



## Łączenie oporników w zadaniach

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: <https://lovepik.com/image-605724391/blue-big-data-internet-banner-poster-background.html> [dostęp 10.07.2022].

## Czy to nie ciekawe?

Wiele skomplikowanych połączeń oporników można zastąpić jednym oporem zastępczym. Dzięki temu, skomplikowane zadanie staje się proste. Jeśli chcesz poznać sposoby, które warto zastosować do upraszczania schematów elektrycznych, zapoznaj się z tym e-materiałem.

### Twoje cele

- przypomnisz sobie pojęcie oporu zastępczego układu oporników,
- poznasz różne metody postępowania, prowadzące do jego wyznaczenia,
- przeanalizujesz trudne problemy i rozłożysz je na łatwe zadania,
- zastosujesz zdobyte umiejętności do rozwiązywania zadań,
- połączysz wiedzę z fizyki i matematyki do wyznaczenia własności obwodów elektrycznych.

# Przeczytaj

---

## Warto przeczytać

**Opór zastępczy** to taka wartość oporu jednego opornika zastępującego cały ich układ, że zewnętrzne parametry elektryczne układu jako całości - napięcie i natężenie prądu - są takie same. Więcej na ten temat można przeczytać w e-materiale „Jak zdefiniować opór zastępczy?”.

Poniżej znajdziesz spis sposobów, jakie można zastosować, by uprościć skomplikowane układy oporników i łatwo obliczyć ich opory zastępcze. Rozwiązując zadania sprawdzisz, czy potrafisz zastosować nasze rady w praktyce.

### Połączenie szeregowe i równoległe

Metodę wyznaczania oporów zastępczych w tych podstawowych sytuacjach wytłumaczyliśmy w innych e-materiałach. Tu podamy więc tylko, dla porządku i Twojej wygody, odpowiednie wzory.

Opór zastępczy  $n$  oporników połączonych szeregowo jest sumą oporów poszczególnych elementów:

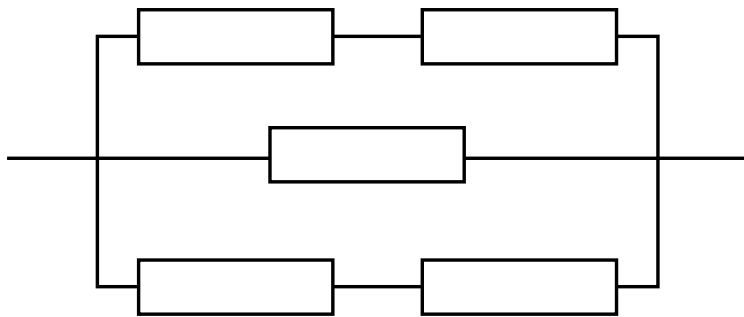
$$R_{zast} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

Odwrotność oporu zastępczego  $n$  oporników połączonych równoległe jest sumą odwrotności oporów poszczególnych elementów:

$$\frac{1}{R_{zast}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

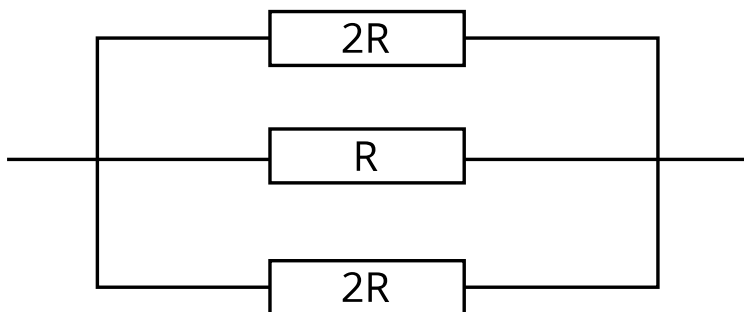
### Kombinacja połączeń szeregowych i równoległych

W niektórych układach oporników można wyodrębnić fragmenty lub grupy oporników połączonych szeregowo lub równoległe. Stosując kolejne uproszczenia schematów można łatwo obliczyć ich opór zastępczy. W przykładzie przedstawionym na Rys. 1. widzimy trzy elementy połączone równoległe, z których górny i dolny stanowią bloki oporników połączonych szeregowo.



Rys. 1. Układ oporników będący kombinacją połączeń szeregowych i równoległych

Jeśli wszystkie oporniki mają jednakowy opór o wartości  $R$ , układ ten możemy zastąpić schematem pokazanym na Rys. 2. Wykorzystaliśmy tu właściwości połączenia szeregowego.



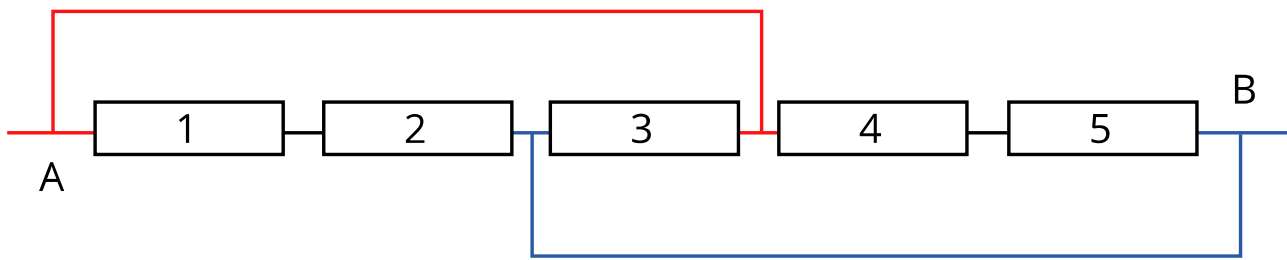
Rys. 2. Układ zastępczy, upraszczający schemat z Rys. 1.

Opór zastępczy ( $R_z$ ) całego układu możemy teraz łatwo policzyć wykorzystując właściwości połączenia równoległego:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{4}{2R} \Rightarrow R_z = \frac{1}{2}R$$

### Zamienianie schematów połączeń na równoważne

Niektóre schematy można zamienić tak, by łatwiej zobaczyć podstawowe połączenia szeregowo i równoległe. Dokonując takiego „przerysowania” układu należy pamiętać jedynie o tym, by w nowym układzie połączone były ze sobą te same oporniki, co w pierwotnym. Położenie oporników i przebieg przewodów łączących można dowolnie zmieniać. Przykład pokazano na Rys. 3.



Rys. 3. Skomplikowany układ oporników, który można „przerysować” na układ połączeń szeregowych i równoległych

Punkt A połączony jest jednocześnie z opornikiem 1, 3 i 4 (połączenia czerwone), a więc wpływający tędy prąd dzieli się na trzy części tak, jak przy połączeniu równoległym tych trzech oporników. Podobnie, punkt B łączy oporniki 2, 3 i 5 (połączenia niebieskie).  
 Pomiędzy czerwonym punktem A a niebieskim B, znajdują się: a) oporniki 1 i 2, b) opornik 3, c) oporniki 4 i 5. Opierając się na tych spostrzeżeniach przerysuj układ na taki, w którym od razu widać połączenia szeregowo i równoległe. Jeśli otrzymasz układ z Rys. 1 – gratulujemy. To poprawna odpowiedź.

### Korzystanie z symetrii obwodu

Symetria schematów połączeń może doprowadzić nas do dwóch rodzajów wniosków.

1. Dwa punkty mają ten sam potencjał – wtedy można te punkty połączyć przewodem lub opornikiem albo wykreślić ze schematu łączący je element. Między tymi punktami nie popłynie prąd, więc dodanie lub usunięcie elementów może ułatwić nam uzyskanie prostych połączeń szeregowych lub równoległych.

W przykładzie na Rys. 4., z symetrii wynika, że punkty B i F mają taki sam potencjał, więc można je połączyć przewodem. Oporniki 1 i 2 są więc połączone równoległe. To samo dotyczy punktów C i E oraz oporników 4 i 5.

2. Natężenie prądu wpływającego do węzła jest równe natężeniu jednego z prądów wypływających – wtedy oba te przewody możemy usunąć z węzła i połączyć w jeden, oddzielny przewód.

W przykładzie na Rys. 4, z symetrii wynika, że natężenia prądów płynących przez oporniki 8 i 11 są takie same. Można je więc wyłączyć ze środkowego węzła i uznać, że są ze sobą połączone szeregowo w gałęzi rozpiętej między punktami F i C. To samo dotyczy oporników 12 i 9. Podobnie, oporniki 7 i 10 można wyłączyć z węzła, połączyć ze sobą i taka gałąź będzie połączona równoległe z wejściem i wyjściem z całego układu.

Korzystając z powyższych spostrzeżeń, dokonano przekształcenia skomplikowanego obwodu na taki, w którym widać połączenia szeregowo i równoległe (patrz Rys. 4.).

Odwrotność oporu zastępczego czterech centralnych gałęzi połączonych równolegle (opory 3, 12+9, 8+11, 6) wynosi:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$$

Górna część obwodu jest połączeniem szeregowym dwóch układów równoległych i obliczonego powyżej układu centralnego, a więc:

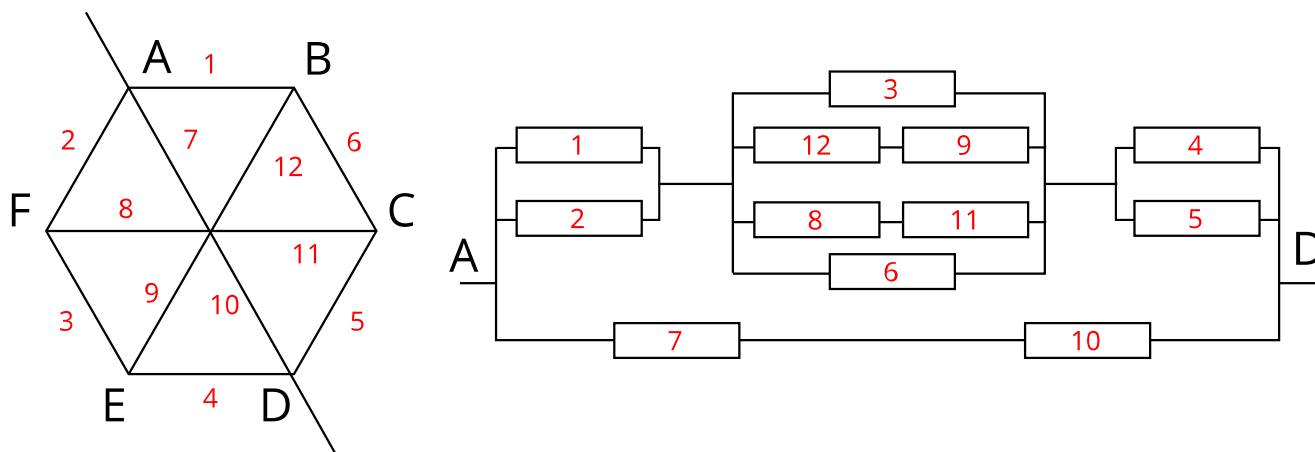
$$R_g = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{2} = \frac{4}{3}R$$

Obliczony w ten sposób opór zastępczy jest połączony z dolną gałęzią równolegle, więc:

$$\frac{1}{R_{zast}} = \frac{3}{4R} + \frac{1}{2R} = \frac{5}{4R}$$

Opór zastępczy całego sześciokąta z przekątnymi jest więc równy:

$$R_{zast} = \frac{4}{5}R$$



Rys. 4. Zamiana 12 jednakowych oporników (o wartości  $R$ ) w formie sześciokąta z przekątnymi na układ połączeń szeregowych i równoległych

### Wykorzystanie praw Kirchhoffa i definicji oporu zastępczego

W niektórych schematach oporniki nie są połączone ani szeregowo ani równolegle i żaden z powyższych sposobów nie może zostać zastosowany. Wtedy należy napisać równania **praw Kirchhoffa** dla tego obwodu tak, by znaleźć napięcie panujące na końcach układu oraz prąd wpływający do niego (lub wypływający z niego). Stosując definicję oporu zastępczego oraz **prawo Ohma**, należy podzielić tak uzyskane wartości: napięcie przez natężenie prądu.

Tę metodę obliczeń można zastosować w każdej sytuacji, ale korzystanie ze sposobów wymienionych powyżej jest czasami postępowaniem łatwiejszym i szybszym.

Zachęcamy do zapoznania się z e-materiałami poświęconymi sposobom rozwiązywania zadań z wykorzystaniem II prawa Kirchhoffa, np. „Analiza dodawania i odejmowania napięć w obwodzie, czyli zastosowanie II prawa Kirchhoffa”.

## Słowniczek

### **opór zastępczy**

(ang.: equivalent resistance) Każdy element obwodu elektrycznego posiada swój opór. Sposób połączenia tych elementów ma wpływ na opór całego układu. Opór zastępczy oporników połączonych szeregowo jest równy sumie oporów poszczególnych oporników. Oznacza to, że kilka oporników połączonych szeregowo można zastąpić jednym opornikiem, którego wartość jest równa ich sumie. Kiedy jednak oporniki połączone są równolegle, odwrotność oporu zastępczego oporników połączonych równolegle jest równa sumie odwrotności oporów poszczególnych oporników.

### **prawo Ohma**

(ang.: *Ohm's Law*) prawo fizyki głoszące proporcjonalność natężenia prądu płynącego przez przewodnik do napięcia panującego między jego końcami. Prawidłowość odkrył w latach 1825–1826 niemiecki nauczyciel matematyki, późniejszy fizyk, profesor politechniki w Norymberdze i uniwersytetu w Monachium, Georg Simon Ohm.

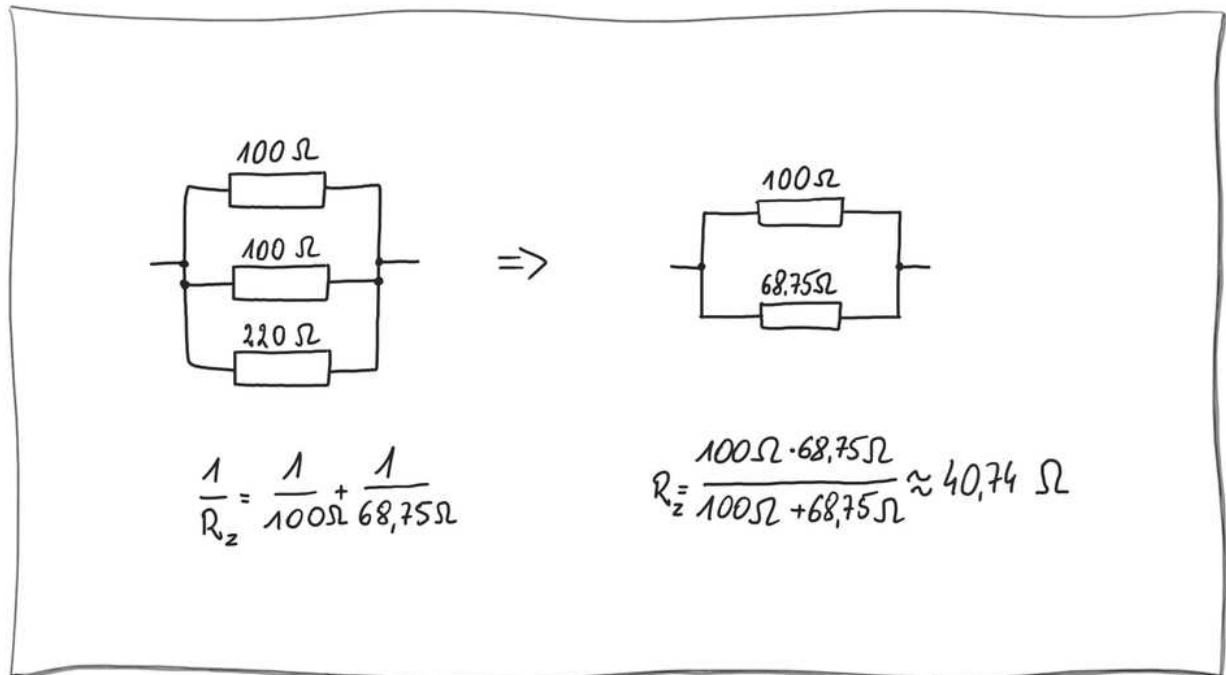
### **prawo Kirchhoffa**

(ang.: *Kirchhoff's circuit Law*) prawo dotyczące przepływu prądu w rozgałęzieniach obwodu elektrycznego, sformułowane w 1845 roku przez Gustawa Kirchhoffa. Prawo to wynika z zasady zachowania ładunku, czyli równania ciągłości. Wraz z drugim prawem Kirchhoffa umożliwia określenie wartości i kierunków prądów w obwodach elektrycznych.

# Film samouczek

## Łączenie oporników w zadaniach

Obejrzyj film i postaraj się zrozumieć jak wygląda opór zastępczy pojawiających się na ekranie, coraz trudniejszych układów oporników.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R14QVD7UbSN2J>

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Zapoznaj się z treścią samouczka.

### Polecenie 1

Opornik o oporze  $R$  łączymy równolegle z opornikami o oporach  $4R$ ,  $9R$ ,  $16R$  itd., czyli równych  $R$  mnożonemu przez kwadraty kolejnych liczb naturalnych. Jaki będzie opór zastępczy układu?

## Dla zainteresowanych

1. Inny dowód, że  $S = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$ . Rozważmy sumę skończoną,  $S_N = \sum_{i=0}^N 2^{-n}$ . Sprawdź, np. stosując indukcję względem  $N \in \mathbb{N}$ , że dla  $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x},$$

o ile  $x \neq 1$ . Dla  $|x| < 1$  drugi wyraz w liczniku po prawej stronie maleje w miarę wzrostu  $N$ , więc  $S_N$  dąży do  $1/(1 - x)$ . Podstawiając  $x = 1/2$  dostajemy 2.

2. Dowód, że suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych jest nieskończona. Najprostszy sposób to rozpisanie kilkunastu pierwszych wyrazów tej sumy i odpowiednie oszacowanie coraz większych jej części:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2/4 = 1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4/8 = 1/2} + \dots$$

W ten sposób zbieramy po 2, 4, 8 itd. kolejnych wyrazów i stwierdzamy, że ich sumy zawsze przewyższają  $1/2$ . Takich zestawów jest nieskończenie wiele, więc cała suma jest nieskończona.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



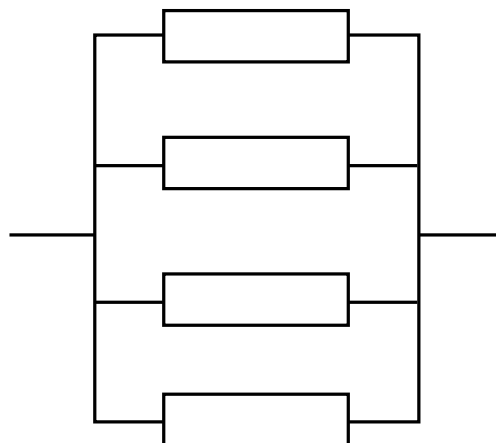
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

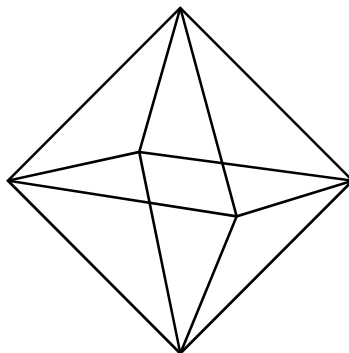


Ćwiczenie 4



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

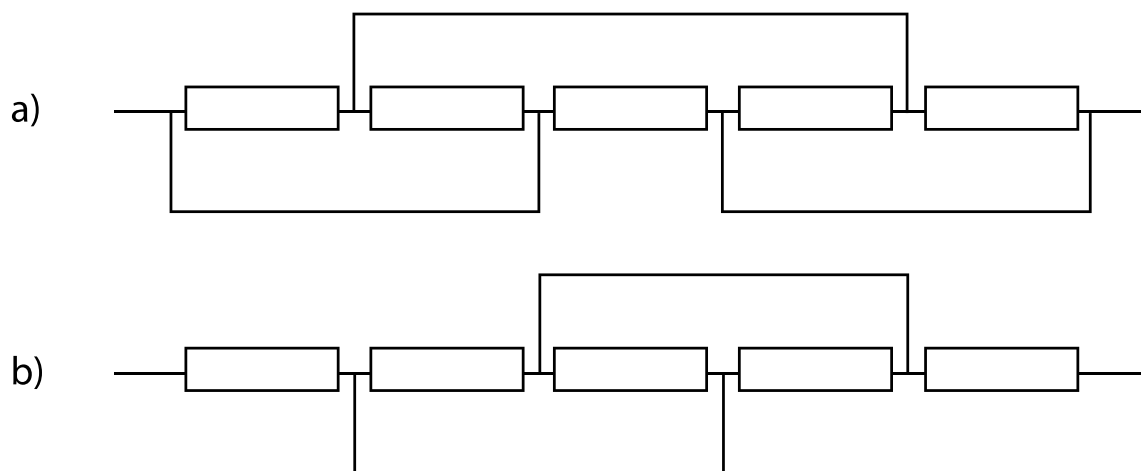
## Ćwiczenie 5



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

## Ćwiczenie 6

## Ćwiczenie 7

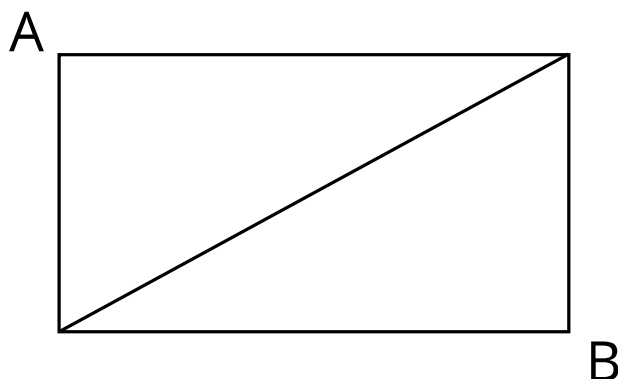


Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

## Ćwiczenie 8



Z drutu oporowego utworzono prostokąt z przekątną (patrz rysunek), którego pionowy bok, o oporze  $R$ , jest dwukrotnie krótszy niż poziomy. Pamiętając, że opór elektryczny jest proporcjonalny do długości drutu oporowego, oblicz opór zastępczy pomiędzy punktami A i B.

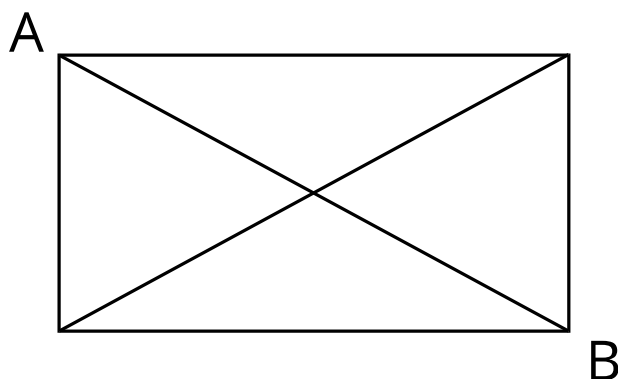


Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

## Ćwiczenie 9



Z drutu oporowego utworzono prostokąt z dwiema przekątnymi (patrz rysunek obok), którego pionowy bok, o oporze  $R$ , jest dwukrotnie krótszy, niż poziomy. Korzystając z rozwiązania zadania 5, oblicz opór zastępczy pomiędzy punktami A i B.

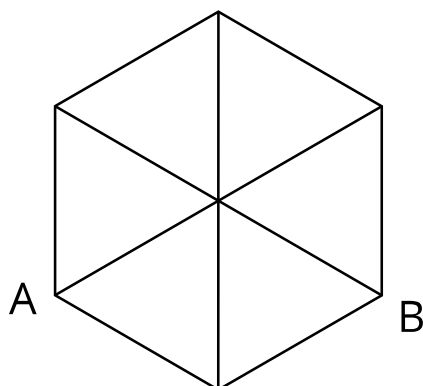


Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

## Ćwiczenie 10



Dwanaście jednakowych oporników o wartości  $R$  połączono w figurę przedstawioną na rysunku. Oblicz opór zastępczy pomiędzy punktami A i B.

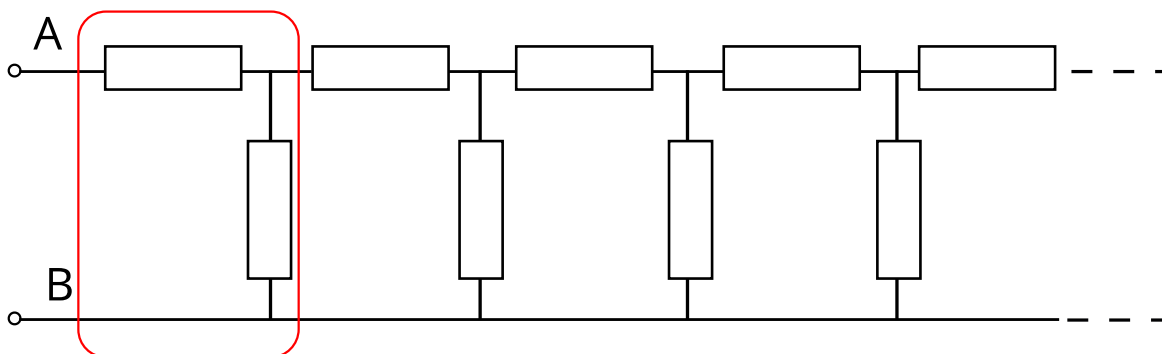


Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

## Ćwiczenie 11



Oblicz opór zastępczy nieskończonej sieci oporników o oporze  $R$ . Warto wyróżnić w niej „moduły” zaznaczone na rysunku:



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

# Dla nauczyciela

---

<b>Imię i nazwisko autora:</b>	Tomasz Sobiepan
<b>Przedmiot:</b>	Fizyka
<b>Temat zajęć:</b>	<b>Opór zastępczy – zadania</b>
<b>Grupa docelowa:</b>	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
<b>Podstawa programowa:</b>	<p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne</b></p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem;</p> <p>6) tworzy teksty, tabele, diagramy lub wykresy, rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu; właściwie skaluje, oznacza i dobiera zakresy osi;</p> <p>7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>VIII. Prąd elektryczny. Uczeń:</p> <p>13) posługuje się pojęciem oporu zastępczego; oblicza opór zastępczy układu oporników połączonych szeregowo lub równolegle.</p>
<b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b>	<p><b>Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li><li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li><li>• kompetencje cyfrowe,</li><li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li></ul>

<b>Cele operacyjne:</b>	<p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. stosuje pojęcie oporu zastępczego układu oporników,</li> <li>2. wykorzystuje różne metody postępowania, prowadzące do jego wyznaczenia,</li> <li>3. analizuje trudne problemy i rozkłada je na łatwe zadania,</li> <li>4. stosuje zdobyte umiejętności do rozwiązywania zadań,</li> <li>5. łączy wiedzę z fizyki i matematyki do wyznaczenia własności obwodów elektrycznych.</li> </ol>
<b>Strategie nauczania</b>	gamifikacja
<b>Metody nauczania</b>	decyzyjna
<b>Formy zajęć:</b>	praca w grupach
<b>Środki dydaktyczne:</b>	gra edukacyjna, zestaw zadań
<b>Materiały pomocnicze:</b>	e-materiał: „Łączenie oporników w zadaniach”
<b>PRZEBIEG LEKCJI</b>	
<b>Faza wprowadzająca:</b>	
<p>Uczniowie mogą przygotować się do lekcji, zapoznając się z częścią „Warto przeczytać”.  Zaciekawienie uczniów: jak w części „Czy to nie ciekawe?”  Uzgodnienie z uczniami celów do osiągnięcia na lekcji.  Podzielenie uczniów na czteroosobowe grupy i wyjaśnienie reguł gry.</p>	
<b>Faza realizacyjna:</b>	
<p>Gra polega zgromadzeniu jak największej liczby punktów przez grupę.  Punkty zdobywa się rozwiązując zadania oraz grając w grę. Obie te aktywności odbywają się równolegle: grupa rozwiązuje zadania, a jeden jej członek podchodzi w tym czasie do innego stanowiska, gdzie zdobywa punkty za grę. Liczba punktów, to wynik z gry pomnożony przez poziom trudności. Każdy uczeń może tylko raz podejść do stanowiska i ma możliwość zagrania dwukrotnie. Grupie zapisuje się jego wynik wyższy.  Zasady zdobywania punktów za rozwiązania zadań są następujące. Grupa wybiera po kolei dowolne zadanie z zestawu i próbuje je rozwiązać. Za każde prawidłowe rozwiązanie otrzymuje 20 punktów. Za skorzystanie z podpowiedzi lub błędne rozwiązanie grupa traci 8 pkt. Za jednorazowe skorzystanie z tekstu „Warto przeczytać” trzeba „zapłacić” 6 pkt. Grupy mogą też podpowiadać sobie nawzajem ustalając swoje własne ceny transakcji wyrażone w przekazywanych sobie punktach. Jeżeli grupa skorzysta z zamieszczonego rozwiązania, otrzymuje 4 pkt. za to zadanie.  Wygrywa ta grupa, która zgromadzi najwięcej punktów.  Nauczyciel pełni rolę arbitra podczas gry.</p>	

**Faza podsumowująca:**

Nauczyciel podsumowuje wyniki gry na lekcji i zapowiada pracę domową. Ostateczne rozstrzygnięcie zapadnie na następnej lekcji.

Uczniowie odnoszą się do postawionych sobie celów lekcji, ustalają które osiągnęli a które wymagają jeszcze pracy, jakiej i kiedy. W razie potrzeby nauczyciel dostarcza im informację zwrotną kształtującą.

**Praca domowa:**

Uczniowie mogą zdobywać dodatkowe punkty wykonując pracę w domu. Prawidłowe rozwiązanie przez każdego ucznia zadania, którego grupa nie zdążyła rozwiązać na lekcji i przysłanie rozwiązania (nie samego wyniku) nauczycielowi mailem w ciągu dwóch dni jest nagradzane dopisaniem 4 pkt dla grupy.

**Wskazówki  
metodyczne  
opisujące różne  
zastosowania danego  
multimedium**

Gra edukacyjna może być wykorzystana podczas nabywania umiejętności obliczania oporu zstępczego lub do powtórzeń przez sprawdzianem lub egzaminem.