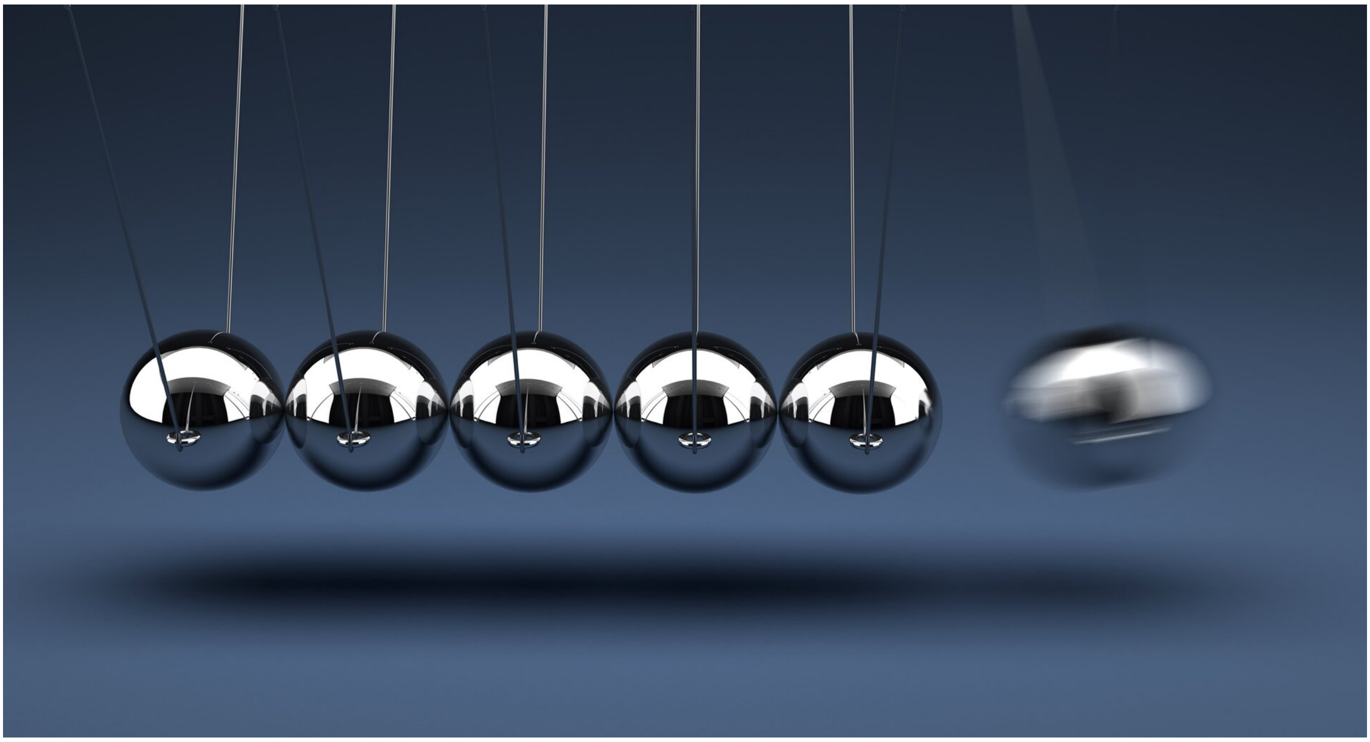
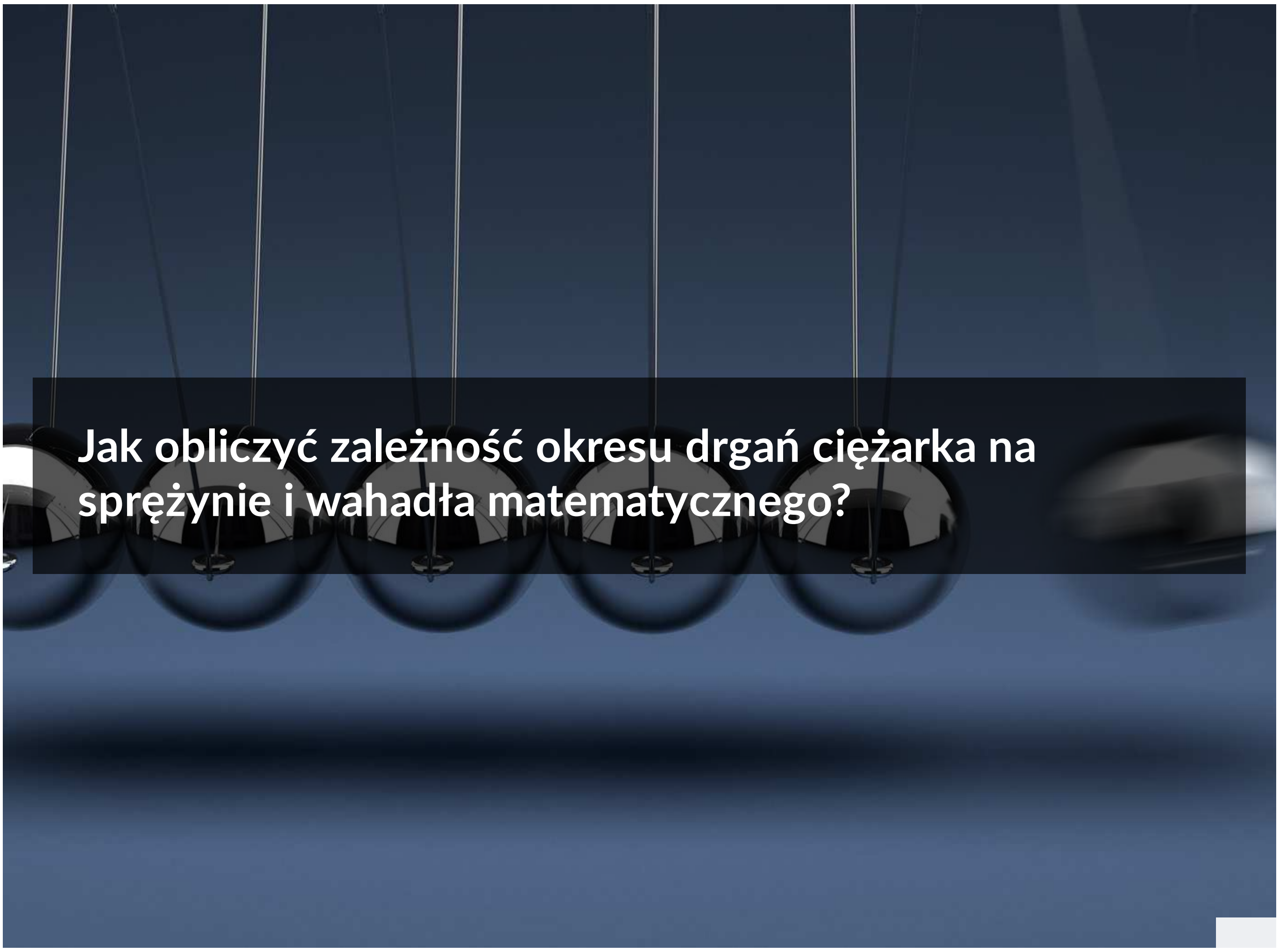


Jak obliczyć zależność okresu drgań ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego?



Jak obliczyć zależność okresu drgań ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego?

Czy to nie ciekawe?

Ruchem drgającym zajmował się już Galileusz, któremu przypisuje się pomysł wykorzystania wahadła do pomiaru czasu. Obserwował on wahania lampy w katedrze w Pizie (Rys. a.) i odkrył, że okres drgań wahadła zależy od jego długości, a nie zależy od amplitudy.

Rys. a. „Lampa Galileusza”.

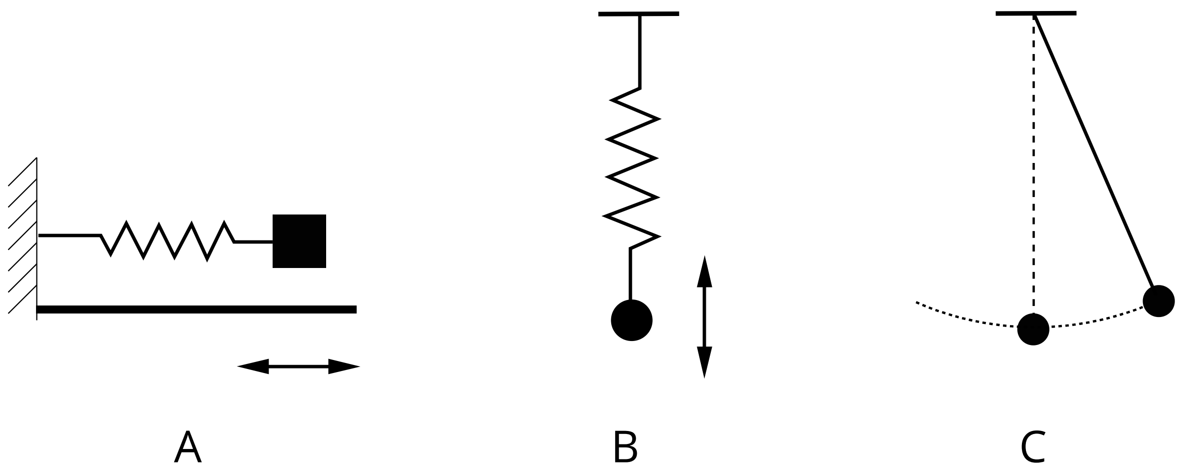
A jak to jest w przypadku ciężarka na sprężynie? Czy jego okres drgań też nie zależy od amplitudy?

> **Twoje cele**
>
> W tym e-materiale:
>
> - dowiesz się, od czego zależy okres drgań ciężarka na sprężynie,
> - zrozumiesz, że wahadło matematyczne to uproszczony model wahadła,
> - dowiesz się, jak obliczyć okres drgań wahadła matematycznego,
> - obliczysz okresy małych drgań wahadła matematycznego i ciężarka zawieszonego na sprężynie dla różnych parametrów.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Drgania klocka przymocowanego do poziomej sprężyny, poruszającego się po gładkiej powierzchni (Rys. 1. A), drgania ciężarka zawieszonego na sprężynie (Rys. 1. B) i wahadła matematycznego (Rys. 1. C) przy niewielkich oporach i małych wychyleniach są drganiami harmonicznymi.

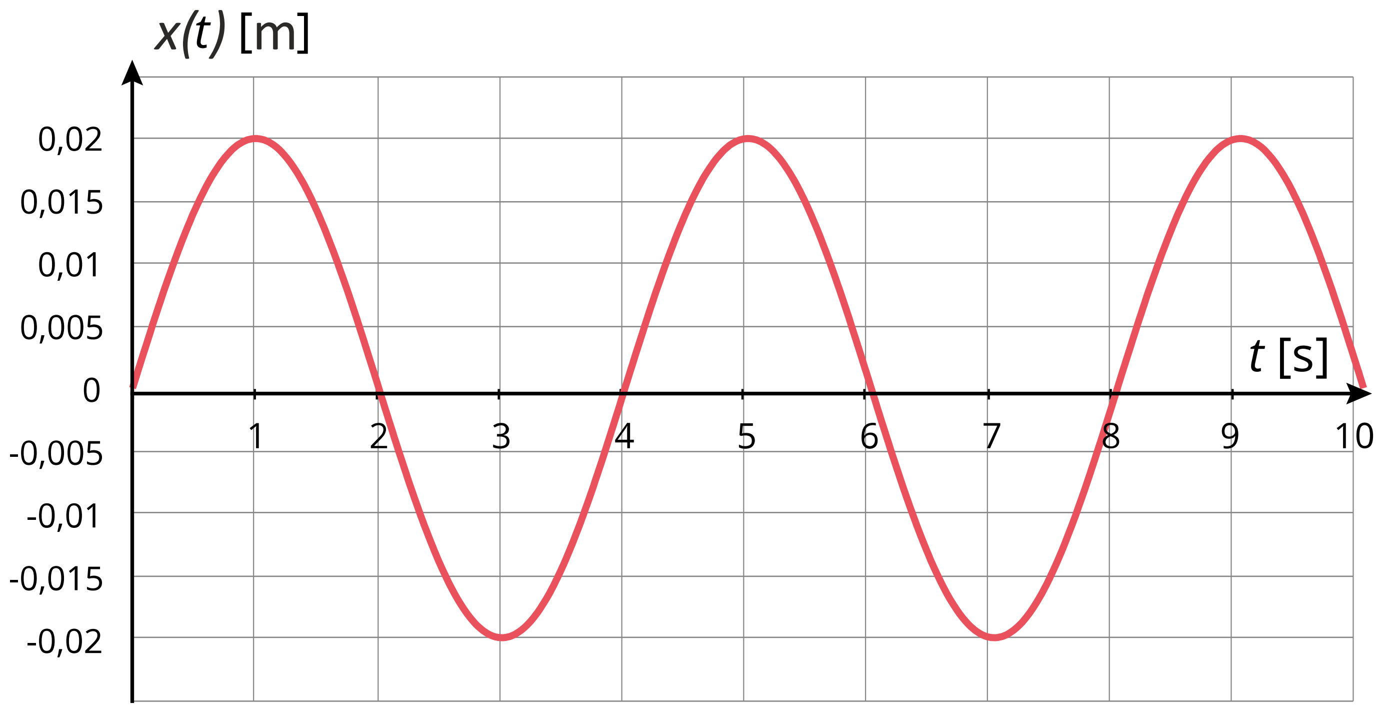


Rys. 1. Poziome (A) i pionowe (B) drgania ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego (C).

Wykres zależności wychylenia od czasu dla drgań harmonicznych ma kształt sinusoidalny (Rys. 2.) i jest opisany równaniem:

$$x(t) = A\sin{(\omega t + \varphi)},$$

gdzie A – amplituda drgań, ω - częstość kołowa, $(\omega t + \varphi)$ - faza drgań, a φ - faza początkowa, czyli faza drgań dla $t = 0$.



Rys. 2. Wykres wychylenia od czasu w ruchu harmonicznym dla fazy początkowej równej zero. Okres drgań $T = 4$s, amplituda $A = 0{,}02$m.

Częstość kołowa ω jest związana z okresem drgań T zależnością:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Każdy układ drgający ma charakterystyczny okres drgań, zwany okresem drgań własnych, zależny od jego własności fizycznych.

Okres drgań ciężarka na sprężynie zależy od masy m ciężarka i współczynnika sprężystości sprężyny k:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ciężarek o większej masie ma większą bezwładność, więc dłuższy okres drgań. Na przykład czterokrotny wzrost masy powoduje dwukrotne wydłużenie okresu drgań.

Stała sprężystości jest miarą „sztywności” sprężyny. Można to sprawdzić doświadczalnie zawieszając na dwóch sprężynach ciężarki o tej samej masie. Okaże się, że krótszy okres drgań, a większą częstotliwość ma ciężarek na sprężynie o większym współczynniku sprężystości (bardziej sztywnej).

Wahadło matematyczne to punktowa masa, zawieszona na długiej, nieważkiej i nierozciągliwej nici. Jest to model wahadła, którego dobrym przybliżeniem jest zawieszona na nici kulka. Okres drgań wahadła matematycznego przy małych kątach odchylenia od pionu nie zależy od masy wahadła i wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdzie *l* – długość nici, *g* – przyspieszenie ziemskie.

W danym miejscu na Ziemi okres drgań wahadła matematycznego zależy tylko od jego długości. Wahadła o tej samej długości, umieszczone w różnych szerokościach geograficznych, mają różne okresy drgań. Jest to spowodowane różną wartością przyspieszenia ziemskiego. Przyspieszenie grawitacyjne wynika z istnienia siły grawitacji, działającej na każde ciało obdarzone masą. Jest ona odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciała od środka Ziemi. Niewielkie spłaszczenie Ziemi na biegunach powoduje, że przyspieszenie grawitacyjne na biegunach jest trochę większe niż na równiku. Ziemia ponadto wiruje wokół własnej osi, zatem na ciało znajdujące się na równiku działa siła bezwładności odśrodkowa, zwrócona przeciwnie do siły grawitacji. Wpływa to także na nieznaczne zmniejszenie przyspieszenia ziemskiego na równiku. Pomiar okresu drgań wahadła matematycznego jest jedną z metod pomiaru przyspieszenia ziemskiego.

Przykład 1.

Przyspieszenie ziemskie na biegunie g_b = 9,83332 m/s^2 jest większe od przyspieszenia ziemskiego na równiku g_r = 9,78030 m/s^2. Dwa wahadła matematyczne o tej samej długości *l = 1 m* umieszczono na biegunie i na równiku. O ile różnią się okresy drgań tych wahadeł?

Rozwiązanie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_r - T_b = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_r}} - 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_b}} = 2\pi\sqrt{l}\left(\frac{1}{\sqrt{g_r}} - \frac{1}{\sqrt{g_b}}\right)$$

Wstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$T_r - T_b = 2 \cdot 3,14(\frac{1}{\sqrt{9{,}78030}} - \frac{1}{\sqrt{9{,}83332}}) = 6,28 \cdot (0,3197 - 0,3189) = 0,005s$$

Okres drgań wahadła matematycznego o długości 1m umieszczonego na równiku jest o około 0,005s dłuższy niż okres drgań tego samego wahadła umieszczonego na biegunie.

Przykład 2. Doświadczenie

Mamy do dyspozycji statyw, ciężarek o masie 0,5 kg, sprężynę oraz stoper. W jaki sposób wyznaczyć współczynnik sprężystości sprężyny oraz jej wydłużenie w położeniu równowagi?

Rozwiązanie:

Zawieśmy ciężarek na sprężynie i wyznaczmy okres drgań tego układu. Na przykład: zmierzmy trzykrotnie czas 10 drgań, obliczmy średnią arytmetyczną, a potem okres T.

Załóżmy, że zmierzony okres drgań ciężarka o masie m = 0,5 kg, zawieszonego na sprężynie, jest równy $T = 1\,s$. Obliczamy współczynnik sprężystości tej sprężyny korzystając z zależności na okres drgań:

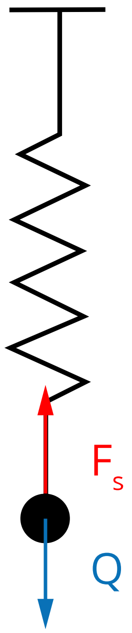
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$k = \frac{4 \cdot (3{,}14)^2 \cdot 0{,}5kg}{(1s)^2} \approx 19,7\frac{\mathrm{kg}}{s^2} \approx 19,7\frac{N}{m}$$



Rys. 3. Siły działające na sprężynę i ciężarek.

Obliczamy wydłużenie sprężyny Δl w położeniu równowagi (w stosunku do jej długości bez obciążenia).

W położeniu równowagi (Rys. 3.) siła ciężkości $Q = mg$ jest równoważona przez siłę sprężystości $F_s = k\Delta l$, czyli:

$$mg = k\Delta l.$$

Wydłużenie sprężyny

$$\Delta l = \frac{\mathrm{mg}}{k}$$

$$\Delta l = \frac{0{,}5kg \cdot 9{,}81m/s^2}{19{,}7N/m} \approx 0,25m$$

Odp. Współczynnik sprężystości sprężyny jest równy ok. 19,7 N/m, a jej wydłużenie w położeniu równowagi wynosi ok. 0,25 m.

Słowniczek

> **okres drgań (ang. period)**
>
> czas jednego pełnego drgania.

oscylator harmoniczny (ang. harmonic oscillator)

ciało poruszające się ruchem harmonicznym.

wahadło matematyczne (ang. mathematical pendulum)

model wahadła w postaci punktowej masy zawieszonej na nieważkiej i nierozciągliwej nici.

wahadło sprężynowe (ang. spring pendulum)

ciężarek zawieszony na sprężynie.

izochronizm (ang. isochronism)

(od greckiego *isos* – równy i *chronos* – czas) to własność drgań polegająca na niezależności okresu drgań od amplitudy.

Film samouczek

Okres drgań ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego

Film omawia zachowanie dwóch oscylatorów harmonicznych: ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego. Pokazuje, jakie siły działają na oba układy oraz w jaki sposób obliczyć zależność okresu drgań na podstawie parametrów obu oscylatorów.

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Wysłuchaj alternatywnej ścieżki lektorskiej.

Polecenie 1

Czy okres wahań wahadła matematycznego umieszczonego na Księżycu wydłuży się, czy skróci w porównaniu z okresem tego samego wahadła na Ziemi?

Polecenie 2

Na drgającej sprężynie wisi dziurawe wiadro wypełnione wodą. Okres drgań sprężyny

- ○ nie zmienia się
- ○ maleje do zera
- ○ rośnie do pewnej ustalonej wielkości
- ○ maleje do pewnej ustalonej wielkości

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż, które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe.
Okres drgań ciężarka na sprężynie zależy od:

- [ ] amplitudy drgań
- [ ] położenia równowagi
- [ ] masy ciężarka
- [ ] współczynnika sprężystości sprężyny

Ćwiczenie 2

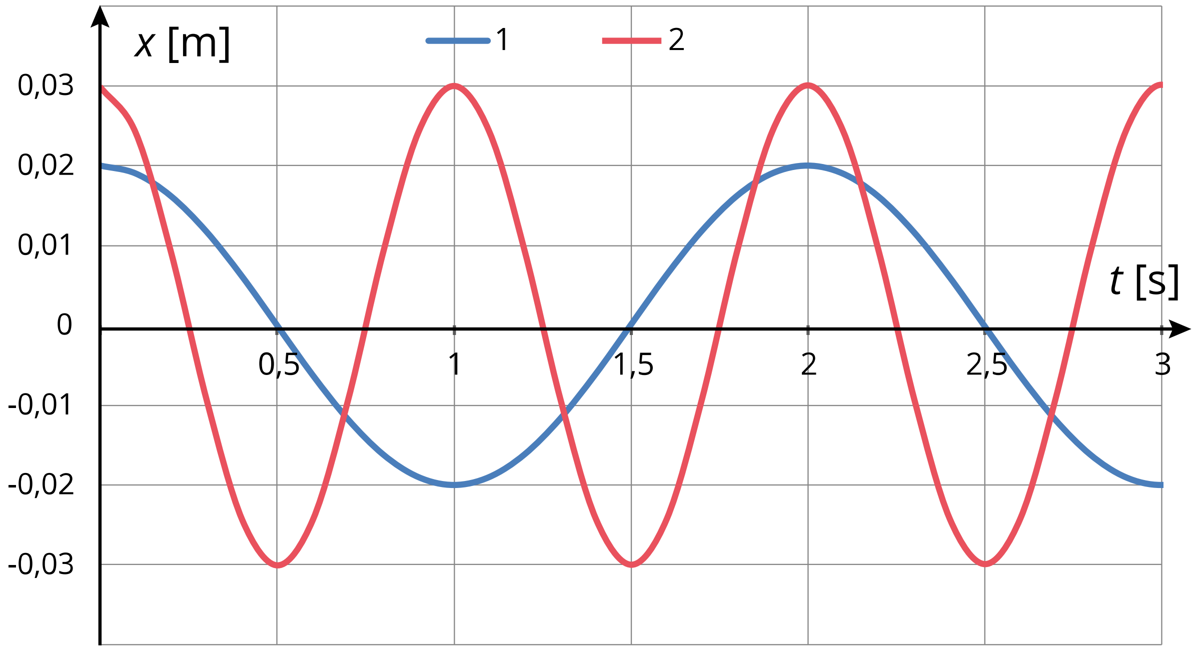
Uzupełnij zdanie.

_____ _____ masy ciężarka na sprężynie spowoduje _____ wydłużenie okresu drgań.

ośmiokrotne | skrócenie | Czterokrotne | Ośmiokrotne | czterokrotne | dwukrotne | zwiększenie | zmniejszenie

Ćwiczenie 3

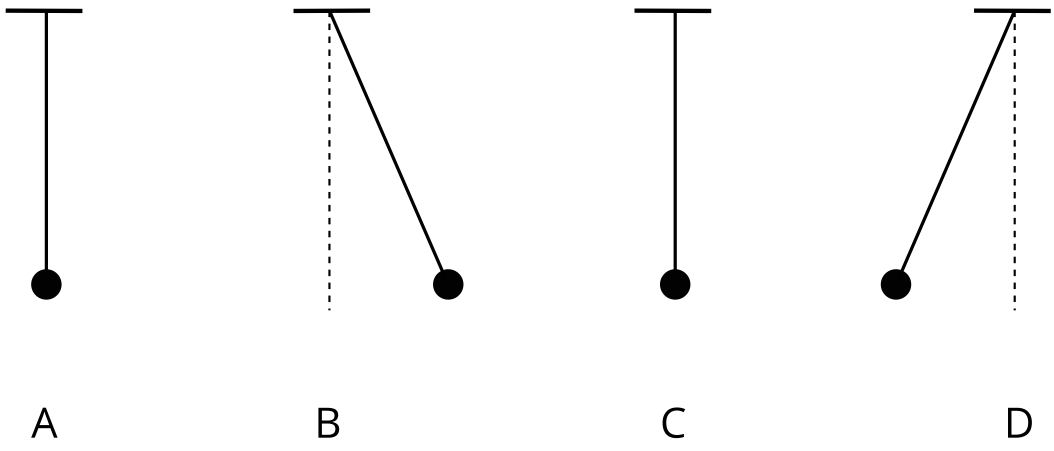
Sprawdź zależność na okres drgań ciężarka na sprężynie.
Okres drgań ciężarka 2 jest:



- ◯ 1,5 razy krótszy niż okres drgań ciężarka 1
- ◯ 1,5 razy dłuższy niż okres drgań ciężarka 1
- ◯ dwa razy dłuższy niż okres drgań ciężarka 1
- ◯ dwa razy krótszy niż okres drgań ciężarka 1

Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiono cztery położenia A, B, C, D wahadła matematycznego o okresie drgań 1 s.



Ile wynosi najkrótszy czas przejścia wahadła ze stanu A do C?

Odp. [ ] s

Ćwiczenie 5

Ciężarek o masie *m = 0,2kg* zawieszony na sprężynie porusza się ruchem harmonicznym z częstotliwością *f = 1 Hz*.
Oblicz:
a) okres drgań,
b) stałą sprężystości sprężyny. Wynik podaj z dokładnością do 1 miejsca po przecinku.

a) [ ] s
b) [ ] $\frac{\mathrm{kg}}{s^2}$ lub $\frac{N}{m}$

Ćwiczenie 6

Jak zmieni się okres drgań wahadła matematycznego, gdy długość nici zmaleje 9-krotnie?

- Okres drgań 3-krotnie wzrośnie
- Okres drgań 3-krotnie zmaleje
- Okres drgań 9-krotnie wzrośnie
- Okres drgań 9-krotnie zmaleje

Ćwiczenie 7

Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na planecie, na której wahadło matematyczne o długości *1m* ma okres drgań równy *0,8 s*. Wynik podaj w m/s^2 z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Odp. ______ $\frac{m}{s^2}$.

Czy taka planeta znajduje się w Układzie Słonecznym (Tak/Nie)? ______

Ćwiczenie 8

Ciężarek zawieszono na sprężynie o współczynniku sprężystości *k*, co spowodowało jej wydłużenie o $x = 10\ cm$ w stosunku do długości bez obciążenia, a następnie wprawiono go w pionowe drgania. Jaką długość powinno mieć wahadło matematyczne, aby jego okres drgań był równy okresowi drgań ciężarka na sprężynie? Odpowiedź podaj z dokładnością do pełnych centymetrów.

Odp. ______ cm.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Elżbieta Kawecka
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Okres drgań ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne:** I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. **Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; V. Drgania. Uczeń: 5) stosuje do obliczeń zależność okresu małych drgań wahadła matematycznego i ciężarka na sprężynie od ich parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyjaśni pojęcie okresu drgań i jego związek z częstotliwością i częstością kołową. 2. zdefiniuje zależność na okres drgań ciężarka na sprężynie. 3. scharakteryzuje wahadło matematyczne jako uproszczony model wahadła. 4. wyjaśni, jak obliczyć okres drgań wahadła matematycznego. 5. obliczy okresy małych drgań wahadła matematycznego i ciężarka zawieszonego na sprężynie dla różnych parametrów.
Strategie nauczania:	formative feedback - kształtująca (ucząca) informacja zwrotna lub ocenianie kształtujące
Metody nauczania:	- praca z wykorzystaniem multimediów, - analiza pomysłów.
Formy zajęć:	- praca w parach, - praca indywidualna.
Środki dydaktyczne:	film samouczek

Materiały pomocnicze:	e-materiały: „Okres drgań w ruchu harmonicznym”, „Cechy ruchu harmonicznego”.
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca	
Zaciekawienie (pogadanka wstępna): Nauczyciel omawia obserwacje wahań lampy w katedrze w Pizie prowadzone przez Galileusza i wyjaśnia zjawiska izochronizmu. Rozpoznanie wiedzy wyjściowej uczniów w kontekście realizowanego tematu oraz nawiązanie do tej wiedzy. Pytania skierowane do uczniów: • Czym się charakteryzuje ruch drgający harmoniczny? • Od czego zależy okres drgań ciężarka na sprężynie? • Od czego zależy okres drgań kulki zawieszonej na linie?	
Faza realizacyjna	
- Nauczyciel omawia sposób pracy i zadania uczniów. - Praca indywidulana - uczniowie oglądają film samouczek. - Nauczyciel dzieli klasę na grupy 2-osobowe (np. metodą losowania). - Uczniowie analizują w parach przykłady 1 i 2 z e-materiału. - Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, w razie potrzeby udziela wskazówek. - Praca w parach. Uczniowie rozwiązują zadania: 2, 5 i 7 z zestawu zadań interaktywnych. - Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, pomaga, wyjaśnia wątpliwości.	
Faza podsumowująca	
- Praca w parach. Uczniowie rozwiązują zadania: 4 i 6 z zestawu zadań interaktywnych. - Nauczyciel kieruje dyskusją podsumowującą w oparciu o rozwiązane zadania.	
Praca domowa	
Uczniowie utrwalają wiedzę i umiejętności zdobyte w czasie lekcji przez rozwiązanie w domu zadań nr 1, 3 i 8 z zestawu zadań interaktywnych.	

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Film samouczek „Jak obliczyć zależność okresu drgań ciężarka na sprężynie i wahadła matematycznego?” można wykorzystać podczas lekcji według scenariusza. Może być też wykorzystany przez uczniów do powtórzenia i utrwalenia wiadomości.