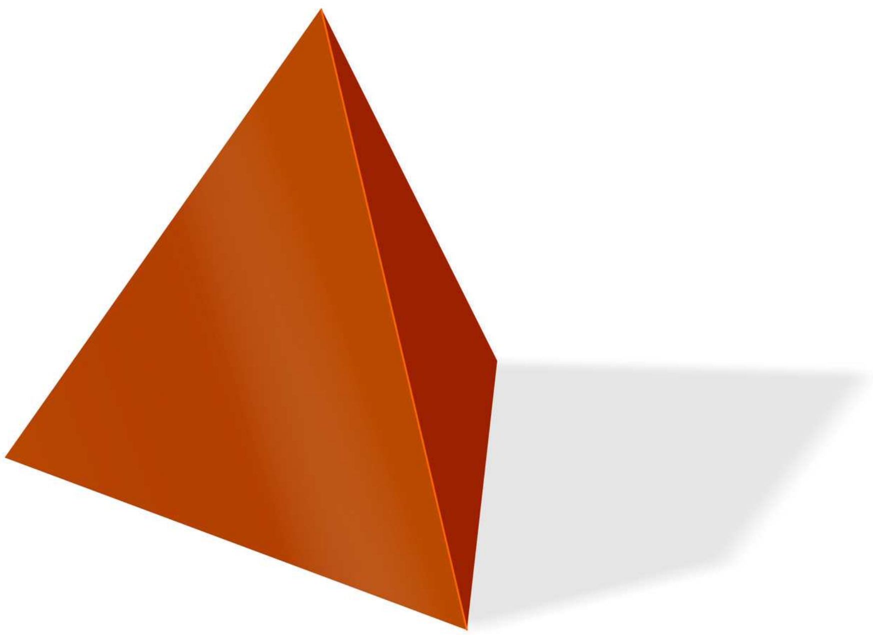
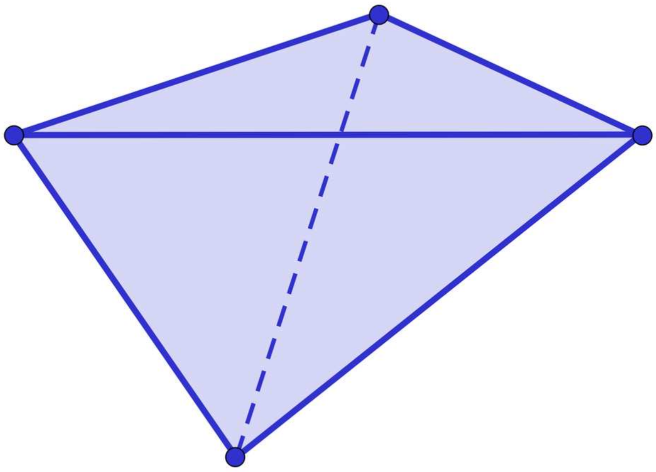
Objętość ostrosłupa trójkątnego

Objętość ostrosłupa trójkątnego

Źródło: Chris Karidis, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Czy wiesz, co to jest sympleks? Słowo sympleks oznacza prosty. Nazwę sympleks noszą pewne obiekty matematyczne. Rozważa się je w przestrzeniach o różnych wymiarach. Na prostej sympleksem jest odcinek, na płaszczyźnie trójkąt, a w przestrzeni czworościan.





Wyobraźmy sobie wazon w kształcie ostrosłupa trójkątnego. Ile litrów wodny należy wlać do takiego wazonu, aby zapełnić go w całości? Na pytanie to uzyskamy odpowiedź, gdy znając wymiary wazonu obliczymy jego objętość.

> **Twoje cele**
>
> - Obliczysz objętość ostrosłupa trójkątnego.
> - Wykonasz obliczenia geometryczne z wykorzystaniem trygonometrii i znanych twierdzeń.

Przeczytaj

W tym materiale skupimy się na obliczaniu objętości ostrosłupa trójkątnego.

Ostrosłup trójkątny, to taki ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt. Ściany boczne ostrosłupa są trójkątami o wspólnym wierzchołku zwanym wierzchołkiem ostrosłupa. Ostrosłup trójkątny jest inaczej nazywany **czworościanem**.

Wśród ostrosłupów trójkątnych możemy wyróżnić ostrosłupy:

- proste,
- pochyłe.

Ostrosłup trójkątny nazywamy ostrosłupem **prostym**, jeśli spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie. Ostrosłup prosty ma wszystkie krawędzie boczne równej długości.

Ostrosłup trójkątny pochyły nie spełnia opisanej powyżej własności.

Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z podstawą kąty równej miary, to spodek wysokości jest jednakowo oddalony od wierzchołków podstawy jest, więc *środkiem okręgu opisanego na podstawie*.

Jeśli wszystkie ściany boczne tworzą z podstawą kąty równej miary, to spodek wysokości jest jednakowo oddalony od krawędzi podstawy. Jest więc ś*rodkiem okręgu wpisanego w podstawę*.

Objętość ostrosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

gdzie:
P_p – oznacza pole podstawy ostrosłupa,

H – wysokość bryły.

Dla czworościanu foremnego o krawędzi a:

Objętość:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Zależność objętości ostrosłupa trójkątnego od objętości graniastosłupa

Zapoznaj się z poniższym apletem. Zauważ jak zmienia się objętość ostrosłupa trójkątnego względem objętości graniastosłupa (sześcianu). Przesuwając punkt A lub B zmieniasz długość krawędzi podstawy, gdy przesuniesz punkt G zmieniasz wysokość ostrosłupa oraz graniastosłupa. Czy zauważasz związek miedzy objętościami tych brył?

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DEey9jBxa

> **Ważne!**
>
> Pamiętaj, że objętość ostrosłupa jest jedną trzecią objętości graniastosłupa o tym samym polu podstawy oraz wysokości.

Przykład 1

Obliczymy objętość ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości 8, a krawędzie boczne są równe i tworzą z podstawą kąt o mierze 60°.

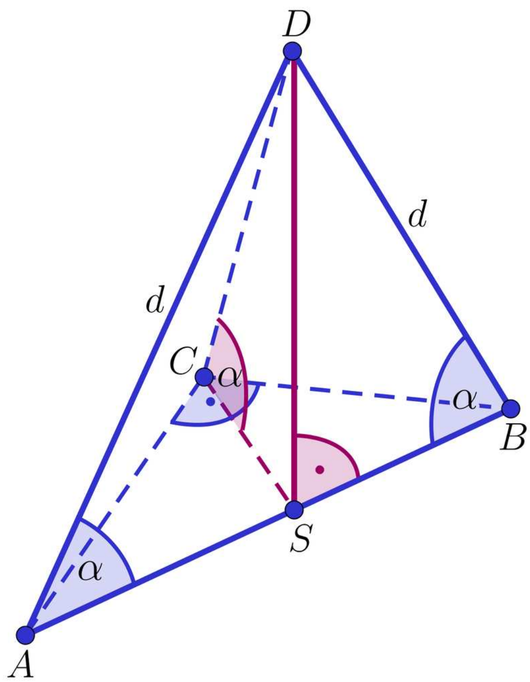
Rozwiązanie

Zasadniczym elementem zadania jest ustalenie, gdzie znajduje się spodek wysokości ostrosłupa.

Wiemy, że ostrosłup ma krawędzie boczne równej długości, więc spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie.

W tym przypadku jest to środek przeciwprostokątnej, bo podstawą jest trójkąt prostokątny.

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Wiemy, że $|AC| = |BC| = 8$ są długościami ramion trójkąta prostokątnego w podstawie, więc $|AB| = 8\sqrt{2}$.

Oznaczamy $|AD| = |BD| = |CD| = d$, bo z treści zadania wynika, że w ostrosłupie prostym krawędzie boczne są równej długości, miara kąta $\alpha = 60^\circ$.

Wysokość ostrosłupa to odcinek DS, oznaczamy $|DS| = H$.

Krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, stad wniosek, że trójkąt ABD jest równoboczny i $d = |AD| = |BD| = |AB| = 8\sqrt{2}$.

Wysokość ostrosłupa jest wysokością ściany bocznej ABD, zatem:

$H = \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$

Mamy już pole podstawy, możemy obliczyć objętość ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 4\sqrt{6} = \frac{128\sqrt{6}}{3}$

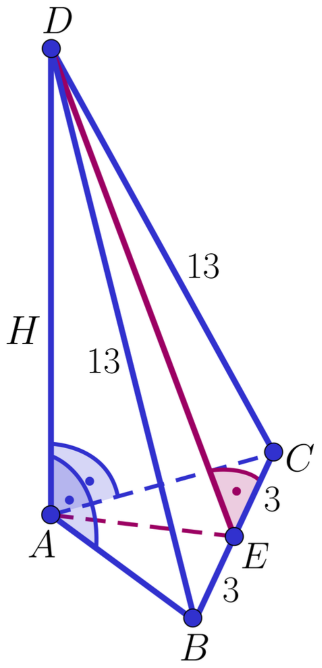
$V = \frac{128\sqrt{6}}{3}$.

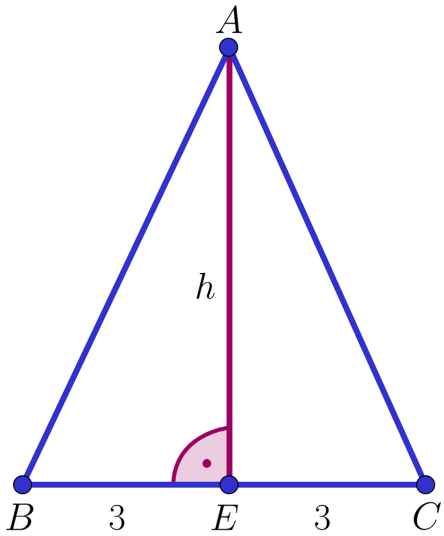
Przykład 2

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC, a krawędź AD jest wysokością ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$ i pole jednej ściany bocznej prostopadłej do podstawy wynosi 30. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Rozwiązanie

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.





Oznaczymy długość wysokości ostrosłupa przez H, z przystających trójkątów prostokątnych ABD i ACD na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$$

$$|AB|^2 + H^2 = 13^2$$

$$|AB| = |AC| = \sqrt{13^2 - H^2} = \sqrt{169 - H^2}$$

Zauważmy, że trójkąt ABC jest równoramienny i oznaczamy długość jego wysokości $|AE| = h$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE mamy:

$$|AB|^2 = h^2 + 3^2$$

$$h = \sqrt{|AB|^2 - 9} = \sqrt{169 - H^2 - 9} = \sqrt{160 - H^2}$$

Możemy teraz wykorzystać podane pole ściany bocznej ostrosłupa.

$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{169 - H^2} \cdot H$

$30 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{169 - H^2} \cdot H$

$60 = \sqrt{169 - H^2} \cdot H$

Podnosząc obie strony do kwadratu mamy:

$3600 = 169H^2 - H^4$

$H^4 - 169H^2 + 3600 = 0$

Otrzymaliśmy równanie dwukwadratowe, więc podstawmy $H^2 = t$, gdzie $t \geq 0$

$t^2 - 169t + 3600 = 0$

$\Delta = 169^2 - 4 \cdot 3600 = 28561 - 14400 = 14161$

$\sqrt{\Delta} = 119$

$t = \frac{169-119}{2} = 25$ lub $t = \frac{169+119}{2} = 144$

Stąd wyznaczamy $H = 5$ lub $H = 12$ bo $H > 0$, mamy więc dwa rozwiązania.

Należy teraz obliczyć pole podstawy i objętość ostrosłupa w każdym z przypadków.

1. **Przypadek dla** $H = 5$.
   Obliczamy pole podstawy:
   $P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 3 \cdot \sqrt{160 - H^2} = 3 \cdot \sqrt{160 - 25} = 3\sqrt{135} = 9\sqrt{15}$
   Obliczamy objętość ostrosłupa:
   $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$
   $V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{15} \cdot 5 = 15\sqrt{15}$

2. **Przypadek dla** $H = 12$.

   Obliczamy pole podstawy:

   $P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 3 \cdot \sqrt{160 - H^2} = 3 \cdot \sqrt{160 - 144} = 12$

   Obliczamy objętość ostrosłupa:

   $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

   $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$

Odpowiedź:

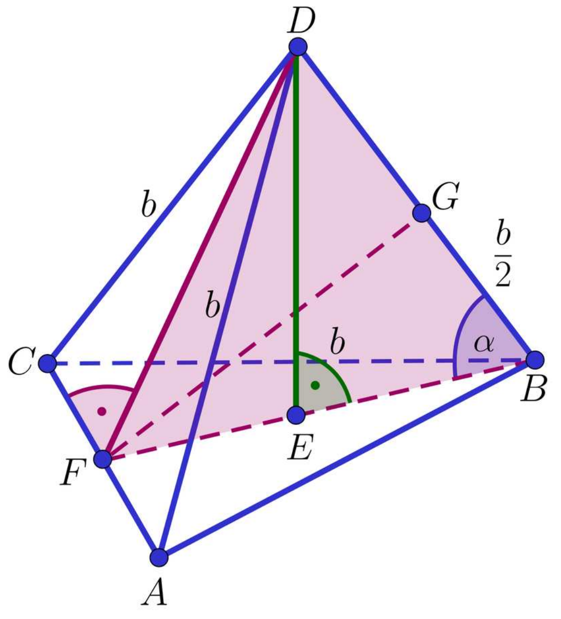
$V = 15\sqrt{15}\ \left[\mathrm{j}^3\right]$ lub $V = 48\ \left[\mathrm{j}^3\right]$.

Przykład 3

W ostrosłupie trójkątnym wszystkie krawędzie boczne i dwie krawędzie podstawy mają długość b, a kąt nachylenia krawędzi bocznej, przechodzącej przez wierzchołek wspólny równych krawędzi podstawy, do płaszczyzny podstawy ma miarę α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Korzystając z trójkąta DEB możemy obliczyć wysokość ostrosłupa

$\frac{|DE|}{|DB|} = \sin\alpha$ to $|DE| = b \cdot \sin\alpha$

Zauważmy, że trójkąty AFD i AFB są przystające.

Zatem $|FD| = |FB|$ i trójkąt BFD jest równoramienny, stąd punkt G jest środkiem odcinka DB.

Z trójkąta FBG mamy:

$\frac{|GB|}{|FB|} = \cos\alpha$ to $|FB| = \frac{b}{2\cos\alpha}$

Teraz z trójkąta prostokątnego ABF obliczamy długość odcinka AF.

$$|AF|^2 + |FB|^2 = |AB|^2$$

$$|AF|^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2\cos\alpha}\right)^2 = b^2 - \frac{b^2}{4\cos^2\alpha}$$

$$|AF| = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4\cos^2\alpha}} = b\sqrt{\frac{4\cos^2\alpha - 1}{4\cos^2\alpha}} = b\sqrt{\frac{4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha}}$$

$$|AF| = \frac{b}{2}\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Zatem objętość jest równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2|AF| \cdot |FB| \cdot |DE|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{b}{2\cos\alpha} \cdot b\sin\alpha$$

$$V = \frac{b^3}{12} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Odpowiedź:

$$V = \frac{b^3}{12} \cdot \text{ tg } \alpha \cdot \sqrt{3 - \text{ tg}^2 \ \alpha} \ \left[\text{j}^3\right].$$

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie

spodek wysokości bryły

rzut prostokątny wierzchołka bryły na płaszczyznę podstawy

ostrosłup prawidłowy trójkątny

ostrosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

czworościan foremny

ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi

Symulacja interaktywna

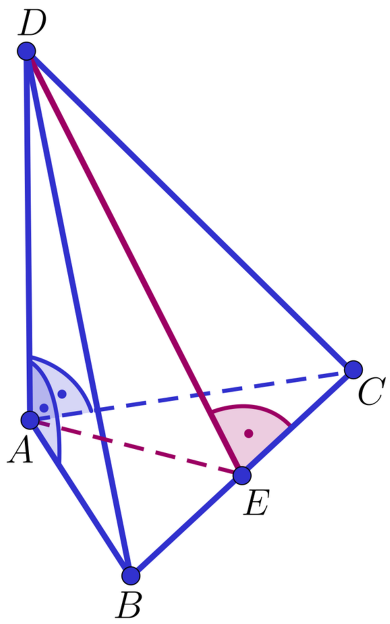
Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą symulacją interaktywną. Zauważ jak zmienia się objętość ostrosłupa trójkątnego, gdy zmienia się krawędź podstawy lub wysokość ostrosłupa. Użyj suwaków, by zmienić długość krawędzi podstawy a i wysokość H ostrosłupa.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DKsZWJ0TK

Polecenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa z rysunku, gdy $|AB| = 4$, wysokość $|AD| = 5$. Wiedząc, że w podstawie jest trójkąt prostokątny równoramienny.



Polecenie 3

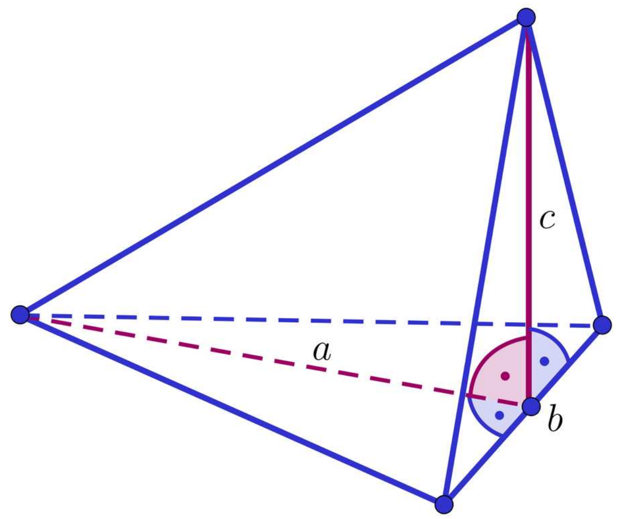
Ustaw w symulacji punkt D tak, aby odcinek H zwiększył się dwukrotnie oraz punkt A tak, aby krawędź podstawy zwiększyła się dwukrotnie. Oblicz, jaką częścią objętości pierwotnej jest objętość ostrosłupa po zmianie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dwie sąsiednie ściany ostrosłupa trójkątnego są prostopadłe. Ich wspólna krawędź ma długość b, zaś wysokości tych ścian opuszczone na wspólną krawędź są równe a oraz c, jak na rysunku.



Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o podstawie $|AB| = b$ i kącie α pomiędzy ramionami. Krawędź CD jest wysokością ostrosłupa, a kąt nachylenia ściany ABD do podstawy ostrosłupa jest równy β. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Biernacka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość ostrosłupa trójkątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza objętość ostrosłupa trójkątnego
- stosuje znane twierdzenia w obliczaniu objętości ostrosłupa trójkątnego
- wykorzystuje związki między odcinkami ostrosłupa trójkątnego w celu budowania rozwiązania zadania
- wykorzystuje związki trygonometryczne do obliczania objętości ostrosłupa trójkątnego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- mapa myśli
- metoda tekstu przewodniego

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca induwidualna
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- przykłady brył ostrosłupa trójkątnego, modele rzeczywiste lub wirtualne
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów i nauczyciela
- projektor multimedialny

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi, aby uczniowie przypomnieli sobie wiadomości dotyczące własności ostrosłupów oraz obliczania objętości ostrosłupów:
    - Objętość ostrosłupa
    - Ostrosłup i jego właściwości

Faza wstępna:

1. Uczniowie przygotowują mapę myśli przedstawiającą własności ostrosłupów w szczególności ostrosłupa trójkątnego, prostego oraz pochyłego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie w grupach metodą tekstu przewodniego analizują poszczególne przykłady obliczania pola powierzchni ostrosłupa trójkątnego. Wspólnie wyjaśniają sposób rozwiązania opisany w przykładach.
2. Nauczyciel poleca, aby uczniowie samodzielnie rozwiązali zadania z polecenia 1 i 2.
3. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne w celu utrwalenia i sprawdzenia nabytych umiejętności.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Ostrosłup i jego właściwości
- Objętość ostrosłupa

Wskazówki metodyczne:

W sytuacji, gdy nauczyciel przewiduje, że nie uda mu się zrealizować wszystkich zaplanowanych zagadnień podczas jednej lekcji, może tak zorganizować lekcję, żeby symulację interaktywną wykorzystać jako element pracy domowej. Symulacje interaktywną można wykorzystać w lekcji „Rodzaje ostrosłupów” jako model ostrosłupa, którego postawą jest trójkąt prostokątny równoramienny.