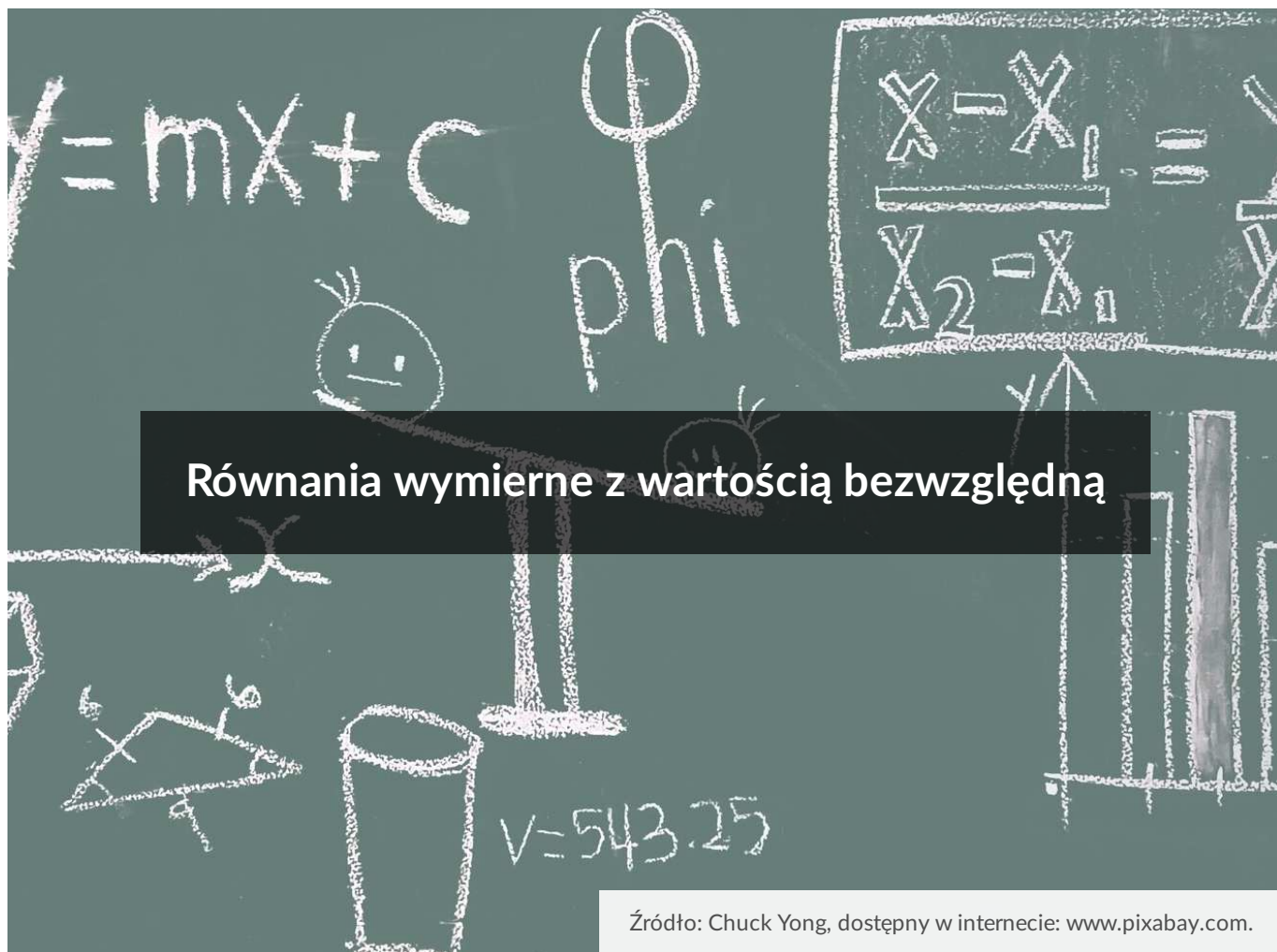




Równania wymierne z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równania wymierne z wartością bezwzględną

Źródło: Chuck Yong, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań wymiernych z wartością bezwzględną. W rozwiązaniach będziemy korzystać z definicji wartości bezwzględnej oraz z własności wartości bezwzględnej.

Rozważając przypadki, ustalimy najpierw rozwiązania odpowiednich równań.

Po rozważeniu wszystkich warunków zapiszemy, jaka jest suma rozwiązań. Będzie ona rozwiązaniem równania wymiernego z wartością bezwzględną.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania wymierne z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania równań wymiernych z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wymierne

Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$), to równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą x .

Rozwiązać równanie to znaleźć takie pierwiastki wielomianu $W(x)$, które nie są miejscami zerowymi wielomianu $P(x)$.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania równania wymiernego, należy określić jego dziedzinę.

Dziedziną równia wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych, pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu $P(x)$.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy $|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Przykład 1

Rozwiążemy **równanie wymierne** $\frac{1}{|x+1|} = 1$.

Najpierw ustalimy dziedzinę równania.

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq (-1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\frac{1}{|x+1|} = 1 \quad / \cdot |x+1|$$

$$1 = |x+1|$$

Skorzystamy z własności wartości bezwzględnej.

Dla $a > 0$: $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ lub $x = (-a)$.

Zatem mamy:

$$x + 1 = 1 \text{ lub } x + 1 = (-1).$$

$$x = 0, x = (-2)$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = (-2)$, $x = 0$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $\frac{-2}{|4-x|} = 0$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Mianownik równania jest różny od zera, zatem możemy pomnożyć obie strony równania przez $|4 - x|$.

$$(-2) = 0 \cdot |4 - x|$$

$$(-2) = 0$$

Otrzymaliśmy sprzeczność.

Równanie nie posiada rozwiązania.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| = 2$.

Ustalając dziedzinę równania, mamy $x + 2 \neq 0$, $x \neq (-2)$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\left| \frac{x-2}{x+2} \right| = 2$$

Skorzystamy najpierw z własności wartości bezwzględnej, że dla dowolnej liczby x i $y \neq 0$ mamy $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Zatem mamy $\frac{|x-2|}{|x+2|} = 2 \quad | \cdot |x+2|$

$$|x - 2| = 2|x + 2|$$

$$|x - 2| = |2x + 4|$$

Teraz skorzystamy z własności wartości bezwzględnej $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ lub $a = (-b)$.

$$x - 2 = 2x + 4 \text{ lub } x - 2 = -(2x + 4)$$

$$-x = 6 \text{ lub } x - 2 = (-2x) - 4$$

$$x = (-6) \text{ lub } 3x = (-2)$$

$$x = \left(-\frac{2}{3}\right).$$

Rozwiązania równania to $x = \left(-\frac{2}{3}\right)$, $x = (-6)$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\left| \frac{1-x}{x+3} \right| = x$.

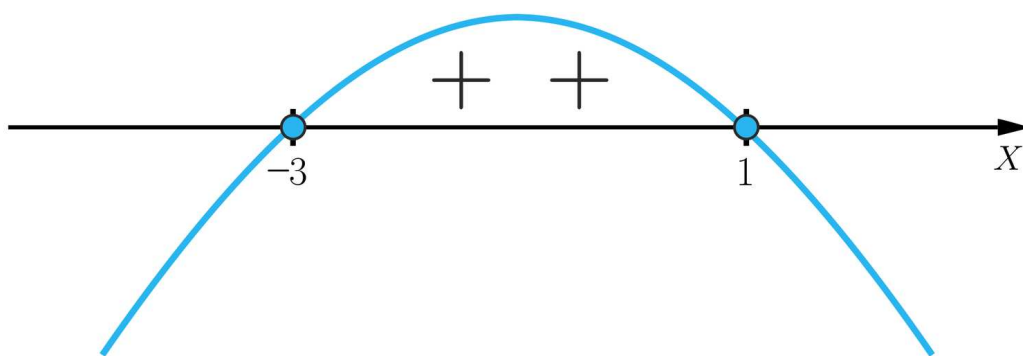
$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej i rozpatrzymy dwa przypadki.

1) Jeżeli $\frac{1-x}{x+3} \geq 0 \mid \cdot (x+3)^2$

$$(1-x)(x+3) \geq 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = (-3)$$



$$x \in \langle -3, 1 \rangle \wedge x \neq -3$$

Mamy wtedy $\frac{1-x}{x+3} = x$.

$$(1-x) = x(x+3)$$

$$1-x = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 = 20 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$$

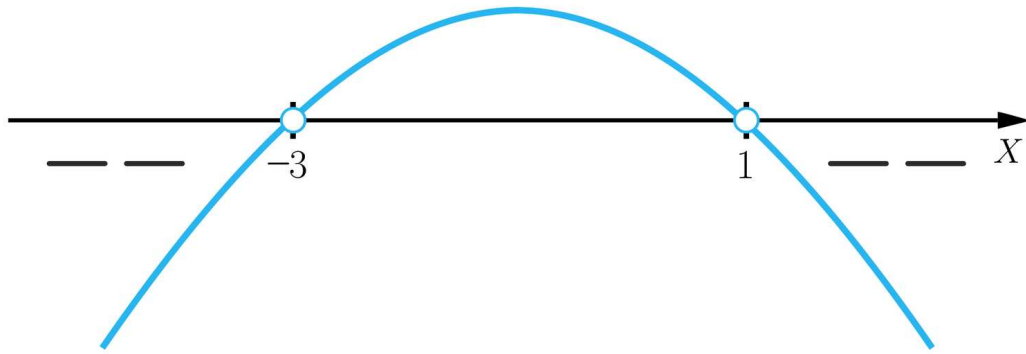
$$x_1 = \frac{-4-2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5} \notin \langle -3, 1 \rangle$$

$$x_2 = \frac{-4+2\sqrt{5}}{2} = -2 + \sqrt{5} \in \langle -3, 1 \rangle, \quad -2 + \sqrt{5} \neq -3$$

2) Jeżeli $\frac{1-x}{x+3} < 0$

$$(1-x)(x+3) < 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = (-3)$$



$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

Wtedy mamy $-\frac{1-x}{x+3} = x$.

$$-(1-x) = x(x+3)$$

$$-1+x = x^2+3x$$

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0$$

$$x = (-1) \notin (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $x = (-2) + \sqrt{5}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $\frac{|x-4|}{x} = \frac{|x|}{x+2}$.

Dziedziną równania jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, mamy:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{dla } x \geq 4 \\ -(x-4) & \text{dla } x < 4 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$1) x \in (-\infty, 0) - \{-2\}$$

Równanie przyjmuje postać $\frac{-x+4}{x} = \frac{-x}{x+2}$.

Korzystając z własności proporcji, mamy:

$$-x^2 = (-x+4)(x+2)$$

$$-x^2 = -x^2 - 2x + 4x + 8$$

$$-2x = 8$$

$$x = (-4) \in (-\infty, 0) - \{-2\}$$

$$2) x \in (0, 4)$$

Równanie przyjmuje postać $\frac{-x+4}{x} = \frac{x}{x+2}$.

$$x^2 = (-x + 4)(x + 2)$$

$$x^2 = -x^2 - 2x + 4x + 8$$

$$2x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \notin (0, 4)$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \in (0, 4)$$

$$3) x \in \langle 4, \infty)$$

Równanie przyjmuje postać:

$$\frac{x-4}{x} = \frac{x}{x+2}.$$

$$x^2 = (x - 4)(x + 2)$$

$$x^2 = x^2 + 2x - 4x - 8$$

$$2x = (-8)$$

$$x = (-4) \notin \langle 4, \infty)$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = (-4)$, $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Słownik

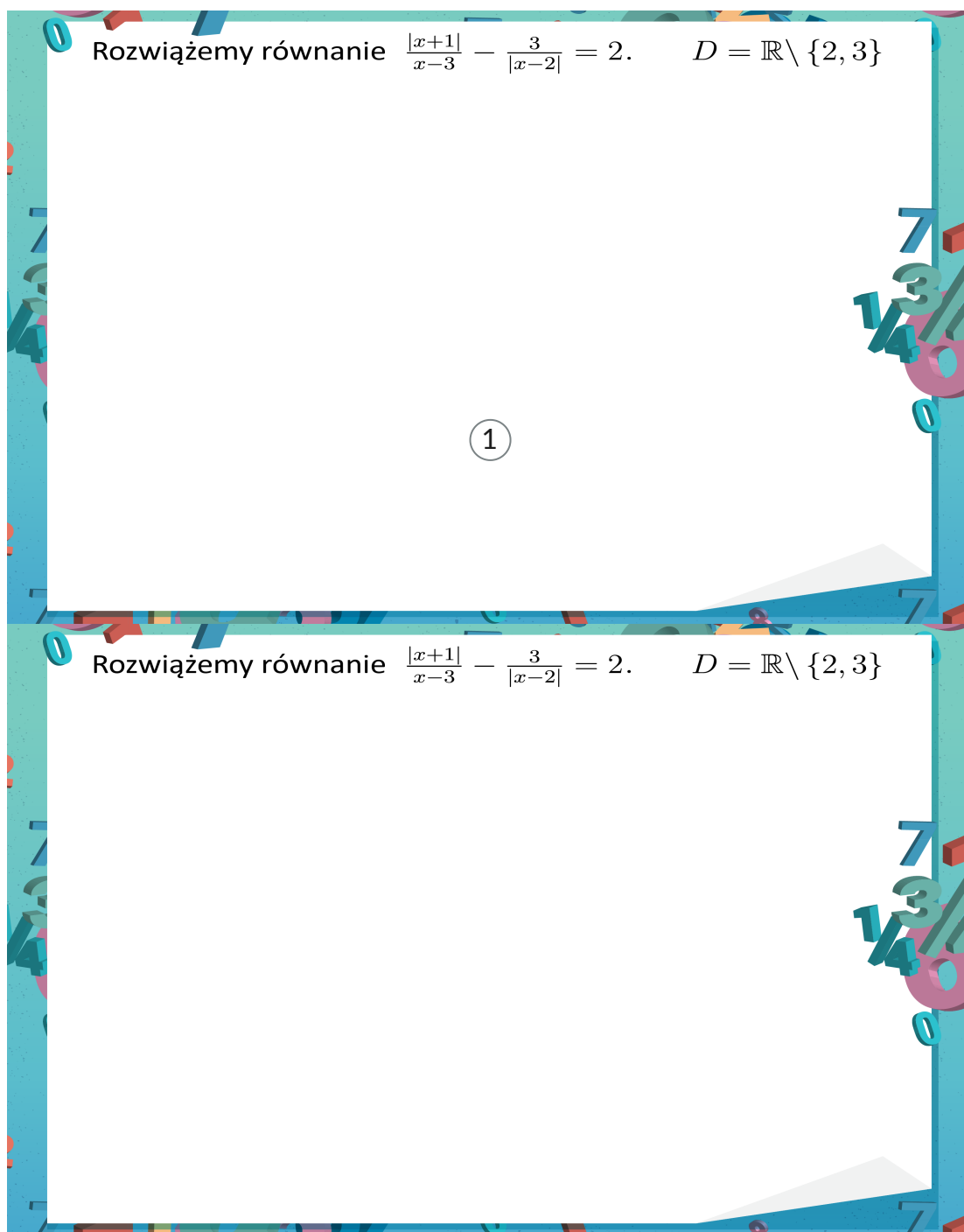
równanie wymierne

równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$ z jedną niewiadomą x , gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami, $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym ($P(x) \neq 0$)

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych pokazującą sposób rozwiązywania równania wymiernego z wartością bezwzględną z wykorzystaniem definicji wartości bezwzględnej.



1. Najpierw ustalimy dziedzinę równania.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $\frac{|x+2|}{x-1} + \frac{2}{|x+1|} = 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Niech A oznacza zbiór rozwiązań równania $\frac{2}{|x-1|} = 4$. Rozwiąż równanie i wskaż zbiór A .

☐ $A = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

☐ A jest zbiorem liczb rzeczywistych.

☐ $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

☐ A jest zbiorem pustym.

Ćwiczenie 2



Rozwiąż równanie $\frac{2}{|x+4|} = \frac{1}{x}$. Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$x =$

Ćwiczenie 3



Rozwiąż równanie $\frac{1}{|x^2-4|} = 2$. Wybierz, czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Równanie ma cztery pierwiastki, które są liczbami niewymiernymi.	☐	☐
Suma wszystkich rozwiązań równania jest równa zero.	☐	☐
Iloczyn pierwiastków równania jest liczbą wymierną.	☐	☐
Rozwiązaniem równania jest zbiór liczb rzeczywistych.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiązaniem równania $\left| \frac{x-1}{x+4} \right| = 1$ jest:

☐ 0

☐ $-\frac{3}{2}$

☐ $\frac{1}{2}$

☐ -1

Ćwiczenie 5



Połącz w pary równania i liczby, które spełniają równanie.

$$\frac{x}{|x+2|} = -1$$

$$-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}$$

$$\frac{3}{|x-1|-1} = 2$$

$$-1$$

$$\frac{2x}{|1-x|} = 4$$

$$\frac{2}{3}, 2$$

$$\frac{-1}{|x|-2} = 4$$

$$-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}$$

Ćwiczenie 6



Wstaw w wyznaczone miejsca odpowiednie liczby w kolejności rosnącej.

Rozwiązaniem równania $\left| \frac{1-x}{x-2} \right| = x$ są:

$$x = \boxed{}, x = \boxed{}, x = \boxed{}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ćwiczenie 7



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Rozwiązaniem równania $\frac{x-1}{|x+3|} = \frac{x-1}{x+3}$ jest zbiór ($\boxed{}, \infty$)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-1}{|x+3|} = \frac{x-1}{x+3}$ jest zbiór ($\boxed{}, \infty$)

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $\frac{|x-4|}{x+1} = \frac{|x|}{x}$. Wstaw w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Rozwiązaniem równania jest $x =$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ 2

☐ $\frac{1}{2}$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania wymierne z wartością bezwzględną

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa: III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania wymierne z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi,
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań wymiernych z wartością bezwzględną różnych typów,
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania

- analiza przypadku,
- dyskusja,
- odwrócona klasa.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie w domu przygotowują sposób rozwiązywania równań wymiernych z wartością bezwzględną.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania równań wymiernych z wartością bezwzględną, które przygotowali w domu.
2. Uczniowie w parach omawiają rozwiązania przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.
4. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jakie napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia 7-8.

Materiały pomocnicze:

[Liczby wymierne. Wartość bezwzględna](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium

Przykład zawarty w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą wykorzystać jako materiał na lekcję o nierównościach wymiernych z wartością bezwzględną.