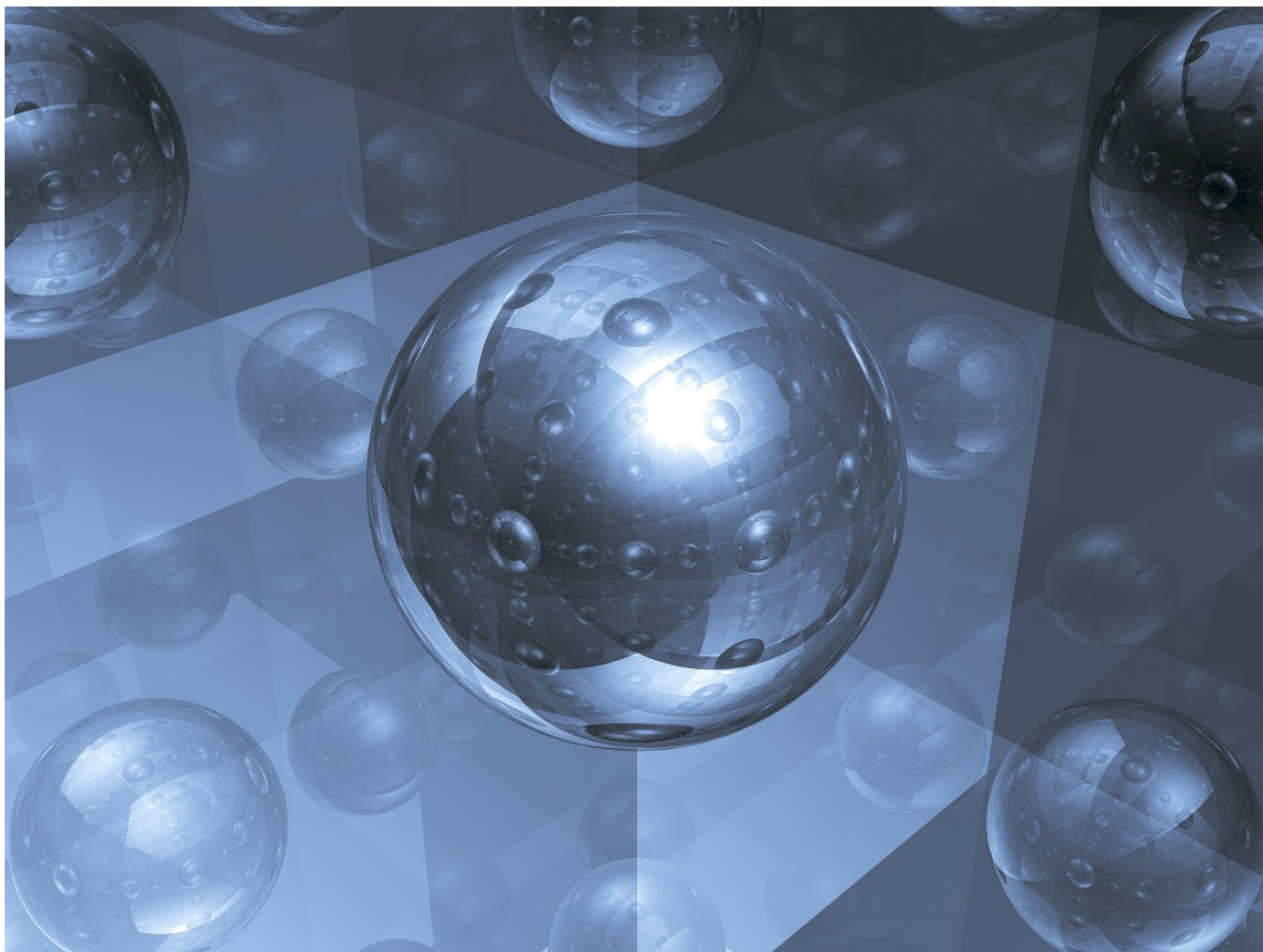




Sześćcian opisany na kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

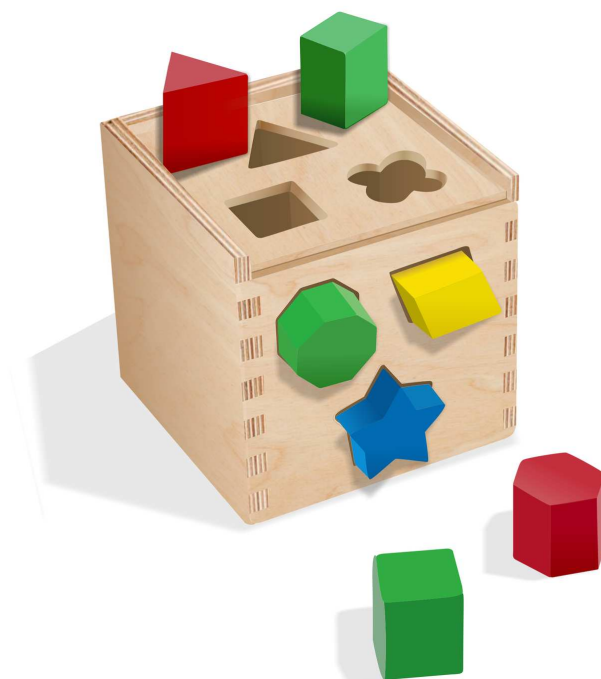


Sześcian opisany na kuli

Źródło: [xresch](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Na pewno pamiętasz zabawkę z dzieciństwa – kostka sorter – w której celem jest dopasowanie kształtu klocka do odpowiedniego otworu w sześciacie.

Wpisanie kuli w sześcian jest podobnym zadaniem. Nie każda kula zmieści się do danego sześcianu i nie każdą kulę umieszczoną w sześcianie będziemy nazywać kulą wpisaną.



W przedstawionym materiale poznasz zależność między wymiarami sześcianu, a promieniem kuli wpisanej w ten sześcian oraz rozwiążesz zadania, również praktyczne, związane z tym zagadnieniem geometrycznym.

Twoje cele

- Poznasz własności kuli wpisanej w sześcian.
- Zastosujesz wzory na pole powierzchni i objętość kuli oraz sześcianu.

Przeczytaj

Własności sześcianu i kuli są wszystkim dobrze znane. Potrafimy obliczyć objętość oraz pole powierzchni tych figur przestrzennych. W tym materiale zajmiemy się obiektem, który jest połączeniem kuli i sześcianu.

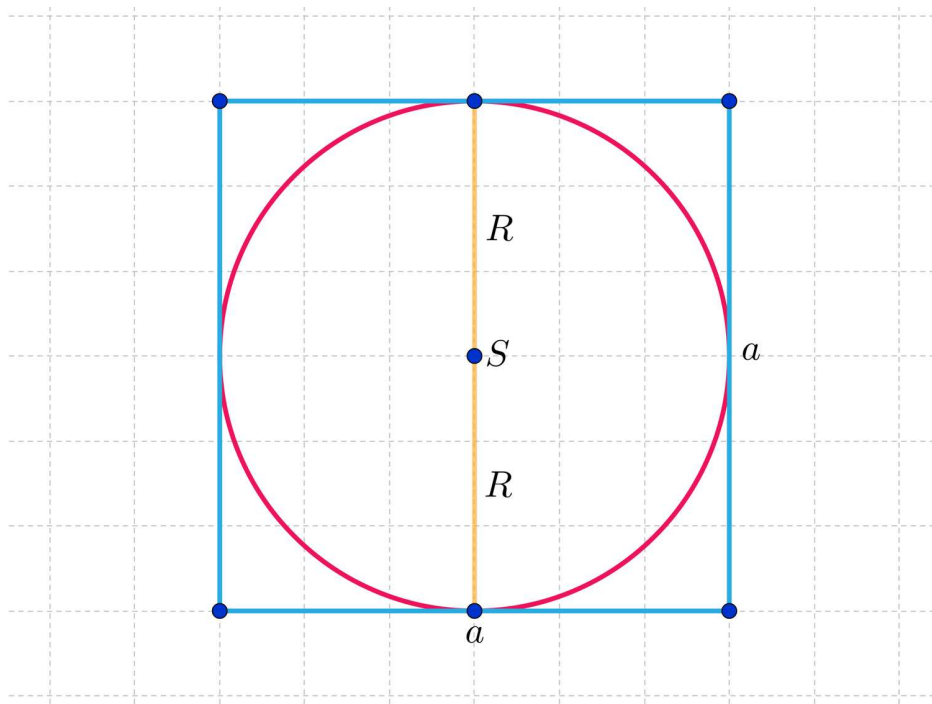
Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja: sześcian opisany na kuli

Sześcian jest opisany na kuli, jeśli kula jest styczna do każdej z jego ścian, czyli ma z każdą ścianą sześcianu tylko jeden punkt wspólny.

Możemy zamiennie używać określenia: sześcian jest opisany na kuli lub kula jest wpisana w sześcian.

We wszystkich przykładach i zadaniach będziemy posługiwać się przekrojem płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i równoległą do ściany sześcianu oraz oznaczeniami jak na poniższym rysunku:



a – długość krawędzi sześcianu,

R – promień kuli wpisanej w sześcian,

S – środek kuli wpisanej w sześcian.

Do wykonywania obliczeń w zadaniach przydadzą Ci się poniższe wzory.

Wzór na objętość sześcianu o krawędzi a

$$V = a^3$$

Wzór na objętość kuli o promieniu R

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Wzór na przekątną ściany sześcianu

$$\text{o krawędzi } a \quad a\sqrt{2}$$

Wzór na pole powierzchni całkowitej

sześcianu o krawędzi długości a

$$P_c = 6 \cdot a^2$$

Wzór na pole powierzchni kuli

o promieniu R $P = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

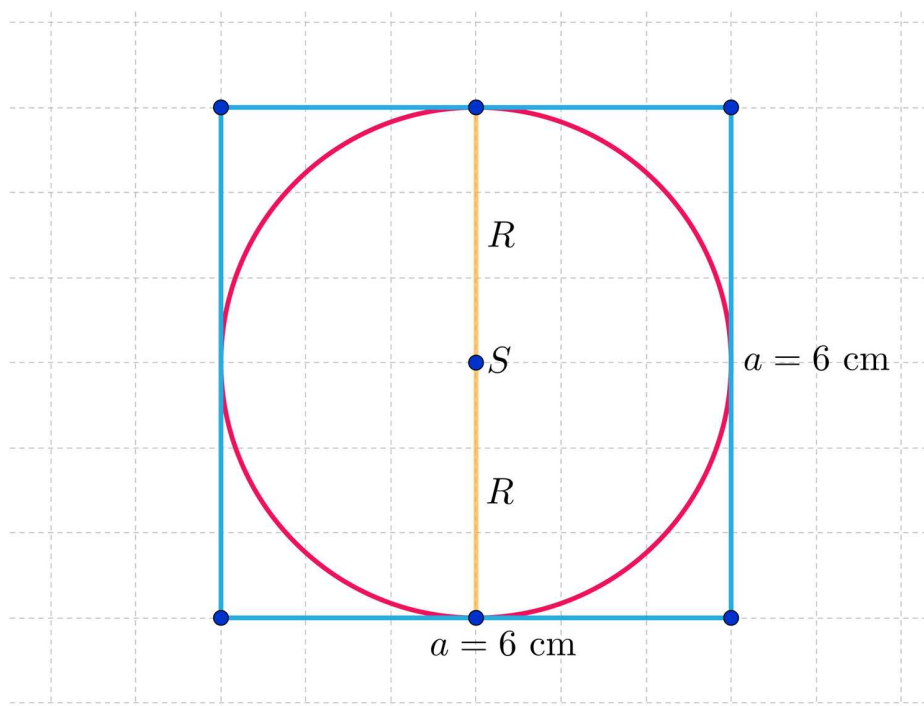
Wzór na przekątną sześcianu o krawędzi a

$$a\sqrt{3}$$

Przykład 1

Rozważmy sześcian o krawędzi długości 6 cm. Jaką objętość będzie miała kula wpisana w ten sześcian?

Wykonajmy rysunek, który jest przekrojem sześcianu opisanego na kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i równoległą do ściany sześcianu.



Krawędź sześcianu $a = 6$ cm. Promień kuli R stanowi połowę tej długości, czyli $R = \frac{1}{2}a = 3$ cm.

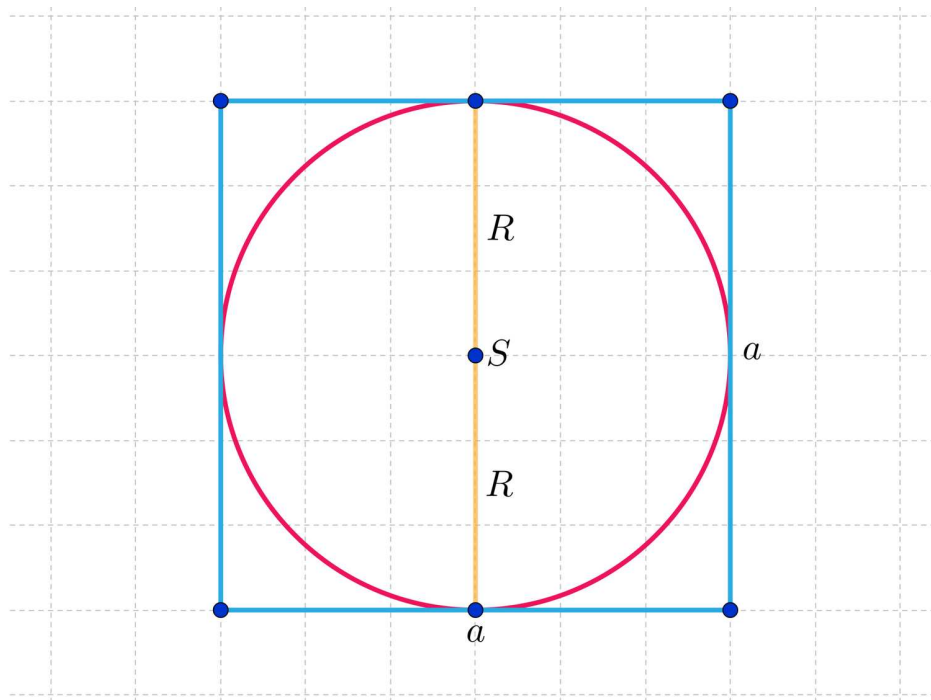
A zatem:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 27\pi = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Przykład 2

Rozważmy kulę o objętości 180π . Jaka będzie długość krawędzi sześcianu opisanego na tej kuli?

Wykonajmy rysunek, który jest przekrojem sześcianu opisanego na kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i równoległą do ściany sześcianu.



Mając daną objętość kuli możemy obliczyć jej promień. Wystarczy podstawić do wzoru $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Otrzymujemy równanie:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 180\pi$$

$$\frac{4}{3}R^3 = 180$$

$$R^3 = 135$$

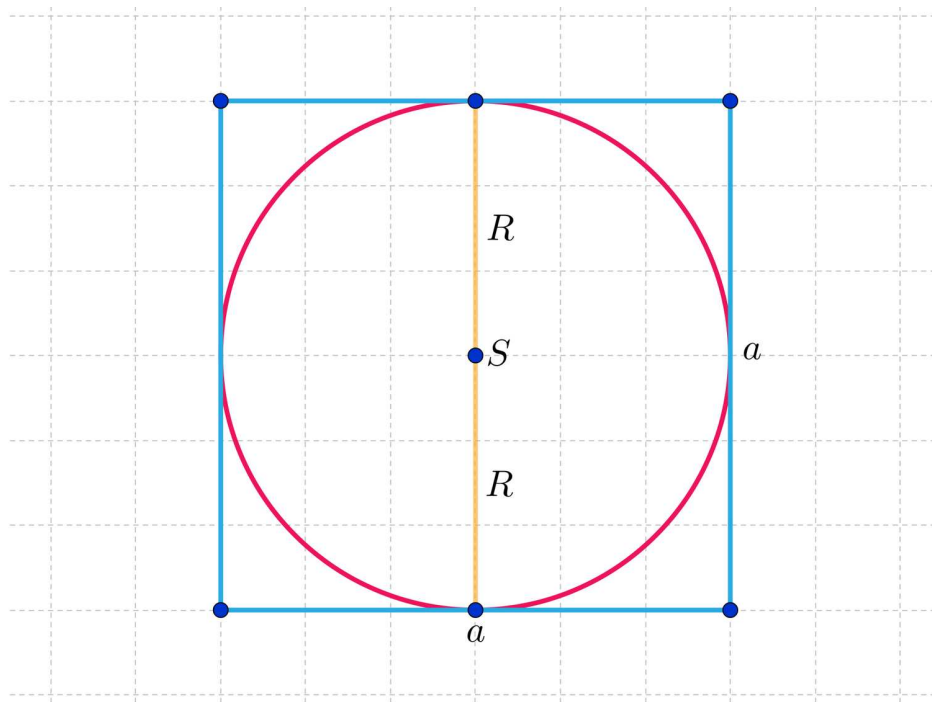
$$R = 3\sqrt[3]{5}.$$

$$\text{Stąd } a = 2R = 6\sqrt[3]{5}.$$

Przykład 3

Jaki procent objętości sześcianu stanowi objętość kuli, którą możemy wpisać w ten sześcian?

Wykonajmy rysunek, który jest przekrojem sześcianu opisanego na kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i równoległą do ściany sześcianu.



Przyjmijmy, że krawędź sześcianu ma długość a .

Zatem objętość tego sześcianu $V_s = a^3$.

Promień kuli wpisanej w ten sześcian $R = \frac{1}{2}a$. Zatem

$$V_k = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \pi a^3 = \frac{1}{6}\pi a^3.$$

Obliczamy stosunek objętości kuli do objętości sześcianu i wyrażamy go w procentach:

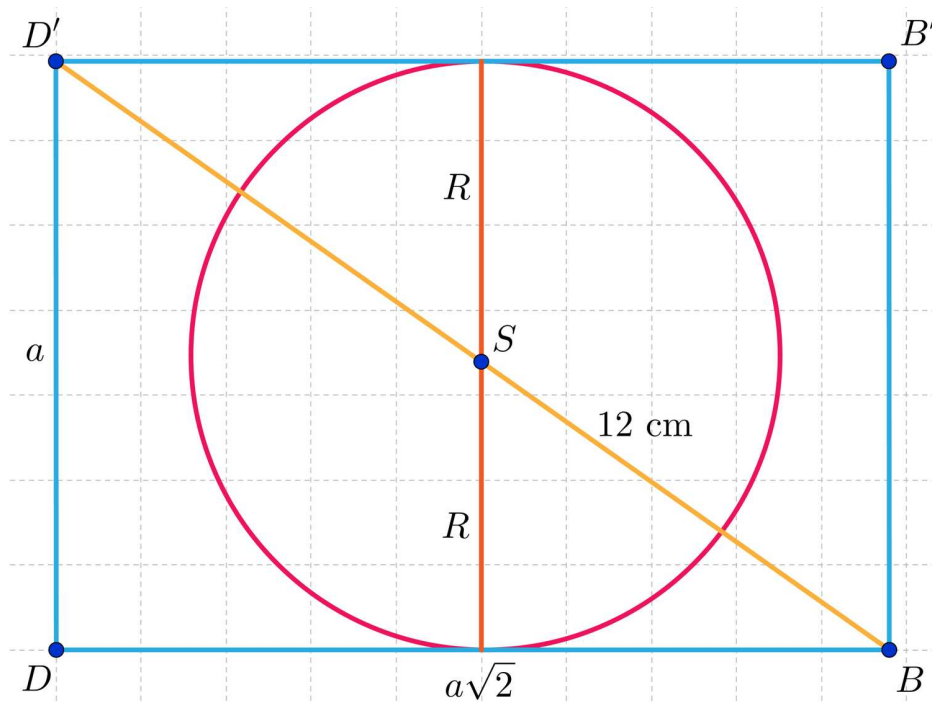
$$x = \frac{\frac{1}{6}\pi a^3}{a^3} \cdot 100\% \approx \frac{1}{6} \cdot 3,14 \cdot 100\% = 52\frac{1}{3}\%.$$

Przykład 4

Czy kulę o powierzchni $64\pi \text{ cm}^2$ można wpisać w sześcian o przekątnej 12 cm ?

Odpowiedź uzasadnimy rachunkowo.

Wykonajmy odpowiedni rysunek. Będzie to przekrój sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i przekątną podstawy.



Nasze zadanie to porównanie dwóch wartości: średnicy kuli i krawędzi sześcianu.

Aby obliczyć promień kuli rozwiązujemy równanie wykorzystując dane w zadaniu:

$$4\pi R^2 = 64\pi$$

$$R^2 = 16$$

$$R = 4$$

czyli $2R = 8$.

Do obliczenia długości krawędzi sześcianu wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BDD' (patrz rysunek).

$$a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 12^2$$

$$a^2 + 2a^2 = 144$$

$$3a^2 = 144$$

$$a^2 = 48 = 16 \cdot 3$$

$$a = 4\sqrt{3}.$$

Uwaga: Długość krawędzi sześcianu możemy również obliczyć wykorzystując wzór na przekątną sześcianu. Otrzymujemy wówczas równanie:

$$a\sqrt{3} = 12$$

$$a = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Zatem } 8 = \sqrt{64} > \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Średnica kuli jest większa niż krawędź sześcianu co oznacza, że kuli o powierzchni $64\pi \text{ cm}^2$ nie można wpisać w sześcian o przekątnej 12 cm.

Słownik

sześcian opisany na kuli

sześcian jest opisany na kuli, jeśli kula jest styczna do każdej z jego ścian, czyli ma z każdą ścianą sześcianu tylko jeden punkt wspólny

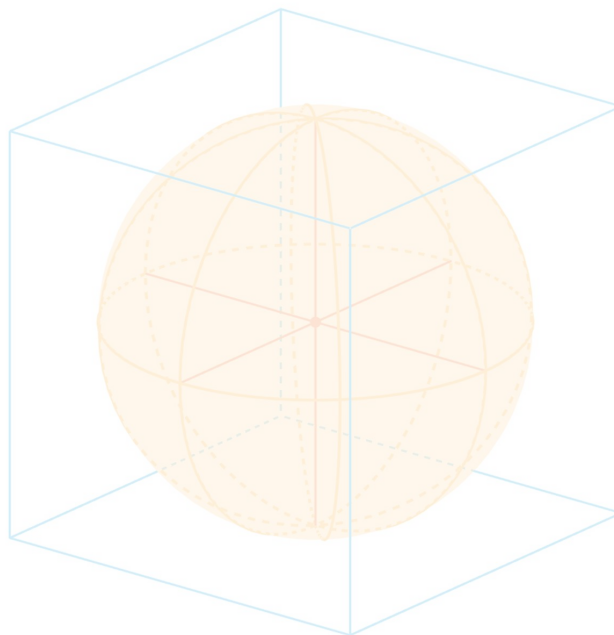
Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem Geogebry. Przedstawiono na nim sześcian opisany na kuli.

Narysuj w zeszycie:

- a) przekrój płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i równoległą do ściany sześcianu,
- b) przekrój płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i przekątną podstawy sześcianu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D16MDMpBG>

Polecenie 2

Na podstawie obserwacji apletu oceń prawdziwość podanych zdań, zaznaczając odpowiednio prawdę lub fałsz.

	Prawda	Fałsz
Średnica kuli wpisanej w sześcián jest równa połowie długości krawędzi tego sześciánu.	☐	☐
Punkt styczności kuli ze ścianą sześciánu, to punkt przecięcia przekątnych tej ściany, czyli „środek ściany”.	☐	☐
Środek kuli leży na przekątnej sześciánu.	☐	☐
W każdy prostopadłościan można wpisać kulę.	☐	☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Kula o promieniu 2,5 cm jest wpisana w sześcian o krawędzi 0,5 dm.	☐	☐
Kula o promieniu 3 dm jest wpisana w sześcian o przekątnej $3\sqrt{2}$ dm.	☐	☐
Kula o objętości 36π jest wpisana w sześcian o krawędzi 6	☐	☐

Ćwiczenie 2



Oblicz pole powierzchni kuli wpisanej w sześcian o objętości 216 cm^3 . Podaj cyfrę setek, dziesiątek i jednostki otrzymanego wyniku. Przyjmij przybliżenie $\pi \approx 3,14$. Uzupełnij poniższą lukę wpisując poprawną liczbę.

Odpowiedź: Pole powierzchni kuli wynosi $P =$.

Ćwiczenie 3



Wiemy, że w pewien prostopadłościan wpisano kulę o średnicy 4 cm. Czy dane te wystarczą do obliczenia poniższych wielkości? Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „TAK” albo „NIE”.

Zdanie	TAK	NIE
Objętość kuli wpisanej w ten prostopadłościan.	☐	☐
Objętość tego prostopadłościanu.	☐	☐
Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Ile wynosi objętość kuli wpisanej w sześcian o krawędzi długości 18? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 36π

☐ 7776π

☐ 972π

☐ 2916π

Ćwiczenie 5



Szklaną kulę o objętości $288\pi \text{ cm}^3$ chcemy zapakować w możliwie jak najmniejsze sześcienne kartonowe pudełko z pokrywką. Ile papieru zużyjemy na wykonanie takiego pudełka, nie licząc zakładki potrzebnych do jego sklejenia?

Ćwiczenie 6



Przeciągnij poprawną odpowiedź.

Stosunek pola powierzchni sześcianu do pola powierzchni kuli wpisanej w ten sześcian wynosi: .

$\frac{3}{\pi}$

$\frac{6}{\pi}$

3π

6π

$\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{3}$

Ćwiczenie 7



Krawędź sześcianu zwiększono 2 razy. Czy objętość kuli wpisanej w ten sześcian zwiększy się wówczas czterokrotnie? Wybierz uzasadnienie spośród podanych poniżej. Zaznacz poprawną odpowiedź.

- ☐ Nie, objętość kuli zwiększy się również dwukrotnie.
- ☐ Tak, skala podobieństwa $k = 2$ co oznacza, że objętość sześcianu zwiększy się 4 razy.
- ☐ Tak, ponieważ skala podobieństwa $k = 2$ co oznacza, że objętość sześcianu zwiększy się 8 razy, zatem objętość kuli również zwiększy się ośmiokrotnie.
- ☐ Nie, ponieważ skala podobieństwa $k = 2$ co oznacza, że objętość sześcianu zwiększy się 8 razy, zatem objętość kuli również zwiększy się ośmiokrotnie.
- ☐ Tak, objętość kuli zwiększy się również dwukrotnie.
- ☐ Nie, skala podobieństwa $k = 2$ co oznacza, że objętość sześcianu zwiększy się 4 razy.

Ćwiczenie 8



W sześcian o objętości $512x^3$ wpisano kulę. Oblicz sumę odległości środka kuli od wszystkich wierzchołków tego sześcianu.

Ćwiczenie 9



Wykaż, że stosunek objętości kuli opisanego na sześcianie, do objętości kuli wpisanej w ten sześcian wynosi $3\sqrt{3}$.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor – Szczęśniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sześcian opisany na kuli

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony.

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. stereometria,.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje sześcian opisany na kuli i potrafi naszkicować przekrój osiowy tej sytuacji,
- bada zależność między promieniem kuli wpisanej w sześcian a krawędzią sześcianu,
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość kuli oraz sześcianu,
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych,
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz przypomnienie zależności między polami powierzchni i objętościami brył podobnych.

Faza wstępna:

1. Nauczyciela podaje temat: „Sześcian opisany na kuli” i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prowadzi z uczniami rozmowę w oparciu o aplet i pytania zawarte w poleceniu.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 7 grup. Każda grupa otrzymuje do rozwiązania jedno zadanie spośród zadań 1 – 7 w części „Sprawdź się”.
3. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/ powinnam zapamiętać, że”.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i rozwiązują zadania 8 i 9 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Bryły w 3D

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania na temat sześcianu opisanego na kuli.