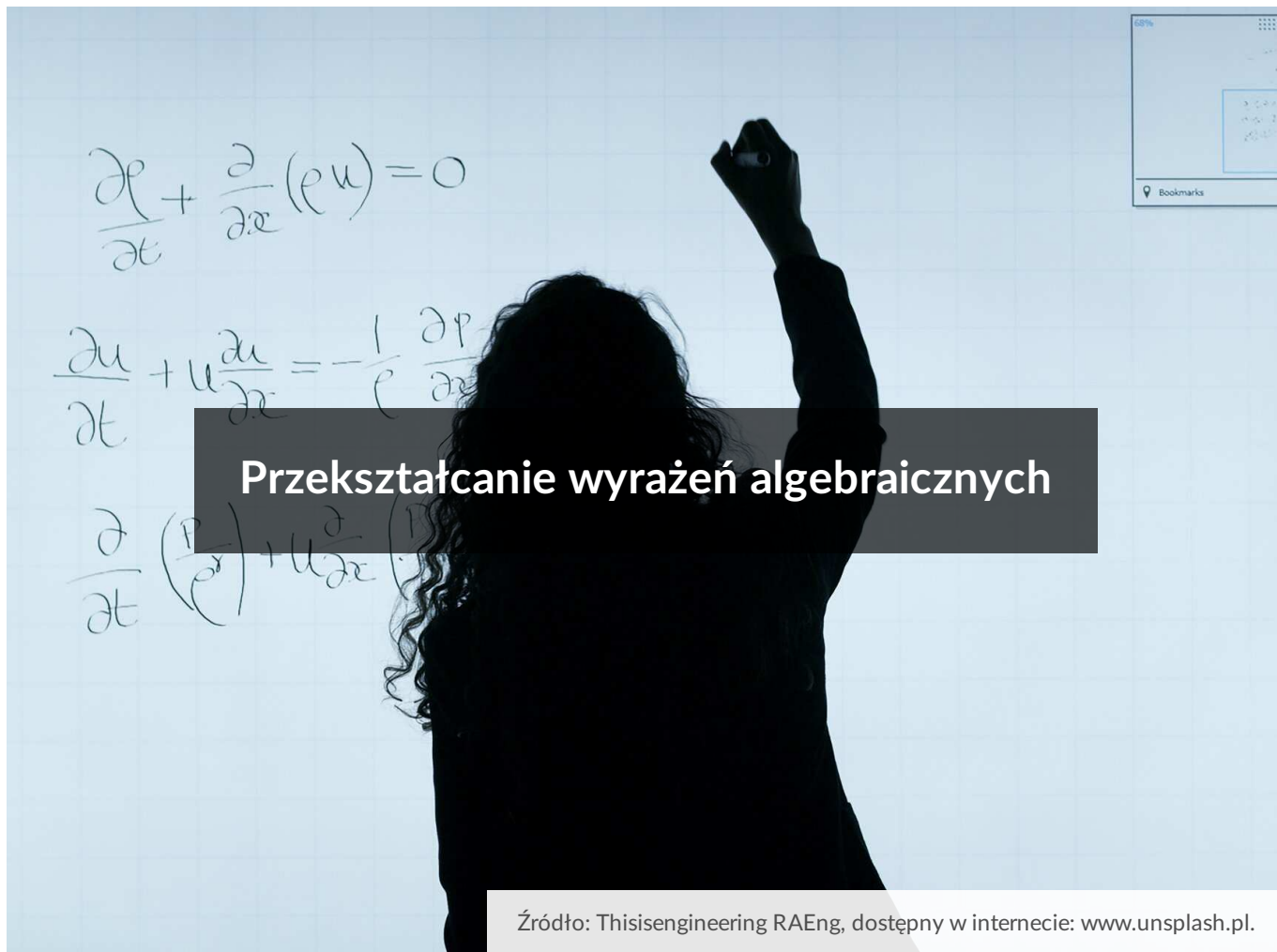




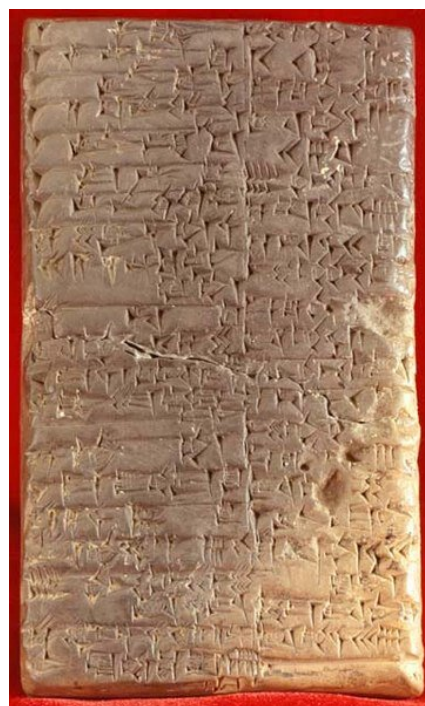
Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Matematyka wielu starożytnych ludów sprowadzała się zazwyczaj do operacji na konkretnych liczbach. Na zapisanych klinowym pismem glinianych tabliczkach z Babilonu wielokrotnie możemy spotkać niemal te same rachunki, tyle że przeprowadzane na innych liczbach.

Naszym celem będzie już wkrótce wykorzystanie liczb do opisu figur geometrycznych. Zanim jednak w zadaniach geometrycznych pojawią się konkretne liczby, zwykle wcześniej mamy do czynienia ze wzorem złożonym z abstrakcyjnych znaków.



Tabliczka zapisana pismem klinowym z kolekcji Kirkora Minassiana w Bibliotece Kongresu

Źródło: dostępny w internecie: <https://pl.wikipedia.org/>, domena publiczna.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania wykorzystując prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania i odejmowania.
- Przekształcisz nieskomplikowane wyrażenia algebraiczne.
- Wykażesz związek algebry z geometrią.

Przeczytaj

Spójrzmy na następujące znane ze szkoły podstawowej zdanie: „*Pole prostokąta o bokach a oraz b jest równe ab .*”

Powyższe twierdzenie pozwala nam obliczać pola dowolnych prostokątów – wystarczy jedynie w miejscach, gdzie są litery a i b , podstawić konkretne liczby. Podobnie rzecz wygląda ze wzorami na pole równoległoboku, trapezu, trójkąta równobocznego: one też zawierają „abstrakcyjne” litery.

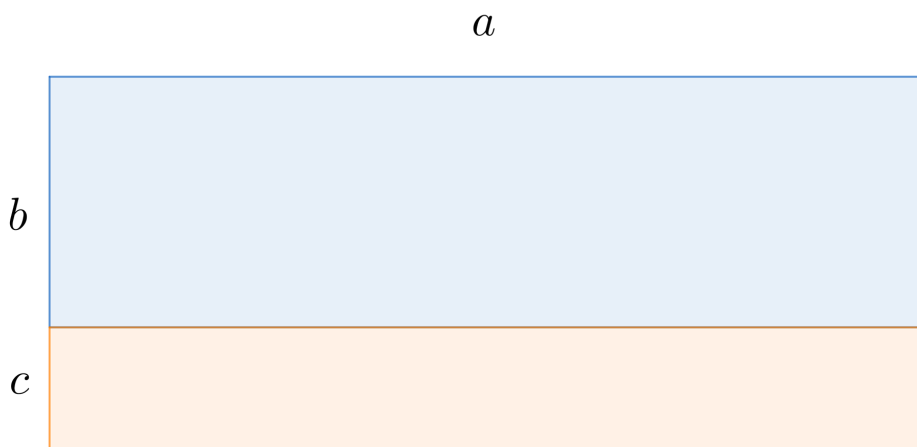
Ten bardzo wygodny sposób zapisu wiedzy matematycznej, w którym zamiast konkretnych liczb używa się liter, wymaga jednak pewnego obycia z tzw. wyrażeniami algebraicznymi. Dlatego teraz przypomnimy, jak przekształcać takie wyrażenia.

Przykład 1

Zacznijmy od jednego z najbardziej podstawowych praw algebry, którego geometryczna interpretacja jest następująca: wyobraźmy sobie, że w prostokącie o bokach a oraz b bok długości b wydłużono o c jednostek (rysunek poniżej). Pole powstałego prostokąta jest równe $a \cdot (b + c)$. Z drugiej strony jest ono równe sumie pól dwóch prostokątów o polach równych odpowiednio ab oraz ac .

A zatem:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



Równość ta zwana jest **prawem rozdzielności mnożenia względem dodawania**. Gdy podstawimy w niej $-c$ za c , uzyskamy **prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania**:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Te dwie równości pozwalają przekształcać wiele prostych wyrażeń.

Ważne!

Podstawienia $-c$ za c można dokonać następująco:

najpierw w miejsce c wpisujemy puste miejsce w nawiasach:

$$a \cdot (b + ()) = a \cdot b + a \cdot (),$$

następnie w puste miejsce wpisujemy $-c$:

$$a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c),$$

na końcu pozbywamy się dopisanych nawiasów:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Przykład 2

Wyrażenie:

$$a \cdot (a - c) + c \cdot (a + b)$$

zapiszemy bez użycia nawiasów.

Pozbywając się nawiasów, otrzymujemy:

$$a \cdot (a - c) + c \cdot (a + b) = a^2 - ac + ac + bc = a^2 + bc.$$

Zauważmy, że zredukowaliśmy tu wyrazy podobne $-ac$ oraz ac .

Przykład 3

Rozdzielność mnożenia względem dodawania przydaje się też do obliczania w pamięci niektórych iloczynów. Na przykład, obliczając w pamięci iloczyn $52 \cdot 7$, liczymy osobno iloczyn $50 \cdot 7$ i osobno iloczyn $2 \cdot 7$, a następnie dodajemy otrzymane wyniki. Zatem rozumowanie nasze przebiega według poniższego schematu:

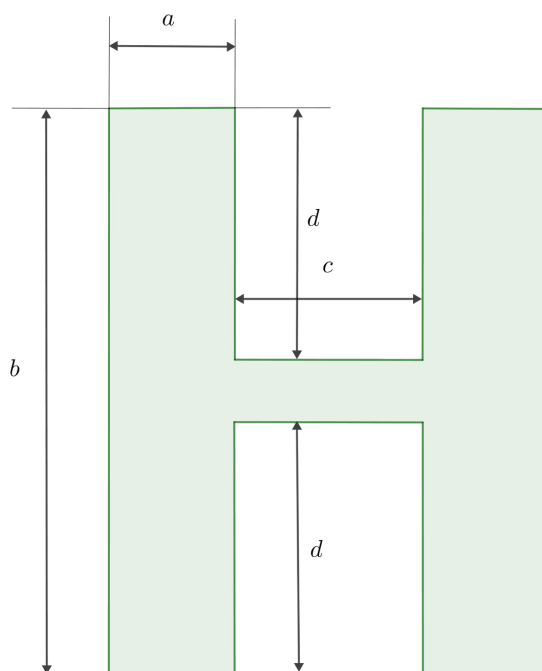
$$52 \cdot 7 = (50 + 2) \cdot 7 = 50 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 350 + 14 = 364.$$

Zauważmy, że zastosowaliśmy wzór:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \text{ dla } a = 7, b = 50, c = 2.$$

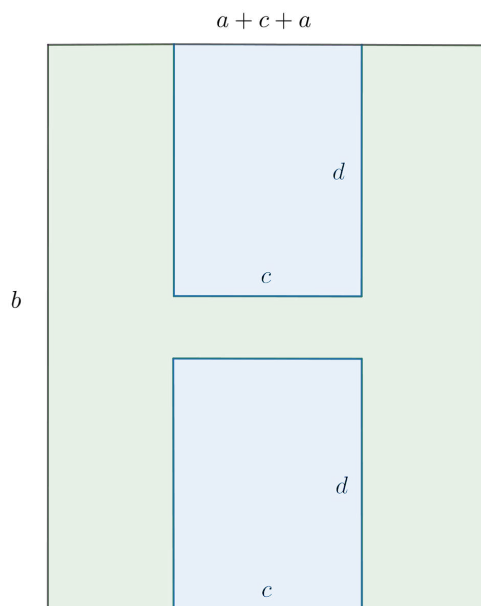
Przykład 4

Wykażemy, że pole litery H na rysunku poniżej wyraża się wzorem: $P_H = 2ab + bc - 2cd$



Możemy rozumować rozmaicie.

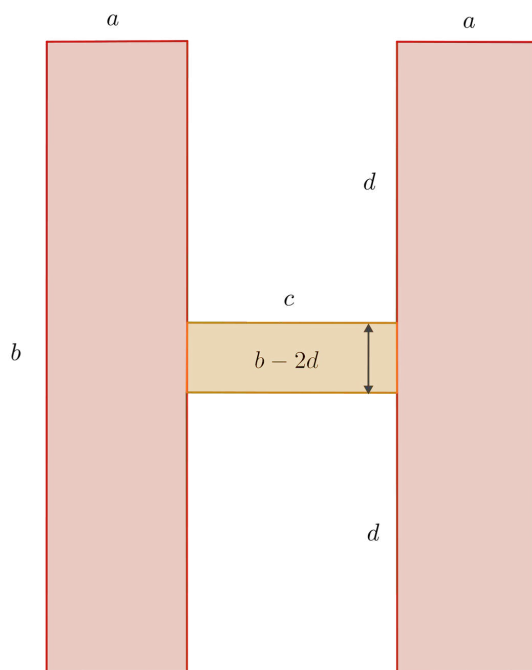
Sposób 1. Jeśli zieloną literę H uzupełnimy dwoma błękitnymi prostokątami o wymiarach $c \times d$ (tzn. o bokach c i d), to uzyskamy prostokąt (o czarnych bokach na rysunku) o wymiarach $(a + c + a) \times b$.



Stąd pole niebieskiej litery H możemy obliczyć, odejmując od pola prostokąta o wymiarach $(2a + c) \times b$ pola dwóch prostokątów o wymiarach $c \times d$:

$$P = (2a + c) \cdot b - 2cd = 2ab + bc - 2cd.$$

Sposób 2. Dodajemy pola dwóch czerwonych prostokątów o bokach a i b oraz pole pomarańczowego prostokąta. Jeden z boków pomarańczowego prostokąta ma długość c . Długość drugiego boku tego prostokąta jest różnicą wysokości „boku litery H ” i wysokości dwóch „nózek litery H ”, czyli wynosi $b - 2d$.



Stąd:

$$P = 2ab + c \cdot (b - 2d) = 2ab + bc - 2cd.$$

Zauważmy, że niezależnie od sposobu rozumowania wynik jest taki sam. W pierwszej fazie może on być odmiennie zapisany, ale po pozbyciu się nawiasów - zgodnie z prawami algebry - musimy otrzymać zawsze sumę tych samych składników.

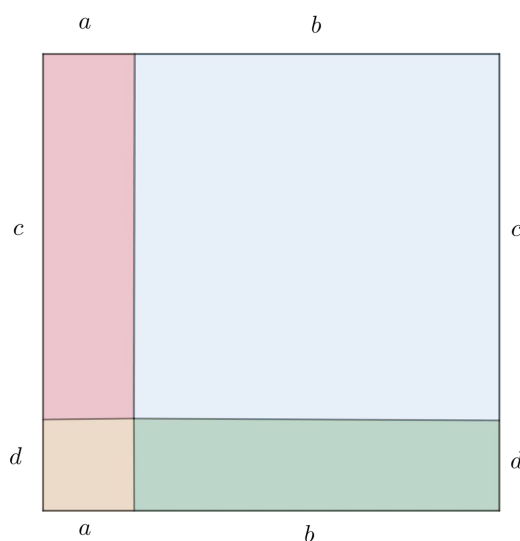
Rozpatrzmy teraz mnożenie sumy $(a + b)$ przez sumę $(c + d)$. Dwukrotnie korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania, otrzymujemy:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Ten algebraiczny fakt także ma prostą interpretację geometryczną: pole prostokąta o bokach $(a + b)$ oraz $(c + d)$ jest równe:

$$P = (a + b) \cdot (c + d).$$

Z drugiej strony pole to jest sumą pól kolorowych prostokątów (rysunek poniżej), czyli jest równe:



$$P = ac + ad + bc + bd.$$

A zatem:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Ważne!

$$\begin{aligned} & \left(\overset{\text{blue}}{a} + \overset{\text{pink}}{b} \right) \left(\overset{\text{blue}}{c} + \overset{\text{pink}}{d} \right) = \\ & = \overset{\text{blue}}{ac} + \overset{\text{blue}}{ad} + \overset{\text{pink}}{bc} + \overset{\text{pink}}{bd} \end{aligned}$$

Przykład 5

Stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania pokażemy, jak bez używania kalkulatora obliczyć $51 \cdot 98$.

Obliczamy zgodnie z poznanymi zasadami:

$$51 \cdot 98 = (50 + 1) \cdot 98 = 50 \cdot 98 + 1 \cdot 98 = 50 \cdot (100 - 2) + 1 \cdot (100 - 2) = \\ = 50 \cdot 100 - 50 \cdot 2 + 1 \cdot 100 - 1 \cdot 2 = 5000 - 2 = 4998.$$

Odp. $51 \cdot 98 = 4998$.

Przykład 6

Uprościmy wyrażenie: $W = (x - 2y) \cdot (x + y) + xy$.

Najpierw pozbywamy się nawiasów:

$$W = (x - 2y) \cdot (x + y) + xy = x^2 + xy - 2xy - 2y^2 + xy.$$

Następnie redukujemy wyrazy podobne:

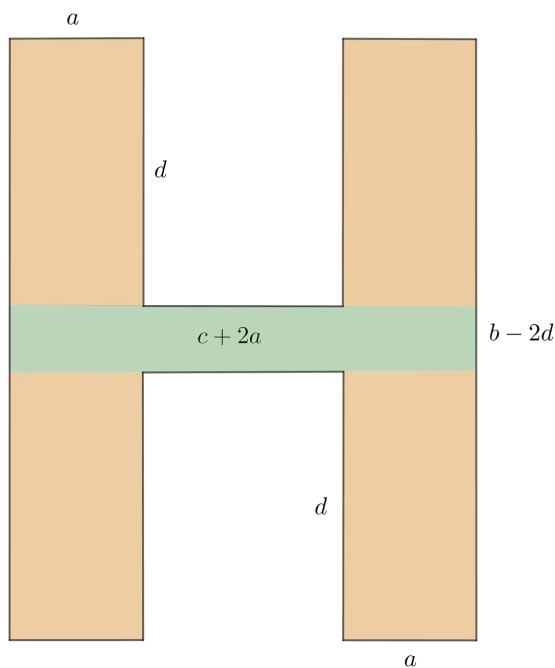
$$W = (x - 2y) \cdot (x + y) + xy = x^2 + \mathbf{xy} - \mathbf{2xy} - 2y^2 + \mathbf{xy} = x^2 - 2y^2.$$

A zatem:

$$W = x^2 - 2y^2.$$

Przykład 7

Obliczymy teraz w inny sposób pole litery H z przykładu 5.



Pole to jest sumą pól czterech pomarańczowych prostokątów o wymiarach $a \times d$ i jednego zielonego prostokąta o wymiarach $(b - 2d) \times (c + 2a)$.

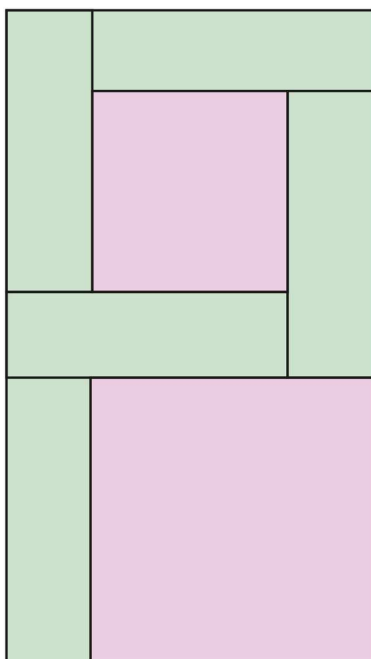
Stąd:

$$P = 4ad + (b - 2d) \cdot (c + 2a) = 4ad + bc + 2ab - 2dc - 4ad = 2ab + bc - 2cd.$$

Oczywiście, wynik ten zgadza się z naszymi poprzednimi obliczeniami.

Przykład 8

Z pięciu przystających zielonych prostokątów utworzono literę P tak, jak to widać na poniższym rysunku.



Pole widocznego na nim większego z fioletowych kwadratów jest równe S , a pole mniejszego fioletowego kwadratu jest równe T . Obliczmy pole figury P w zależności od S oraz T .

Oznaczmy długości: krótszego boku zielonego prostokąta przez x , a dłuższego boku – przez y .

Ponieważ, jak to odczytujemy z rysunku, długość boku większego z fioletowych kwadratów jest równa y , a długość boku mniejszego fioletowego kwadratu jest równa $y - x$, więc $y = \sqrt{S}$ oraz $y - x = \sqrt{T}$, skąd $x = \sqrt{S} - \sqrt{T}$.

Litera P zbudowana jest z pięciu przystających zielonych prostokątów o bokach x i y , zatem jej pole jest równe $5xy = 5 \cdot (\sqrt{S} - \sqrt{T}) \cdot \sqrt{S} = 5S - 5\sqrt{ST}$.

Słownik

prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$| \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Animacja

Polecenie 1

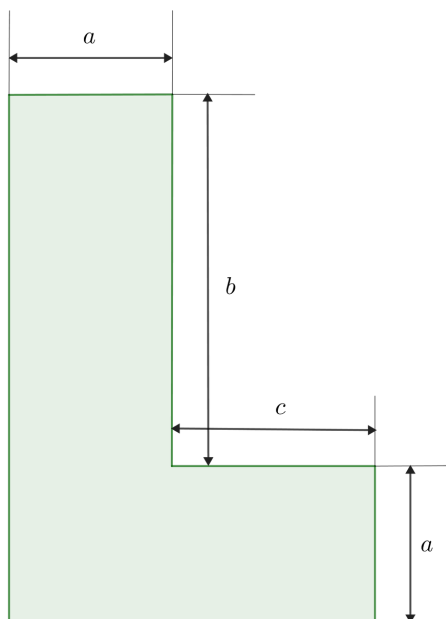
Zapoznaj się z animacją pokazującą, jak przekształcać wyrażenia algebraiczne, a następnie rozwiąż zadania zamieszczone poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DFV3TPeZM>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Polecenie 2

Zapisz w zależności od a , b i c wzór na pole litery L pokazanej na rysunku poniżej:



Polecenie 3

Oblicz bez używania kalkulatora $197 \cdot 406$.

Polecenie 4

Oblicz wartość wyrażenia $(x + y) \cdot (x - 7y) + 6xy$ dla $x = 8\sqrt{17}$ i $y = 5\sqrt{3}$.

Polecenie 5

Dany jest prostokąt o bokach a i b . Jeżeli bok a przedłużymy o 2, a bok b przedłużymy o 3, to pole prostokąta zwiększy się o 25.

Oblicz, o ile zwiększy się pole danego prostokąta, jeżeli bok a przedłużymy o 6 i jednocześnie bok b przedłużymy o 9.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wynikiem działania $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{10} - 5\sqrt{2}$ jest liczba:

☐ $\sqrt{2}$

☐ $\sqrt{5}$

☐ $2\sqrt{5}$

☐ $2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2



Wyrażenie $xy + 3y + 4x + 12$ można zapisać jako:

☐ $(x + 3) \cdot (y + 4)$

☐ $(x + 3) \cdot (y + 3)$

☐ $8xy + 12$

☐ $(x + y) \cdot (4 + 3)$

Ćwiczenie 3



Wartość wyrażenia $(x - 1) \cdot (x + 3) - (x + 4) \cdot x + 9x$ jest równa 6. Zatem liczba x wynosi

☐ $\frac{7}{9}$

☐ 3,1

☐ $\frac{9}{7}$

☐ 1,3

Ćwiczenie 4



Oblicz wartość wyrażenia W dla danej liczby a :

$$W = 41 + 5 \cdot (a - 6) - 2 \cdot (3 - 5a) - 16a, a = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$W =$

$$W = (2a - 5) \cdot (a + 1) - (1 + 3a) \cdot 7 + 12 \cdot (2a + 1), a = \sqrt{72} - \sqrt{8}$$

$W =$

$$W = (a + 3) \cdot 2 - (a + 2) \cdot a, a = \sqrt{3}$$

$W =$

Ćwiczenie 5



Wyrażenie $(a - 2b) \cdot c + (c + 3a) \cdot (b - a) + b \cdot (c - 2a)$ można zapisać w postaci:

$a^2 + 3bc$

$b^2 - 3ac$

$ab - 3a^2$

$3ab - cb$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary równe wyrażenia:

$$(a - b) \cdot c + 3b \cdot (d + c)$$

$$ab + cd$$

$$(a + b) \cdot (c + d) - ad - bc$$

$$b \cdot (a + c)$$

$$(a + c) \cdot (b + d) - ad - bc$$

$$(2b + a) \cdot c + 3bd$$

$$(a - 2d) \cdot b + b \cdot (2d + c)$$

$$ac + bd$$

Ćwiczenie 7



Dany jest prostopadłościan o krawędziach a , b i c . Jeżeli krawędź a przedłużymy o 1, krawędź b przedłużymy o 2, a krawędź c przedłużymy o 3, to pole powierzchni tego prostopadłościanu zwiększy się o 51.

Oblicz, o ile zwiększy się pole powierzchni danego prostopadłościanu, jeżeli krawędź a przedłużymy o 6, krawędź b przedłużymy o 12, a krawędź c przedłużymy o 18.

Pole danego prostopadłościanu zwiększy się o .

Ćwiczenie 8



Można tak dobrać wartość dodatniej liczby całkowitej k , żeby wartość wyrażenia $t = (10^{2k} + 10^{k+1}) \cdot (10^{-2k} + 10^{-k-1})$ spełniała warunek:

☐ $10^{2020} + 2 < t < 10^{2020} + 3$

☐ $102 < t < 103$

☐ $12 < t < 13$

☐ $2 < t < 3$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykonuje dodawanie, odejmowanie wyrażeń algebraicznych,
- wykonuje redukcję wyrazów podobnych,
- mnoży przez siebie dwie sumy algebraiczne,
- przekształca wyrażenia algebraiczne,
- tworzy wyrażenie algebraiczne opisujące obwód, pole figury.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- metoda tekstu przewodniego

- metoda krokodyla

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu
- projektor multimedialny

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie przypominają sobie własności działań na liczbach.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę na temat sposobów przekształcania wyrażeń algebraicznych.
2. Uczniowie w grupach tworzą mapy myśli ilustrujące własności działań, następnie porównują je, projektując jedną wspólną mapę.
3. Nauczyciel przedstawia uczniom temat lekcji, wskazuje cele zajęć oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj” i animacji. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń lub uczennica podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do postawionych na początku lekcji kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują polecenia 2-5 w sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- [Działania na wyrażeniach algebraicznych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wstęp do zagadnień związanych z rozwiązywaniem równań.