Wprowadzenie

Materiał zawiera 2 ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), 3 ćwiczenia.

Wprowadzenie do pojęcia - dziedzina funkcji. 7 przykładów z 6 animacjami, 3 ćwiczenia.

Wprowadzenie

Analizując zależności funkcyjne między różnymi wielkościami, spotykamy się z przypadkami, w których należy dokładnie ustalić, dla jakich argumentów określamy funkcję. Taką czynność nazywamy wyznaczaniem dziedziny funkcji.

Przykład 1

Rozważmy pole P
kwadratu jako funkcję długości jego boku x
. Funkcję tę zapisujemy wzorem $P(x) = x^2$
.
Do wzoru funkcji P
można podstawiać dowolną liczbę rzeczywistą x
, jednak dziedziną tej funkcji nie jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, tylko zbiór liczb dodatnich, bo tylko takie liczby mogą być długościami boków.
Z warunków zadania wynika, że dziedziną D_P
funkcji P
jest zbiór wszystkich liczb dodatnich.

Przykład 2

W trójkącie ABC
dane są długości boków $|\mathrm{AC}| = 7$
i $|\mathrm{BC}| = 8$
. Oznaczmy $|\mathrm{AB}| = c$
. Funkcja L
przyporządkowuje długości boku c
obwód trójkąta ABC
. Wówczas $L(c) = 7 + 8 + c = 15 + c$
, przy czym funkcja L
jest określona dla tych c
, dla których istnieje trójkąt ABC
.
Z nierówności trójkąta wiemy, że odcinki o długościach 7
, 8
, c
są bokami trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:
$c > 0$
, $c + 7 > 8$
, $7 + 8 > c$
oraz $c + 8 > 7$
.
Stąd $c > 1$
i $c < 15$
. A zatem dziedziną D_L
funkcji L
jest przedział $(1,\ 15)$
.

Przykład 3

Rozważmy wszystkie prostokąty, których obwód jest równy 24

. Jeżeli przez a
oznaczymy długość jednego z boków takiego prostokąta, to sąsiedni bok ma długość $12 - a$
, zatem pole P
prostokąta wyraża się wzorem $P\left(a\right) = a\left(12 - a\right) = - a^2 + 12a$
. Taki prostokąt istnieje, gdy $a > 0$
i $12 - a > 0$
. Wobec tego dziedziną D
funkcji P
jest przedział $(0, 12)$.

Przykład 4

Rozważmy wszystkie pary dodatnich liczb rzeczywistych x
i y
, których suma jest dwa razy mniejsza od ich iloczynu. Zapiszemy liczbę y
w zależności od x
.
Warunki zadania zapisujemy w postaci
$x > 0$
i $y > 0$
i $xy = 2(x + y)$
.
Z równości $xy = 2(x + y)$
wyznaczamy y

$$xy - 2y = 2x$$

$$y(x - 2) = 2x$$

Zauważmy, że dla $x = 2$
otrzymujemy równość sprzeczną $0 = 4$
. A zatem dla $x \neq 2$
mamy $y = \frac{2x}{x-2}$
. Wynika z tego, że liczba dodatnia y
jest ilorazem liczby dodatniej $2x$
i liczby $x - 2$
, więc $x - 2 > 0$
, czyli $x > 2$
.
Zatem funkcję y
zapisujemy wzorem

$$y(x) = \frac{2x}{x-2}$$

a dziedziną D
tej funkcji jest przedział

$$(2, + \infty)$$

Ćwiczenie 1
Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x
i y
, których suma jest dwa razy mniejsza od ich iloczynu.

Przykład 5

Rozważmy wszystkie trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej długości 5
. Na przyprostokątnych takiego trójkąta zbudujemy kwadraty o polach x
i y
. Wyznaczymy długość boku kwadratu o polu y
w zależności od x
.
Wiemy, że $x > 0$
i $y > 0$
. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $x + y = 5^2$
, czyli $y = 25 - x$
.
Zatem długość d
boku kwadratu o polu y
jest funkcją zmiennej x
, postaci $d(x) = \sqrt{25 - x}$
, a dziedziną D_d
tej funkcji jest przedział $(0,\ 25)$
.

Przykład 6

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 16
. Wyznaczymy objętość V
takiego graniastosłupa w zależności od długości a
krawędzi jego podstawy.
Oznaczmy długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa przez b
. Z warunków zadania mamy $a > 0$
i $b > 0$
oraz $8a + 4b = 16$
, skąd $b = 4 - 2a$,
zatem $a < 2$
.
Wobec tego objętość V
graniastosłupa jest funkcją zmiennej a
postaci

$$V(a) = a^2(4 - 2a) = -2a^3 + 4a^2$$

a dziedziną funkcji V
jest przedział $(0,\ 2)$
.

Przykład 7

Rozważmy wszystkie liczby dwucyfrowe, których suma cyfr jest równa 15
, a cyfrą dziesiątek jest x.
Zapiszemy taką liczbę dwucyfrową wzorem zależnym od x
.
Z warunków zadania wynika, że cyfrą jedności takiej liczby jest $15 - x$
, a tą liczbą dwucyfrową jest $10x + (15 - x)$
.
Zauważmy, że powyższy wzór określa liczbę dwucyfrową wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są

następujące dwa warunki:

- cyfra dziesiątek: x
  jest jedną z liczb: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
  ,
- cyfra jedności: $15 - x$
  jest jedną z liczb: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
  .

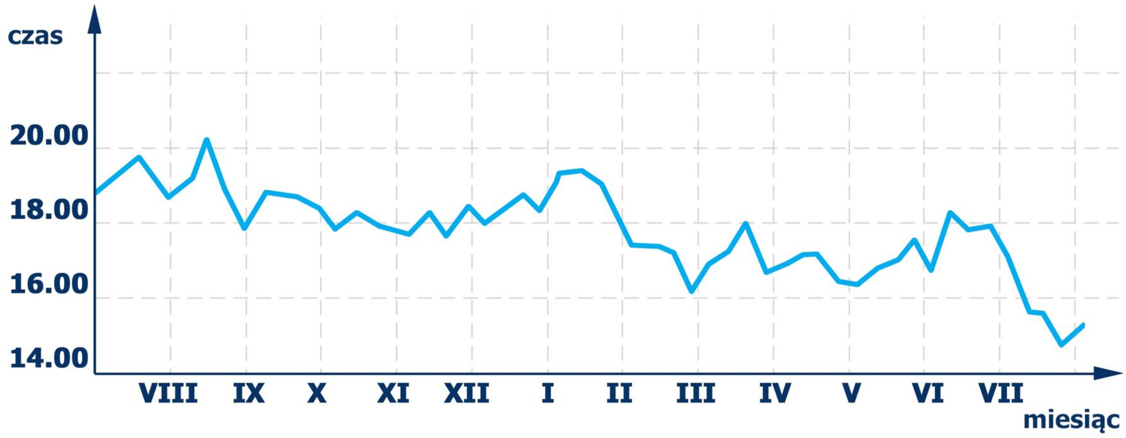
Wobec tego x
należy do zbioru $\{6, 7, 8, 9\}$
.
Zapisując tę liczbę dwucyfrową jako funkcję f
zmiennej x
, otrzymujemy

$$f(x) = 10x + (15 - x) = 9x + 15$$

Dziedziną funkcji f
jest zbiór czteroelementowy $\{6, 7, 8, 9\}$
.

Przykład 8

Na rysunku przedstawiony jest wykres zmian ceny akcji pewnej spółki w ciągu kilku miesięcy 2013
$\text{i } 2014 \text{ r}$
. Na podstawie wykresu można odczytać cenę akcji w każdym miesiącu, w którym została ona zapisana. Jednak przebieg tej funkcji opisującej te zmiany zmienia się w czasie rzeczywistym. Nie jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości akcji w kolejnych miesiącach.



Ćwiczenie 2
Zapoznaj się z najprostszą metodą przewidywania cen akcji na giełdzie.

Ćwiczenie 3
Zapoznaj się ze stroną internetową zawierającą informacje o notowaniu spółek giełdowych. Wybierz jedną z nich i śledź zmiany jej ceny przez kilka dni. Staraj się codziennie przewidzieć cenę spółki i oceń trafność swoich przewidywań.