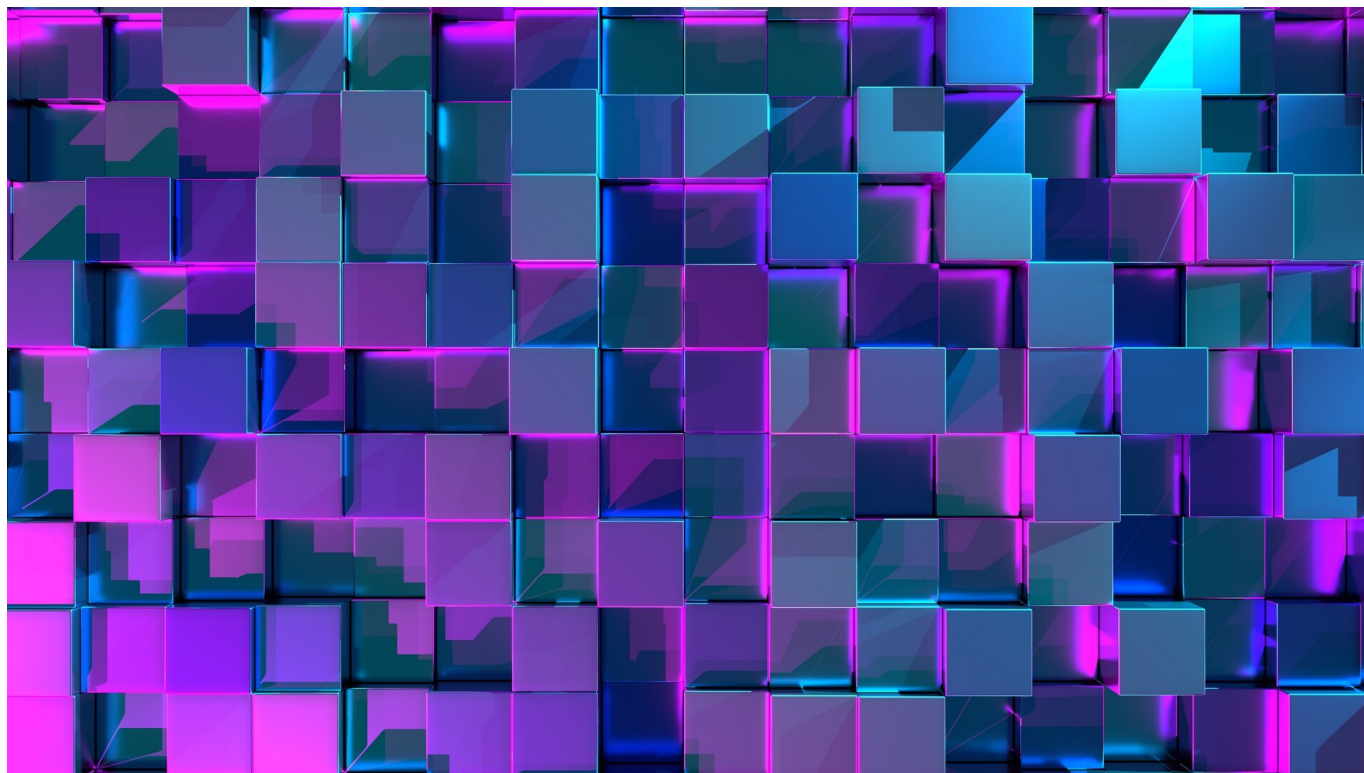




## Kąty między odcinkami w graniastosłupach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Potrafisz wskazać już odcinki w graniastosłupach i potrafisz wykorzystać trygonometrię do obliczania długości odcinków i miar kątów. W tym materiale skupimy się na kątach pomiędzy odcinkami w graniastosłupie. Wykorzystamy dotychczasową wiedzę do obliczania miar tych kątów oraz długości odcinków w graniastosłupie.

### Twoje cele

- Nazwiesz kąty pomiędzy odcinkami.
- Wskażesz kąty pomiędzy odcinkami.
- Obliczysz miarę kątów pomiędzy odcinkami.
- Obliczysz długość odcinka mając daną miarę kąta między odcinkami.

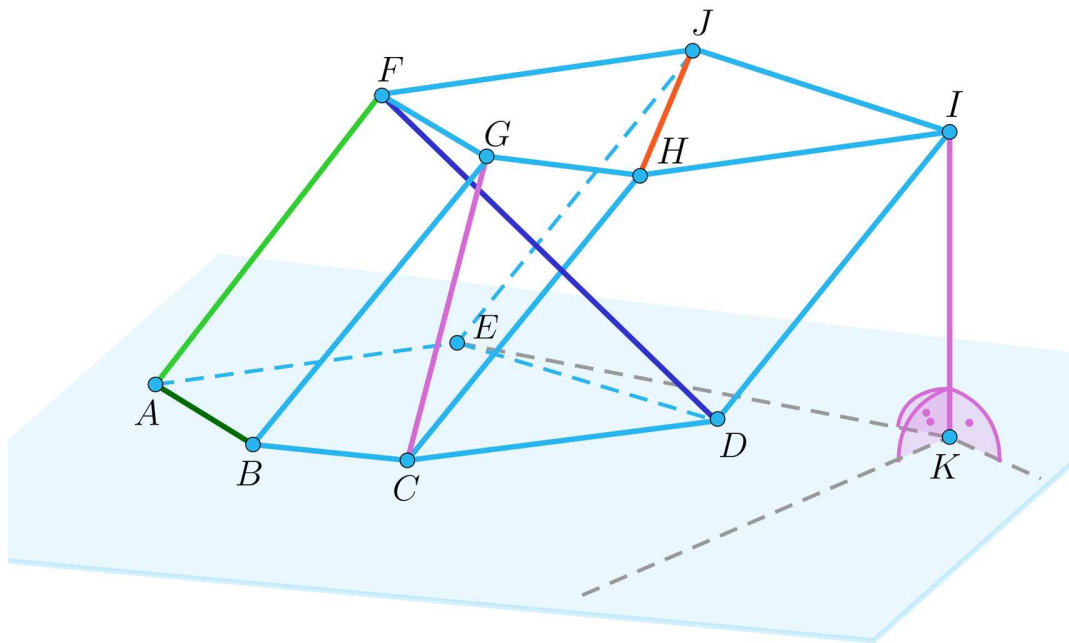
# Przeczytaj

Przypomnijmy, że w graniastosłupie wyróżniamy następujące rodzaje odcinków:

- krawędzie podstawy – będące bokami wielokątów w podstawach,
- krawędzie boczne – będące bokami ścian bocznych, których końce leżą na różnych podstawach,
- przekątne podstawy – przekątne wielokątów w podstawach,
- przekątne ścian bocznych – przekątne równoległoboków, które są ścianami bocznymi,
- przekątne graniastosłupa – łączące wierzchołki różnych podstaw niebędące wierzchołkami tej samej ściany bocznej,
- wysokość graniastosłupa – najkrótszy odcinek, którego końce leżą w płaszczyznach różnych podstaw.

## Przykład 1

Nazwiemy niektóre odcinki w graniastosłupie pochyłym pięciokątnym na rysunku poniżej.



$\overline{AB}$  – krawędź podstawy

$\overline{AF}$  – krawędź boczna

$\overline{KI}$  – wysokość graniastosłupa

$\overline{CG}$  – przekątna ściany bocznej

$\overline{HJ}$  – przekątna podstawy

$\overline{DF}$  – przekątna graniastosłupa

Wiesz już również, że pomiędzy odcinkami w graniastosłupie, które mają wspólny wierzchołek można określić kąt.

### Przykład 2

W poniższych graniastosłupach nazwiemy kąty zaznaczone pomiędzy odcinkami.

Nazwy kątów pomiędzy odcinkami są bardzo intuicyjne. Jest to **KĄT POMIĘDZY ...** (*DALEJ WYMIENIAMY NAZWY ODCINKÓW, POMIĘDZY KTÓRYMI ZNAJDUJE SIĘ KĄT*).

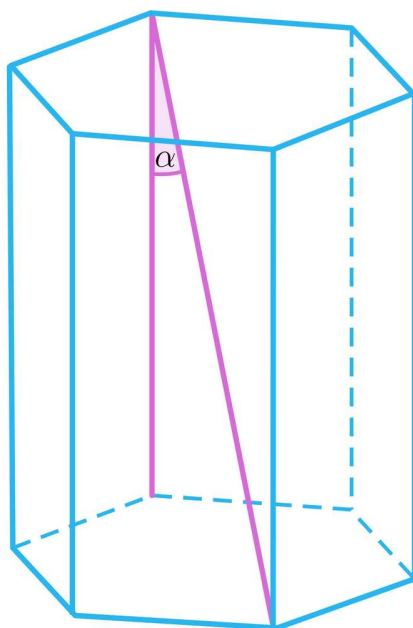
### Uwaga!

Należy pamiętać, że w niektórych graniastosłupach nie wszystkie przekątne graniastosłupów (czy też przekątne ścian bocznych) są tej samej długości. Należy uważnie czytać treść zadania, aby dobrze zaznaczyć dany kąt.

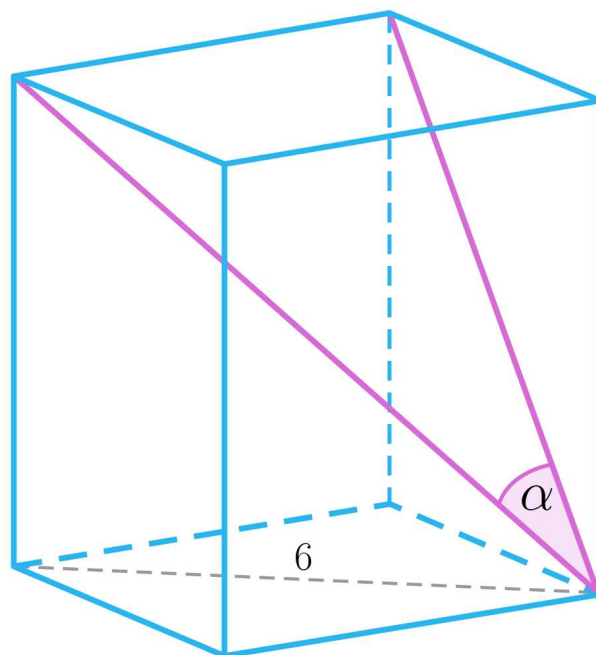
### Przykład 3

Zaznaczymy podane kąty:

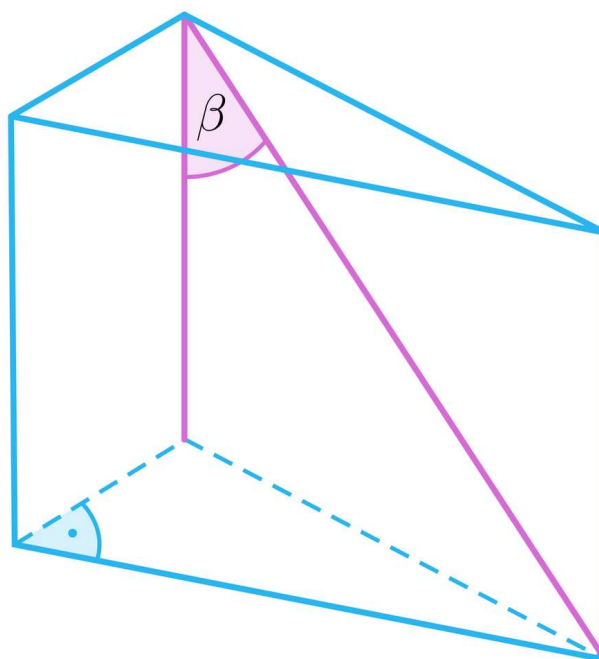
1. Kąt pomiędzy dłuższą **przekątną graniastosłupa**, a krawędzią boczną w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym.



2. Kąt pomiędzy krótszą przekątną graniastosłupa o podstawie rombu o przekątnych podstawy 6 i 8, a przekątną ściany bocznej.



3. Kąt pomiędzy przekątną największej ściany bocznej graniastosłupa prostego o podstawie trójkąta prostokątnego, a krawędzią boczną.



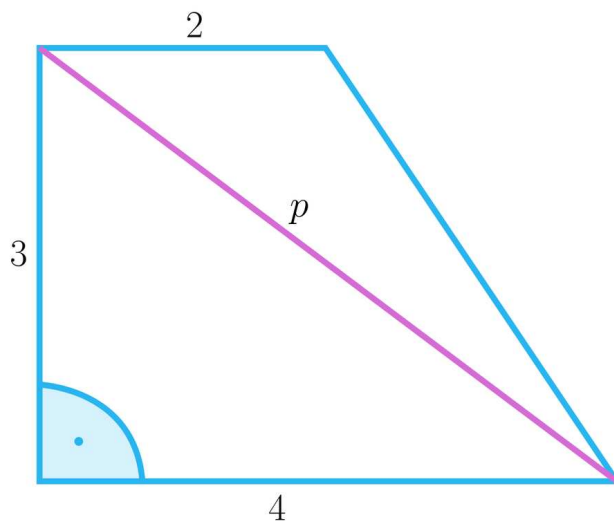
W graniastosłupach (szczególnie w [graniastosłupach prostych](#)) odcinki tworzą trójkąty prostokątne, co pozwala nam obliczać długości odcinków lub miar kątów pomiędzy nimi korzystając z twierdzenia Pitagorasa i funkcji trygonometrycznych.

#### Przykład 4

Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny o podstawach 2 i 4 oraz wysokości długości 3. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość 7. Obliczymy miarę kąta pomiędzy dłuższą [przekątną graniastosłupa](#), a krawędzią boczną.

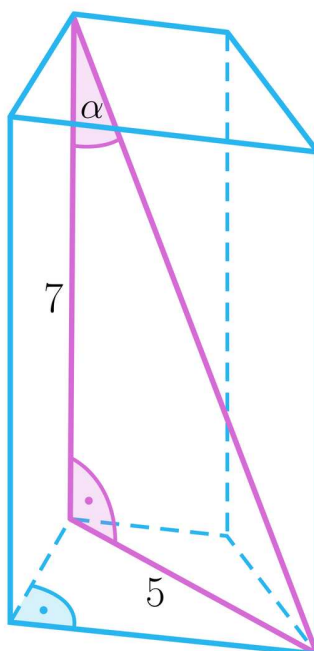
**Rozwiązanie:**

Najpierw obliczymy długość dłuższej przekątnej podstawy.



Widzimy, że trójkąt, którego przeciwprostokątną jest  $p$ , jest trójkątem pitagorejskim o przyprostokątnych 3 i 4, a zatem  $p = 5$ .

Teraz narysujmy graniastosłup i zaznaczmy w nim szukany kąt.



Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{5} = 1,4$ . A stąd  $\alpha \approx 36^\circ$ .

# Słownik

## **graniastosłup prosty**

graniastosłup, którego wszystkie ściany boczne są prostokątami

## **przekątna graniastosłupa**

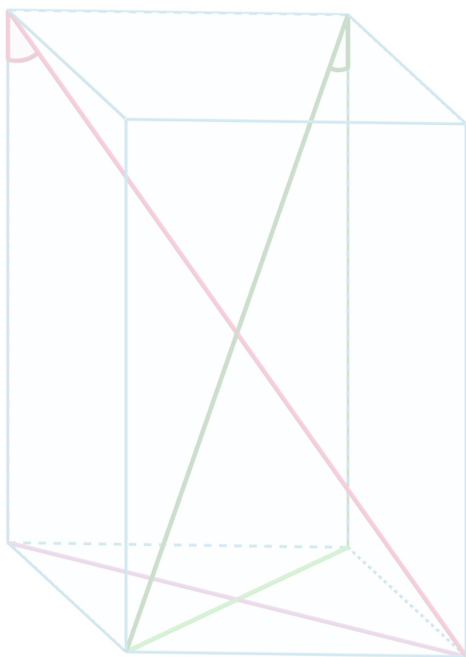
odcinek łączący wierzchołki różnych podstaw niebędące wierzchołkami tej samej ściany bocznej

# Aplet

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z Apletem. Zobacz jak zmieniają się wartości kątów przy zmianie wielkości graniastostupa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11AY2ORf>

## Polecenie 2

Jaki graniastostup otrzymamy gdy  $e = f$ ? Ile rodzajów kątów między przekątnymi graniastostupa, a krawędzią boczną otrzymamy?

## Polecenie 3

Ustaw wartości  $e = 8$  i  $f = 6$  oraz  $H = 5$ . Spróbuj samodzielnie obliczyć miary kątów przedstawionych w aplecie. Sprawdź wyniki z Apletem.

Jaką miarę ma wtedy kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej, a krawędzią podstawy?

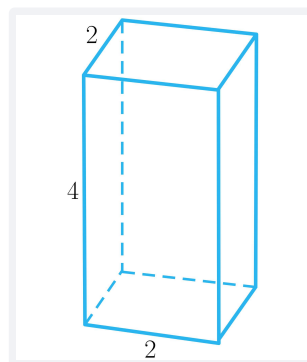
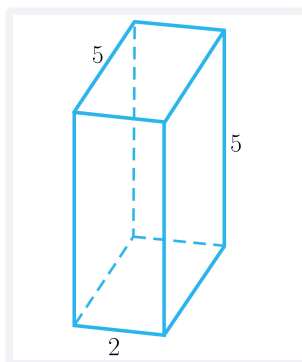
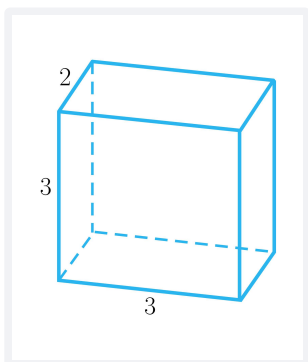
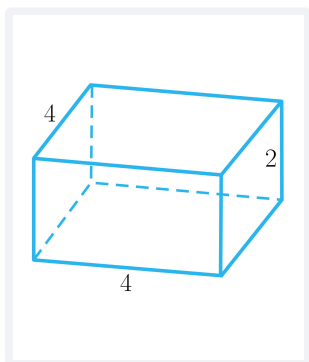
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Graniastopy na rysunku są prostopadłościanami. Ustaw je w kolejności rosnącej miary kąta pomiędzy przekątną graniastopy, a krawędzią boczną (od lewej do prawej).



## Ćwiczenie 2



Sinus kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej graniastopya prawidłowego trójkątnego, a krawędzią podstawy wynosi  $\frac{3}{5}$ , a krawędź podstawy ma długość 6.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną ma miarę większą od kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy.

☐ Krawędź boczna ma długość 8.

☐ Wysokość ma długość 4, 5.

☐ Sinus kąta pomiędzy krawędzią boczną a przekątną ściany bocznej wynosi  $\frac{4}{5}$ .

### Ćwiczenie 3



Podstawą graniastopu prostego jest romb o przekątnych długości 3 i 4. Krawędź boczna tego graniastopu ma długość 4. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

|                                                                                                                                                                    | Prawda                | Fałsz                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Tangens kąta pomiędzy krótszą przekątną graniastopu a krawędzią boczną wynosi 1.                                                                                   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną ma miarę ok. $32^\circ$ .                                                                                 | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Cosinus kąta pomiędzy dłuższą przekątną graniastopu, krawędzią boczną jest większy od cosinusa kąta pomiędzy krótszą przekątną graniastopu a krawędzią boczną.     | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Ponieważ wszystkie przekątne ścian bocznych są tej samej długości, to kąty pomiędzy przekątnymi dowolnych sąsiadujących ze sobą ścian bocznych mają tę samą miarę. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## Ćwiczenie 4



Podstawą graniastopu prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8. Sinus kąta pomiędzy przekątną największej ściany bocznej a krawędzią podstawy wynosi  $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ . Jaką miarę ma kąt pomiędzy przekątną najmniejszej ściany bocznej, a krawędzią boczną? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 45°

☐ 60°

☐ 48°

☐ 57°

## Ćwiczenie 5



Dany jest graniastopu prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy długości 2 i wysokości 8. Dopasuj nazwy kątów w graniastopu do ich przybliżonej miary.

Kąt między krótszą przekątną graniastopu, a krawędzią podstawy.

70°

Kąt między dłuższą przekątną graniastopu, a krawędzią boczną.

24°

Kąt między krótszą i dłuższą przekątną graniastopu wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

76°

Kąt między przekątną ściany bocznej, a krawędzią podstawy.

13°

Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych.

27°

### Ćwiczenie 6



Wyznacz najmniejszy przedział, do którego należy miara kąta między przekątną graniastostupa czworokątnego, a krawędzią jego podstawy. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $(45^\circ, 90^\circ)$

☐  $(0^\circ, 90^\circ)$

☐  $(30^\circ, 45^\circ)$

☐  $\langle 0^\circ, 30^\circ \rangle$

### Ćwiczenie 7



Podstawą graniastostupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 2 i 4 oraz wysokości 3. Krawędź boczna tego graniastostupa ma długość 4.

Oblicz miarę kąta pomiędzy przekątną graniastostupa a przekątną najmniejszej ściany bocznej.

### Ćwiczenie 8



Podstawą graniastostupa jest deltoid o bokach długości  $3\sqrt{5}$  i 10. Punkt przecięcia przekątnych podstawy dzieli jedną z przekątnych w stosunku 3 : 8. Oblicz kąt pomiędzy krótszą przekątną graniastostupa a krawędzią boczną, wiedząc, że cosinus kąta pomiędzy dłuższą przekątną a krawędzią boczną ma wartość  $\frac{5}{13}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Kąty pomiędzy odcinkami w graniastosłupach

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- nazywa kąty pomiędzy odcinkami
- wskazuje kąty pomiędzy odcinkami
- oblicza miarę kątów pomiędzy odcinkami
- oblicza długość odcinka mając daną miarę kąta między odcinkami

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja
- ćwiczeniowa

### **Formy pracy:**

- praca z całą klasą
- praca w parach
- praca indywidualna

### **Środki dydaktyczne:**

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e-podręczniku
- przezroczyste modele graniastosłupów

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel wraz z uczniami w formie dyskusji przypomina pojęcia związane z odcinkami i kątami pomiędzy odcinkami w graniastosłupach przy wsparciu sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wskazują i nazywają kąty w przezroczystych modelach.
3. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel przedstawia Przykłady obliczania miar kątów w graniastosłupach z sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel przedstawia Aplet, omawia metodę obliczania przedstawionych w Aplecie kątów.
3. Uczniowie na dostępnym sprzęcie (laptop, tablet, telefon) zmieniają parametry i proszą sąsiada o znalezienie miar szukanych kątów.
4. Uczniowie wykonują w parach ćwiczenia 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się” w e-podręczniku.
5. Nauczyciel koordynuje pracę uczniów.
6. Uczniowie wraz z nauczycielem sprawdzają uzyskane odpowiedzi i rozwiązania, dyskutują nad błędami, o ile się pojawiają.

#### **Faza podsumowująca:**

- Uczniowie dokonują samooceny osiągnięcia kryteriów sukcesu.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenia 1 – 4 z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Materiały pomocnicze:**

Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach

**Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie mogą wykorzystać aplet w domu jako utrwalenie materiału.