liczb oczek otrzymanych w wyniku wielokrotnego rzutu kostką sześcienną do gry.
- Znajomość modelu przegródkowego pozwoli Ci obliczyć, ile jest wszystkich wyników opisanych powyższymi warunkami.

Przeczytaj

W poprzednich materiałach z kombinatoryki pojawiały się przykłady i zadania dotyczące np. liczb naturalnych o ustalonej sumie cyfr. Proponowane rozwiązania zadań tego typu oparte były na rozpatrywaniu przypadków (z zasady: rozłącznych) i stosowaniu podstawowych reguł kombinatorycznych: [reguły dodawania](#) oraz [reguły mnożenia](#).

Pokażemy, że w pewnych przykładach postawiony w zadaniu problem możemy zinterpretować za pomocą tzw. **modelu przegródkowego**.

W pierwszym przykładzie omówimy konstrukcję tego modelu w szczególnym przypadku: liczb o sumie cyfr równej 6.

Przykład 1

Rozpatrujemy wszystkie 9-cyfrowe liczby naturalne o sumie cyfr równej 6. Ile jest wśród nich takich liczb, które w zapisie dziesiętnym mają wyłącznie cyfry parzyste?

Rozwiązanie

Rozpatrzmy równanie

$$2(x_1 + 1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 = 6,$$

w którym każda z liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Wówczas:

- liczba $2(x_1 + 1)$ spełnia warunek $2 \leq 2(x_1 + 1) \leq 6$,
- każda z liczb $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ spełnia warunek $0 \leq 2x_i \leq 4$, gdzie $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Wtedy liczba, której kolejnymi cyframi są $2(x_1 + 1), 2x_2, 2x_3, 2x_4, 2x_5, 2x_6, 2x_7, 2x_8, 2x_9$ jest 9-cyfrowa i spełnia warunki zadania.

Oznacza to, że każdej rozpatrywanej liczbie, w której zapisie występują jedynie cyfry parzyste można wzajemnie jednoznacznie przypisać 9-elementowy ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ liczb nieujemnych.

Równanie, które spełniają te liczby

$$2(x_1 + 1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 = 6$$

przekształcamy jak poniżej

$$(x_1 + 1) + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 3.$$

Stąd otrzymujemy, że wszystkich rozpatrywanych liczb jest tyle, ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 2$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$.

Każde poszczególne rozwiązanie powyższego równania, a więc jednocześnie: każdą liczbę 9-cyfrową o cyfrach parzystych i sumie cyfr równej 6, możemy przedstawić jako rozmieszczenie 2 nierozróżnialnych obiektów w 9 ponumerowanych pudełkach.

Takie rozmieszczenie zilustrujemy graficznie, używając przegródek '|' do pokazania zawartości kolejnych pudełek, w których rozmieszczamy dwa obiekty przedstawione za pomocą symbolu kropki '•'.

Np. rozwiązanie, w którym

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0$$

(jest to przedstawienie liczby 202020000) ma następującą ilustrację graficzną

| | | • | | • | | | | ,

natomiast ilustracja

| • • | | | | | | | |

przedstawia rozwiązanie równania, w którym

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0 \text{ (jest to przedstawienie liczby 600000000).}$$

Zauważmy, że dla jednoznacznego przedstawienia rozdziału 2 obiektów '•' w 9 ponumerowanych pudełkach można pominąć obie skrajne przegródki.

Wtedy ilustrację rozwiązania, w którym

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0$$

przedstawimy jako 10-elementowy ciąg

|| • || • |||| ,

a 10-elementowy ciąg

• • |||||

przedstawia rozwiązanie równania, w którym

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0.$$

Rozpatrzmy więc dowolny 10-elementowy ciąg, składający się z 8 przegródek (|) oraz dwóch kropek (•).

Przyjmujemy oznaczenia:

x_1 to liczba kropek (•) ustawionych przed pierwszą (patrząc od lewej) przegródką,

x_2 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 1 i przed przegródką numer 2,

x_3 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 2 i przed przegródką numer 3,

x_4 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 3 i przed przegródką numer 4,

x_5 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 4 i przed przegródką numer 5,

x_6 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 5 i przed przegródką numer 6,

x_7 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 6 i przed przegródką numer 7,

x_8 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 7 i przed przegródką numer 8, x_9 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 8.

Wtedy każdemu rozmieszczeniu 10 elementów ciągu składającego się z 8 przegródek i 2 kropek odpowiada wzajemnie jednoznacznie ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ nieujemnych liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 2.$$

Ponieważ wszystkich 10-elementowych ciągów składającego się z 8 przegródek i 2 kropek jest tyle, ile jest 8-elementowych kombinacji zbioru 10-elementowego, czyli $\binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, więc dokładnie tyle jest wszystkich 9-cyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 6.

Przykład 2

Obliczymy, ile jest wszystkich wyników dziesięciokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 15.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy równanie

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \dots + (x_{10} + 1) = 15,$$

w którym każda z liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Po przekształceniu tego równania do postaci

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 5$$

stwierdzamy, że każda z liczb $x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1, \dots, x_{10} + 1$ może przyjmować wyłącznie wartości ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zatem każdemu wynikowi dziesięciokrotnego rzutu kostką spełniającemu warunki zadania można wzajemnie jednoznacznie przypisać 10-elementowy ciąg

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$ nieujemnych liczb całkowitych.

Oznacza to, że wszystkich wyników rozpatrywanego rzutu kostką jest tyle, ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 5$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$.

Każde poszczególne rozwiązanie powyższego równania możemy przedstawić jako rozmieszczenie 5 nierozróżnialnych obiektów w 10 ponumerowanych pudełkach, co można zilustrować graficznie, używając przegródek '|' do pokazania zawartości kolejnych pudełek, w których rozmieszczamy pięć obiektów przedstawionych za pomocą symbolu kropki '•'.

Rozumując podobnie jak w poprzednim przykładzie zauważamy, że do jednoznacznego przedstawienia rozdziału 5 obiektów '•' w 10 ponumerowanych pudełkach wystarczy użyć 9 przegródek.

Wtedy ilustrację rozwiązania, w którym

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 2, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 1$ (w ten sposób opisaliśmy 10-krotny rzut kostką, w którym kolejne uzyskane liczby oczek to 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 2) przedstawimy jako 14-elementowy ciąg

||| • || • • || • || •,

a 14-elementowy ciąg

• • • • |||| • ||||

przedstawia rozwiązanie równania, w którym

$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 0, x_{10} = 0$ (w ten sposób opisaliśmy 10-krotny rzut kostką, w którym kolejne uzyskane liczby oczek to 5, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1).

Rozpatrzmy więc dowolny 14-elementowy ciąg, składający się z 9 przegródek (|) oraz 5 elementów (•).

Przyjmujemy oznaczenia:

x_1 to liczba kropek (•) ustawionych przed pierwszą (patrząc od lewej) przegródką,
 x_2 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 1 i przed przegródką numer 2,
 x_3 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 2 i przed przegródką numer 3,
 x_4 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 3 i przed przegródką numer 4,
 x_5 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 4 i przed przegródką numer 5,
 x_6 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 5 i przed przegródką numer 6,
 x_7 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 6 i przed przegródką numer 7,
 x_8 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 7 i przed przegródką numer 8,
 x_9 to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 8 i przed przegródką numer 9,
 x_{10} to liczba kropek ustawionych za przegródką numer 9.

Wtedy każdemu rozmieszczeniu 14 elementów ciągu składającego się z 9 przegródek i 5 kropek odpowiada wzajemnie jednoznacznie ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$ nieujemnych liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 5.$$

Ponieważ wszystkich 14-elementowych ciągów składających się z 9 przegródek i 5 kropek jest tyle, ile jest 9-elementowych kombinacji zbioru $9 + 5 = 14$ -elementowego,

czyli $\binom{14}{9} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} = 2002$, więc dokładnie tyle jest wszystkich wyników

dziesięciokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 15.

Zauważmy, że w obu powyższych przykładach postawiony problem sprowadziliśmy do ustalenia, ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie n oraz k to ustalone dodatnie liczby całkowite.

Rozumując analogicznie jak w powyższych dwóch przykładach pokażemy, że rozwiązań tego równania jest $\binom{k+n-1}{k}$.

Rozpatrzmy w tym celu ciąg, który ma $k+n-1$ elementów i składający się z $n-1$ przegródek (oznaczymy każdą z nich symbolem '|') oraz k elementów oznaczonych symbolem kropki '•'.

Oznaczmy przez:

x_1 – liczbę kropek (•) ustawionych przed pierwszą (patrząc od lewej) przegródką,

x_m – liczbę kropek ustawionych za przegródką numer $m-1$ i przed przegródką numer m , dla $m = 2, 3, \dots, n-1$,

x_n – liczbę kropek ustawionych za przegródką numer n .

Zauważmy, że każdemu rozmieszczeniu wszystkich $k+n-1$ elementów tego ciągu składającego się z $n-1$ przegródek '|' i k kropek • odpowiada wzajemnie jednoznacznie ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nieujemnych liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k.$$

Ponieważ wszystkich $(k+n-1)$ -elementowych ciągów składającego się z $n-1$ przegródek i k kropek jest tyle, ile jest k -elementowych kombinacji zbioru $(k+n-1)$ -elementowego, czyli $\binom{k+n-1}{k}$, więc dokładnie tyle jest wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie n oraz k to ustalone dodatnie liczby całkowite.

Twierdzenie: o liczbie rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

Liczba wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie n oraz k to ustalone dodatnie liczby całkowite, jest równa

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Przykład 3

a) Obliczymy, ile jest wszystkich 20-cyfrowych liczb naturalnych o wszystkich cyfrach nieparzystych, których suma cyfr jest równa 28.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy równanie

$(2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) + \dots + (2x_{20} + 1) = 28$, w którym każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Przekształcamy to równanie do postaci

$$2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_{20} = 8,$$

skąd otrzymujemy

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 4.$$

Oznacza to, że $0 \leq x_i \leq 4$ dla $i = 1, 2, \dots, 20$, a więc każda z liczb

$2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_{20} + 1$ jest dodatnią liczbą naturalną, która jest nieparzysta i nie jest większa od 9.

Wynika stąd, że ogółem 20-cyfrowych liczb naturalnych o wszystkich cyfrach nieparzystych i sumie cyfr równej 28 jest dokładnie tyle, ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 4$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_{20}$.

Ponieważ wszystkich rozwiązań powyższego równania jest

$$\binom{4 + 20 - 1}{4} = \binom{23}{4} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4!} = 8855,$$

więc ogółem 20-cyfrowych liczb naturalnych o wszystkich cyfrach nieparzystych i sumie cyfr równej 28 jest 8855.

b) Obliczymy, ile jest wszystkich 50-cyfrowych liczb naturalnych o wszystkich cyfrach nieparzystych i sumie cyfr równej 123.

Rozwiązanie

Zauważmy, że suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, zatem suma cyfr liczby 50-cyfrowej której wszystkie cyfry są nieparzyste da się zapisać jako suma 25 liczb parzystych – aby to zauważyć wystarczy np. łączyć kolejne cyfry w pary.

Oznacza to, że suma cyfr dowolnej liczby 50-cyfrowej o wszystkich cyfrach nieparzystych jest parzysta, a więc nie może być równa 123. Zatem nie ma liczb, które spełniałyby podane w zadaniu warunki.

Przykład 4

Obliczymy, ile jest rozwiązań równania

$$a + b + c = 15$$

w liczbach całkowitych a, b, c spełniających warunki $a \geq -2, b \geq 3, c \geq 8$.

Rozwiązanie

Podstawmy $a = x_1 - 2$, $b = x_2 + 3$, $c = x_3 + 8$ i rozpatrzmy równanie

$$(x_1 - 2) + (x_2 + 3) + (x_3 + 8) = 15,$$

w którym każda z liczb x_1, x_2, x_3 jest nieujemną liczbą całkowitą.

Przekształcamy to równanie do postaci

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Ponieważ wszystkich rozwiązań powyższego równania w nieujemnych liczbach

$$\text{całkowitych } x_1, x_2, x_3 \text{ jest } \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28,$$

więc wszystkich rozwiązań równania

$$a + b + c = 15$$

w liczbach całkowitych a, b, c spełniających warunki $a \geq -2, b \geq 3, c \geq 8$ jest także 28.

Przykład 5

a) W pudełku znajduje się 5 kartek ponumerowanych od 1 do 5. Z tego pudełka losujemy 8 razy po jednej kartce, przy czym po każdym losowaniu wrzucamy wylosowaną kartkę z powrotem do pudełka.

Obliczymy, ile jest wszystkich wyników losowania, w których suma wszystkich liczb na wylosowanych z tego pudełka kartkach nie przekracza 12.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy nierówność

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_8 + 1) \leq 12,$$

w której każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Po przekształceniu tej nierówności do postaci

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 \leq 4$$

stwierdzamy, że każda z liczb x_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, 8$, spełnia warunek $1 \leq x_i + 1 \leq 5$.

Zatem każdemu spełniającemu warunki zadania wynikowi ośmiokrotnego losowania kartek z rozpatrywanego pudełka można wzajemnie jednoznacznie przypisać ośmioelementowy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ liczb nieujemnych spełniających powyższą nierówność.

Ponadto liczba $4 - (x_1 + x_2 + \dots + x_8)$ także jest nieujemna - oznaczmy ją przez x_9 .

Wtedy $x_9 = 4 - (x_1 + x_2 + \dots + x_8)$, skąd otrzymujemy równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 + x_9 = 4$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_9$, gdzie $1 \leq x_i + 1 \leq 5$ dla $i = 1, 2, \dots, 8$.

Ponieważ wszystkich rozwiązań tego równania jest

$$\binom{4+9-1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} = 495, \text{ więc ogółem jest 495 wyników losowania}$$

kartek z rozpatrywanego pudełka, w których suma wszystkich liczb na wylosowanych kartkach nie przekracza 12.

b) Obliczymy, ile jest wszystkich takich wyników ośmiokrotnego rzutu kostką sześcienną do gry, których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa co najmniej 44.

Rozwiązanie

Wynik ośmiokrotnego rzutu kostką sześcienną zapiszemy jako ośmioelementowy ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$, gdzie x_i to liczba oczek otrzymanych w i -tym rzucie, dla $i = 1, 2, \dots, 8$.

Zatem warunki zadania są spełnione, gdy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 44.$$

Zauważmy, że każdemu $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, opisującemu liczbę oczek otrzymanych w wybranym spośród 8 rozpatrywanych rzutów kostką, można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować inną liczbę oczek takiego rzutu, określoną wzorem $7 - x_i$.

Na podstawie reguły równoliczności stwierdzamy więc, że wyników

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ ośmiokrotnego rzutu kostką sześcienną, dla których spełniony jest warunek

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 44$$

jest tyle samo, co wyników

$$(7 - x_1, 7 - x_2, 7 - x_3, 7 - x_4, 7 - x_5, 7 - x_6, 7 - x_7, 7 - x_8)$$

ośmiokrotnego rzutu kostką sześcienną, dla których spełniony jest warunek

$$7 - x_1 + 7 - x_2 + 7 - x_3 + 7 - x_4 + 7 - x_5 + 7 - x_6 + 7 - x_7 + 7 - x_8 \geq 44.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy

$$8 \cdot 7 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) \geq 44$$

skąd

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) \leq 56 - 44 = 12.$$

Oznacza to, że wszystkich takich wyników ośmiokrotnego rzutu kostką, których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa co najmniej 44 jest tyle samo, co wszystkich takich wyników ośmiokrotnego rzutu kostką, których suma liczb wyrzuconych oczek nie przekracza wartości 12.

Rozpatrzmy więc nierówność

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_8 + 1) \leq 12,$$

w której każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Po przekształceniu tej nierówności do postaci

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 \leq 4$$

stwierdzamy, że każda z liczb x_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, 8$, spełnia warunek $1 \leq x_i + 1 \leq 5$.

Zatem każdemu wynikowi 8-krotnego rzutu kostką, w którym suma liczb wyrzuconych oczek nie przekracza wartości 12 można wzajemnie jednoznacznie przypisać 8-

elementowy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ liczb nieujemnych spełniających powyższą nierówność.

Jak wiemy z rozwiązania w poprzednim podpunkcie wszystkich rozwiązań tej

nierówności w nieujemnych liczbach całkowitych jest 495. Zatem dokładnie tyle jest też

wszystkich takich wyników ośmiokrotnego rzutu kostką, których suma liczb wyrzuconych oczek nie przekracza 12.

Co za tym idzie, jest 495 wszystkich takich wyników ośmiokrotnego rzutu kostką, których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa co najmniej 44.

c) Obliczymy, ile jest wszystkich ośmiocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest mniejsza od 10.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy nierówność

$$(x_1 + 1) + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 < 10,$$

w której każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest nieujemną liczbą całkowitą.

Jest ona równoważna nierówności

$$(x_1 + 1) + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 9,$$

a więc nieujemne liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_8$ spełniają nierówność

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 8.$$

Zatem liczba, której kolejnymi cyframi są $(x_1 + 1), x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ spełnia warunki zadania.

Ponadto liczba $8 - (x_1 + x_2 + \dots + x_8)$ również jest nieujemna – oznaczmy ją przez x_9 .

Wtedy $x_9 = 8 - (x_1 + x_2 + \dots + x_8)$, skąd otrzymujemy równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 + x_9 = 8$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_9$, gdzie $0 \leq x_i \leq 8$ dla $i = 2, 3, \dots, 8$ oraz $1 \leq x_1 + 1 \leq 9$.

Ponieważ wszystkich rozwiązań tego równania jest

$$\binom{8+9-1}{8} = \binom{16}{8} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{8!} = 12870, \text{ więc ogółem jest } 12870 \text{ liczb}$$

naturalnych ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest mniejsza od 10.

Na zakończenie podsumujemy spostrzeżenia poczynione w obu podpunktach powyższego przykładu.

Twierdzenie: o liczbie rozwiązań nierówności $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$ w nieujemnych liczbach całkowitych

Liczba wszystkich rozwiązań nierówności

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie n oraz k to ustalone dodatnie liczby całkowite, jest równa

$$\binom{k+n}{k}.$$

Dowód

Dla dowodu rozpatrzmy liczbę $x_{n+1} = k - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

Z nierówności $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$ otrzymujemy $k - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq 0$, zatem liczba x_{n+1} jest nieujemna.

Oznacza to, że rozwiązań danej nierówności w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest dokładnie tyle, ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$.

Liczba rozwiązań tak otrzymanego równania jest równa

$$\binom{k + (n+1) - 1}{k} = \binom{k+n}{k},$$

zatem również tyle jest rozwiązań nierówności

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie n oraz k to ustalone dodatnie liczby całkowite.

Koniec dowodu.

Słownik

k -elementowa kombinacja zbioru n -elementowego

każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k -elementową kombinacją tego zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

reguła dodawania

jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z k decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na k_1 sposobów, drugą na k_2 sposobów, ..., n -tą na k_n sposobów, to takiego

wyboru można dokonać na $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ sposobów

reguła równoliczności

dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej galerią zdjęć interaktywnych. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązania zadań, w których jest pokazane, jak wyznaczyć liczbę funkcji niemalejących ze skończonego zbioru A do skończonego zbioru B .

Rozpatrzmy dwa zbiory A i B :

$A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, gdzie $k \geq 1$ (A to zbiór k początkowych dodatnich liczb całkowitych),

$B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, gdzie $n \geq 1$ (B to zbiór n początkowych dodatnich liczb całkowitych).

Wykażemy, że liczba wszystkich funkcji niemalejących, których dziedziną jest zbiór A i o wartościach ze zbioru B jest równa:

$$\binom{k+n-1}{k}$$

Rozpatrzmy dwa zbiory A i B :

$A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, gdzie $k \geq 1$ (A to zbiór k początkowych dodatnich liczb całkowitych),

$B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, gdzie $n \geq 1$ (B to zbiór n początkowych dodatnich liczb całkowitych).

Wykażemy, że liczba wszystkich funkcji niemalejących, których dziedziną jest zbiór A i o wartościach ze zbioru B jest równa:

$$\binom{k+n-1}{k \text{ (1)}}$$

1. {audio}Niemalejąca funkcja f spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq \dots \leq f(k) \leq n.$$

Polecenie 2

Korzystając z rozwiązań zadań omówionych w powyższej galerii rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrzmy wszystkie funkcje niemalejące f , których dziedziną jest zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i których wartości są w zbiorze $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Oblicz, ile spośród tych funkcji spełnia warunek $f(4) < f(5)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz, na ile sposobów można rozdzielić 11 monet jednozłotowych między 7 osób tak, aby każda z nich wzbogaciła się w ten sposób o co najmniej 1 zł.

Odpowiedź: .

Ćwiczenie 2



Rozpatrzmy następujące zbiory:

A – zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

w nieujemnych liczbach całkowitych x_1, x_2, x_3 ,

B – zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

w nieujemnych liczbach całkowitych x_1, x_2, x_3, x_4 ,

C – zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

w nieujemnych liczbach całkowitych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ,

D – zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Uporządkuj podane liczby w kolejności: od najmniejszej do największej.



Ćwiczenie 3



Oblicz, ile jest wszystkich dziesięciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa 4.

Odpowiedź: .

Ćwiczenie 4



Oznaczmy przez n liczbę wszystkich wyników siedmiokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 12. Wówczas:

☐ $n = 18564$

☐ $n = 792$

☐ $n = 330$

☐ $n = 462$

Ćwiczenie 5



Liczba n wszystkich funkcji niemalejących, których dziedziną jest zbiór

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

i których wartości należą do zbioru

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

spełnia warunek

☐ $n \leq 1287$

☐ $n < 792$

☐ $n \geq 462$

☐ $n > 495$

Ćwiczenie 6



Oblicz, ile jest wszystkich jedenastocyfrowych liczb naturalnych o cyfrach nieparzystych, których suma wszystkich cyfr jest mniejsza od 20.

Zakoduj poniżej kolejno cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź: .

Ćwiczenie 7



Oznaczmy przez n liczbę wszystkich wyników dziesięciokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których suma s liczb wyrzuconych oczek spełnia warunek

$$12 < s < 16.$$

Wynika stąd, że

☐ $n < 3279$

☐ $n < 3972$

☐ $n > 2397$

☐ $n > 2937$

Ćwiczenie 8



Rozpatrzmy wszystkie siedmiocyfrowe liczby naturalne, zapisane za pomocą cyfr różnych od zera.

Wszystkich takich liczb, których cyfry tworzą ciąg niemalejący jest

- ☐ o 1434 więcej niż wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 18.
- ☐ o 436 więcej niż wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 15.
- ☐ o 1953 więcej niż wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 20.
- ☐ o 810 więcej niż wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 16.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Modele przegródkowe w kombinatoryce

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się twierdzeniem o liczbie wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego,
- zapisuje równania oraz nierówności opisujące warunki dotyczące sumy cyfr tej liczby,
- zapisuje równania oraz nierówności opisujące warunki dotyczące sumy liczb oczek otrzymanych w wyniku wielokrotnego rzutu kostką sześcienną do gry,
- oblicza, ile jest wszystkich wyników opisanych powyższymi warunkami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Modele przegródkowe w kombinatoryce” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

[Permutacje, kombinacje, wariacje](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać Galerę zdjęć interaktywnych do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie pracować na lekcji.