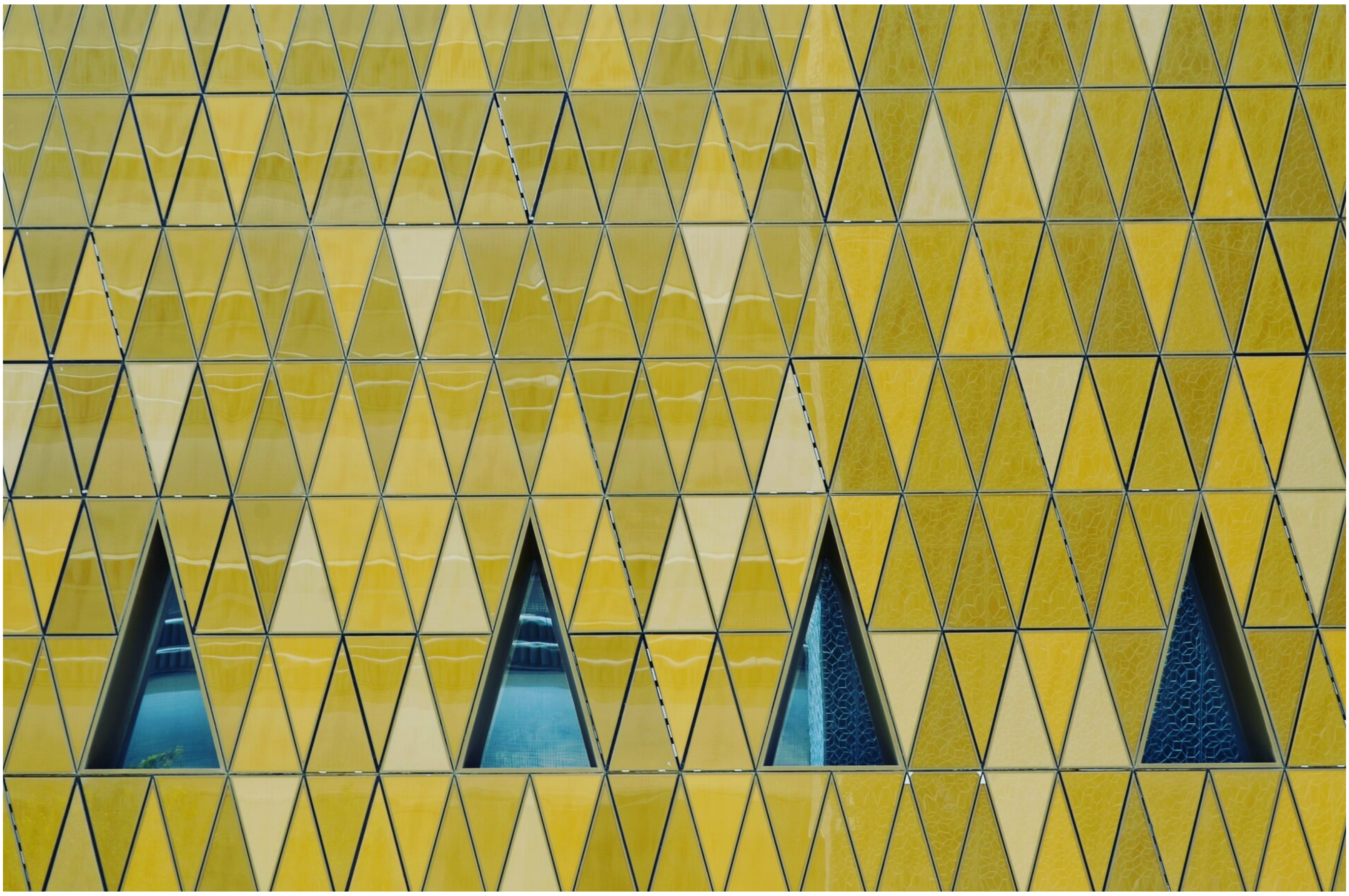

Funkcje trygonometryczne sinusa podwojonego kąta - zastosowania do obliczeń

Źródło: Chris Ashe, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Na poprzednich lekcjach poznałeś wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów oraz wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta. Na tej lekcji skupimy się na wzorze na sinus podwojonego kąta. Za pomocą tego wzoru będziemy mogli dowodzić tożsamości, obliczać wartości sinusa podwojonego kąta, gdy znane są funkcje trygonometryczne pojedynczego kąta.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz wzór na sinus podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów.
> - Zastosujesz wzór na sinus podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości.

Przeczytaj

Zacznijmy od przypomnienia wzorów na sinus i cosinus podwojonego kąta:

> **Twierdzenie: o funkcjach podwojonego kąta**
>
> 1. Dla dowolnych kątów α zachodzą wzory:
>
> $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$
>
> $$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$
>
> 2. Dla takich kątów α, że $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:
>
> $$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}.$$

W wielu zadaniach zamiast poznanych wzorów wykorzystuje się wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta uzależnione od tangensa tego kąta. Teraz przedstawimy taką zależność dla $\sin 2\alpha$.

W znanym wzorze na $\sin 2\alpha$ zapiszmy za pomocą jedynki trygonometrycznej:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$.

Rozszerzmy ułamek przez $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Otrzymujemy wówczas:

$\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$.

Wykorzystajmy zależność: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$\frac{2\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}^2\alpha+1}$.

Zwróćmy uwagę na to, że w trakcie przekształceń dzieliliśmy przez $\cos\alpha$, a zatem konieczne będzie założenie, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zapiszmy zatem twierdzenie:

> **Twierdzenie: o sinusie podwojonego kąta**
>
> Założenie: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
>
> Wówczas zachodzi wzór:
>
> $\sin 2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$.

A teraz przedstawimy kilka zastosowań poznanych wzorów do rozwiązania typowych zadań obliczeniowych.

Przykład 1

Obliczymy $\sin 2\alpha$, jeżeli $\sin\alpha = -0,8$ oraz $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

Rozwiązanie:

Ponieważ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, więc $\cos\alpha < 0$.

Na początku, korzystając z jedynki trygnometrycznej, obliczymy $\cos\alpha$:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-(-0,8)^2} = -\sqrt{0,36} = -0,6$.

Korzystając ze wzoru na $\sin 2\alpha$ zapisujemy:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = (-0,8)(-0,6) = 0,48$.

Przykład 2

Obliczmy wartość wyrażenia $\sin\alpha - \cos\alpha$, jeżeli wiadomo, że $\sin 2\alpha = -\frac{7}{9}$.

Rozwiązanie:

Podnieśmy do kwadratu wyrażenie, którego wartość mamy obliczyć:

$\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$.

Zauważmy, że w zapisie pojawia się wyrażenie, które można zastąpić $\sin 2\alpha$:

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \sin 2\alpha$.

Stąd otrzymujemy:

$\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)^2 = 1 - \left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{16}{9}$.

Stąd otrzymujemy odpowiedź: $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{3}$ lub $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{4}{3}$.

Przykład 3

Obliczmy wartość wyrażenia $\sin\frac{\alpha}{2}$ jeżeli wiadomo, że $\sin\alpha = -0,8$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Rozwiązanie:

Do rozwiązania zadania wykorzystamy wzór na sinus podwojonego kąta :

$\sin 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$.

Niech $\alpha = 2\beta$. Wóczas wzór przyjmuje postać:

$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Podstawiamy do wzoru $\sin\alpha = -0,8$.

Otrzymujemy równanie:

$-0,8 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$,

z którego wyliczymy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

$2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 2 = 0$.

Podstawiamy nową zmienną $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $2t^2 + 5t + 2 = 0$:

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$t = -2$ lub $t = -\frac{1}{2}$

Wobec tego: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$ lub $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ponieważ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, więc $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$. Stąd wynika, że $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$.

Obliczymy teraz $\sin\frac{\alpha}{2}$:

jeżeli $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$, to $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Wobec tego $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy:

$\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$, czyli $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$.

Ponieważ $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$, więc $\sin\frac{\alpha}{2}$ jest liczbą dodatnią, czyli $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 4

Udowodnimy, że równość:

$\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

jest tożsamością.

Dowód:

Zapiszmy założenia:

$2\sin\alpha + \sin 2\alpha \neq 0$,

$1 + \cos\alpha \neq 0$.

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta zapiszmy lewą stronę następująco:

$L = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = P$,

co kończy dowód tożsamości.

Słownik

jedynka trygonometryczna

podstawowa tożsamość trygonometryczna: dla każdego kąta α zachodzi równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

o sinusie podwojonego kąta

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to:

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj polecenia znajdujące się pod nią.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5d0kgmUI

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego funkcji trygonometrycznych sinusa podwojonego kąta.

Polecenie 2

Uzasadnij, że równość

$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

jest tożsamością.

Polecenie 3

Udowodnij, że $\frac{\sin 10^\circ \cdot \left(1+\mathrm{tg}^2 5^\circ\right)}{\mathrm{tg} 5^\circ} = 2.$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

Ćwiczenie 8

Oblicz wartość wyrażenia $\sin(\pi + 2\alpha)$ jeżeli wiadomo, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje trygonometryczne sinusa podwojonego kąta – zastosowania do obliczeń

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór na sinus podwojonego kąta do obliczania wartości innych kątów,
- dowodzi tożsamości stosując wzór na sinus podwojonego kąta.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji, nawiązując do zagadnień opisanych w sekcji „Wprowadzenie”. Omawia cele lekcji.
2. Nauczyciel przedstawia uczniom cel zajęć oraz wspólnie ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum pięć pytań do tekstu. Uwaga: każde z pytań musi rozpoczynać się od słowa „dlaczego”. Następnie spacerują po klasie i na znak umówionego dźwięku szukają kogoś do pary, zadają i odpowiadają na pytania sformułowane podczas czytania tekstu. Po zakończonym spacerze młodzież wykonuje ćwiczenia nr 1-4 w sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy - pierwsza grupa rozwiązuje Polecenie 2, druga - Polecenie 3. Wspólnie z nauczycielem wyjaśniają zaistniałe wątpliwości.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenie nr 5 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Tożsamości trygonometryczne
- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Funkcje trygonometryczne sinusa podwojonego kąta - zastosowania do obliczeń”.