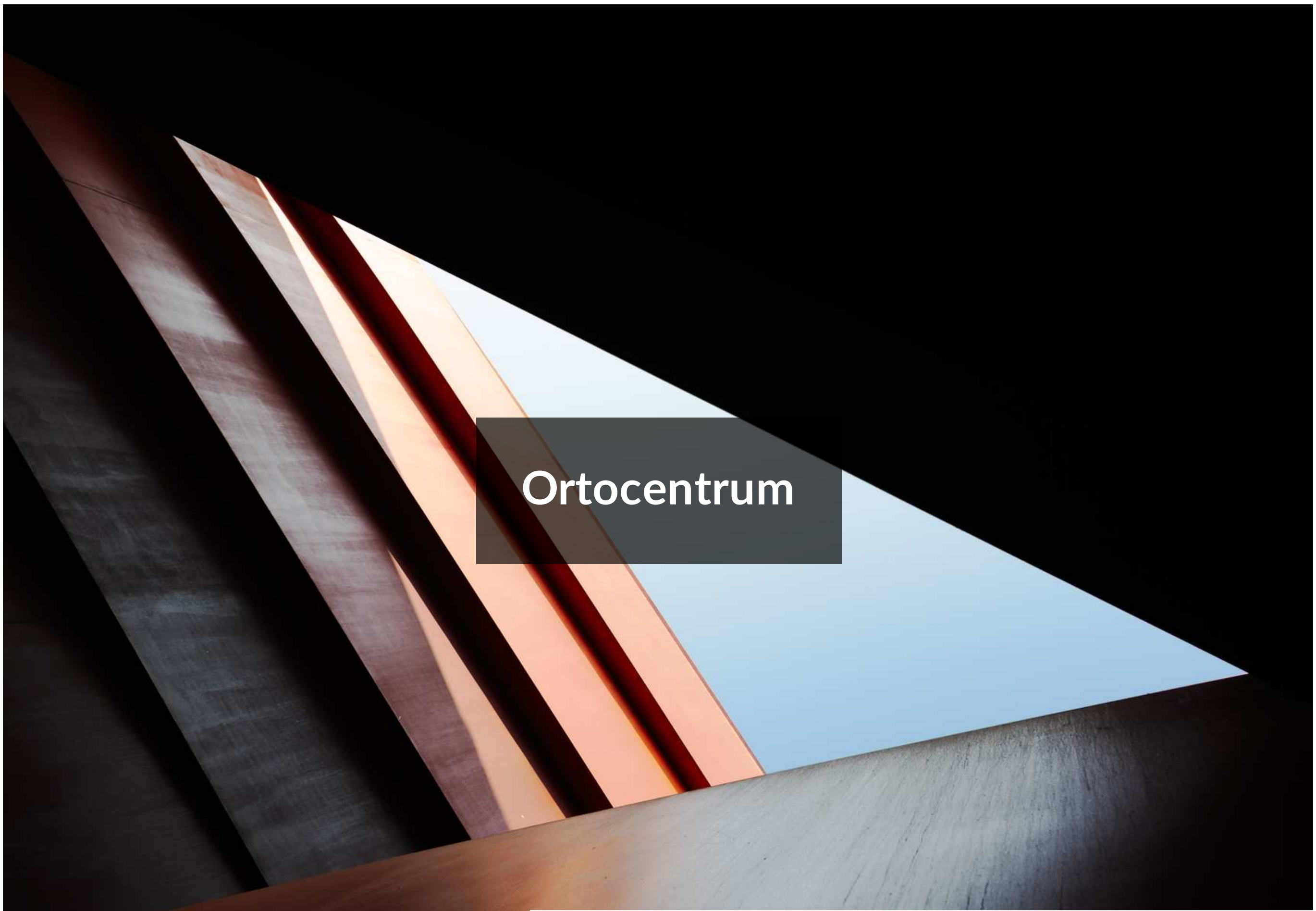
Ortocentrum

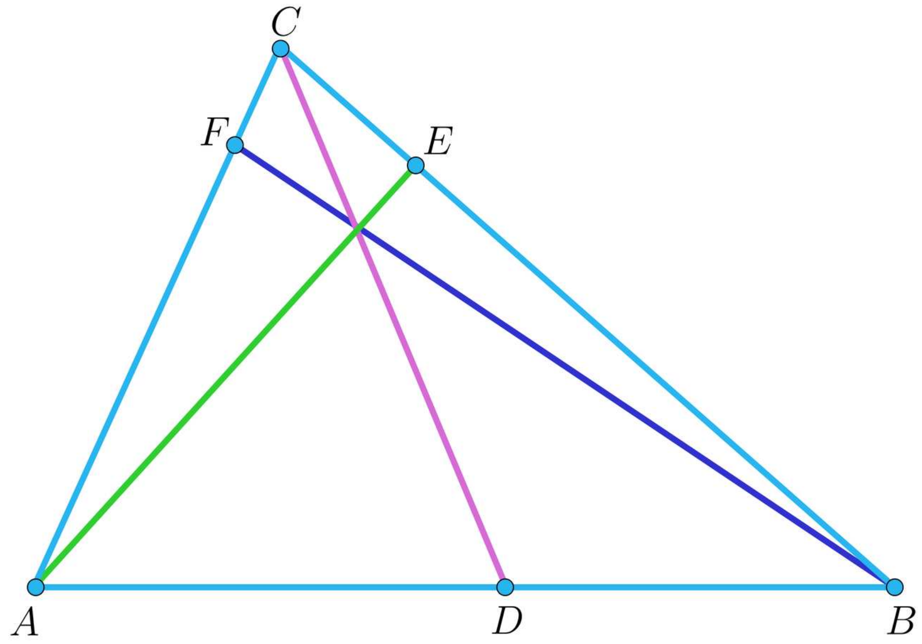


Źródło: Evgeny Tkachenko, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Automat do dowodzenia twierdzeń

W szkolnej matematyce jest coraz mniej miejsca na „klasyczną” geometrię, w szczególności na zagadnienia związane chociażby z tzw. punktami szczególnymi trójkąta, np. punktami przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta, symetralnych jego boków, czy środkowych. Narzędziem, które jest niezwykle przydatne do badania istnienia takich punktów jest twierdzenie Cevy, które głosi, że jeżeli punkty D, E, F należą odpowiednio do boków AB, BC, AC trójkąta ABC, jak na rysunku, to proste AE, BF, CD przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = 1$$



Twierdzenie Cevy

I choć istnienie ortocentrum wykażemy w inny sposób, to rozwiązując ćwiczenia, zaproponowane w poniższej lekcji, będziemy korzystać z tego użytecznego twierdzenia.

> **Twoje cele**
>
> - Usystematyzujesz wiadomości o wysokościach w trójkącie.
> - Udowodnisz twierdzenie, wysokości przecinają się w jednym punkcie.
> - Poznasz pojęcie trójkąta ortycznego i zbadasz jego własności.
> - Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

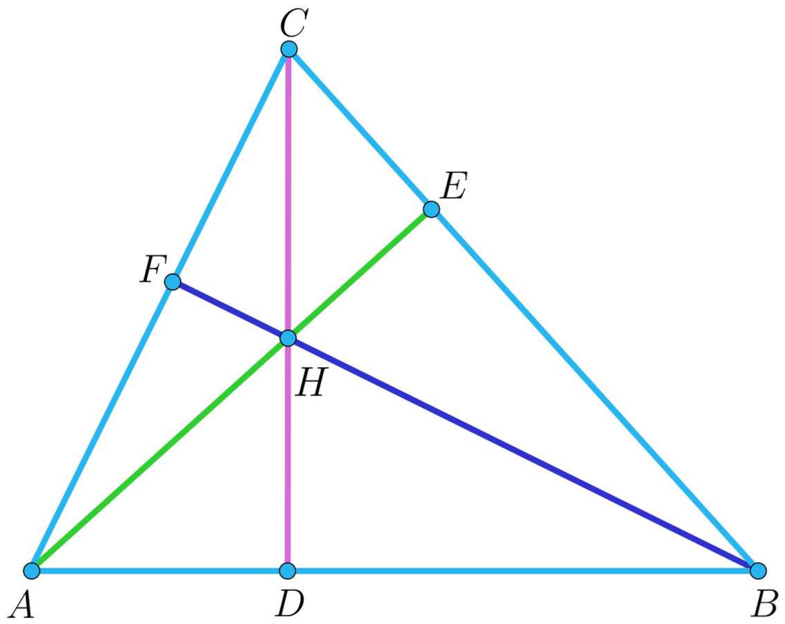
Przeczytaj

Jeśli nie będzie to zasygnalizowane inaczej, to punkty D, E, F będą spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio na bok AB, BC oraz AC.

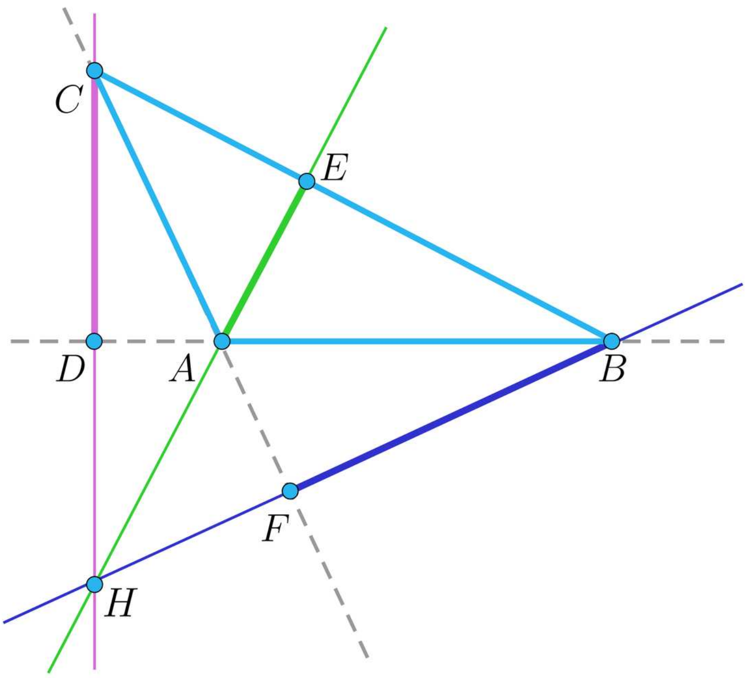
Przyjmijmy następującą definicję.

Definicja: Ortocentrum

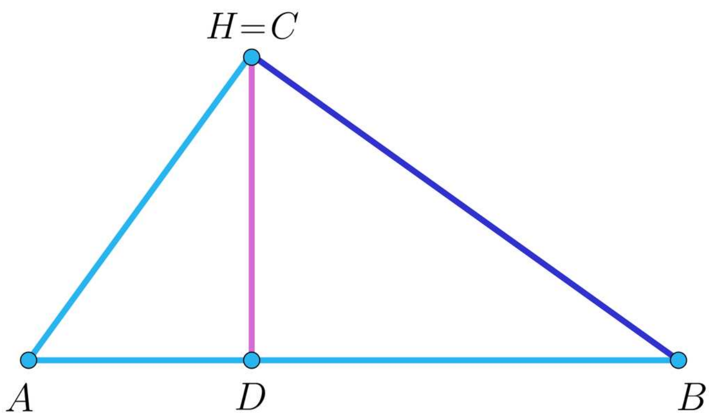
Punkt przecięcia się trzech prostych zawierających odpowiednio wysokości trójkąta ABC będziemy nazywać ortocentrum tego trójkąta.



Ortocentrum H w trójkącie ostrokątnym



Ortocentrum H w trójkącie rozwartokątnym



Ortocentrum H w trójkącie prostokątnym

Zauważmy, że w trójkącie ostrokątnym czy prostokątnym ortocentrum jest punktem przecięcia się wysokości (odcinków), a w trójkącie rozwartokątnym jest punktem przecięcia się przedłużeń tych wysokości. Przyjęcie w definicji warunku przecinania się prostych jest ogólniejsze, co nie zmienia faktu, iż często o ortocentrum, także w przypadku trójkąta rozwartokątnego, mówi się, jako o punkcie przecinania się wysokości, a nie odpowiednich prostych i nie jest to traktowane jako błąd.

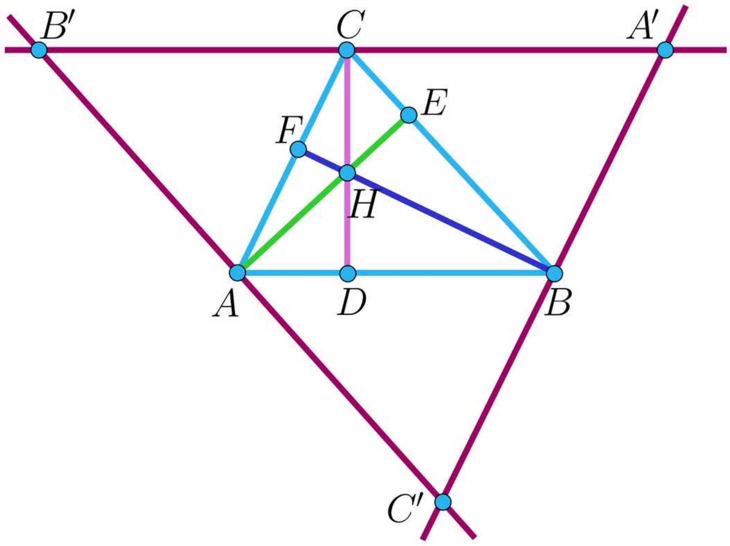
W definicji ortocentrum pojawia się warunek istnienia jednego punktu, w którym przetną się wszystkie trzy wysokości. Poniższe twierdzenie i jego dowód pokazują, że warunek ten jest spełniony dla dowolnego trójkąta.

Twierdzenie: O istnieniu ortocentrum

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód

Rozważmy dowolny trójkąt ABC i poprowadźmy przez każdy z jego wierzchołków prostą równoległą do przeciwległego boku, aż do przecięcia odpowiednio w punktach A', B', C', jak na rysunku.



Dowód twierdzenia o istnieniu ortocentrum

Zauważmy, że czworokąt ABA'C jest równoległobokiem, a odcinek BC jest jego przekątną, stąd w szczególności trójkąty ABC oraz A'BC są przystające.

Podobnie, korzystając z własności równoległoboków $ABCB$' oraz AC'BC stwierdzamy, że trójkąty ABC oraz ACB' i ABC oraz AC'B są także przystające.

Stąd wynika, że punkty A, B, C są środkami odpowiednich boków trójkąta A'B'C', a proste AH, BH oraz CH są symetralnymi odpowiednich boków trójkąta A'B'C'.

Korzystając ze znanej własności, że symetralne przecinają się w jednym punkcie otrzymujemy tezę twierdzenia.

Rzadziej przywoływaną własnością ortocentrum jest ta, o której mówi poniższe twierdzenie.

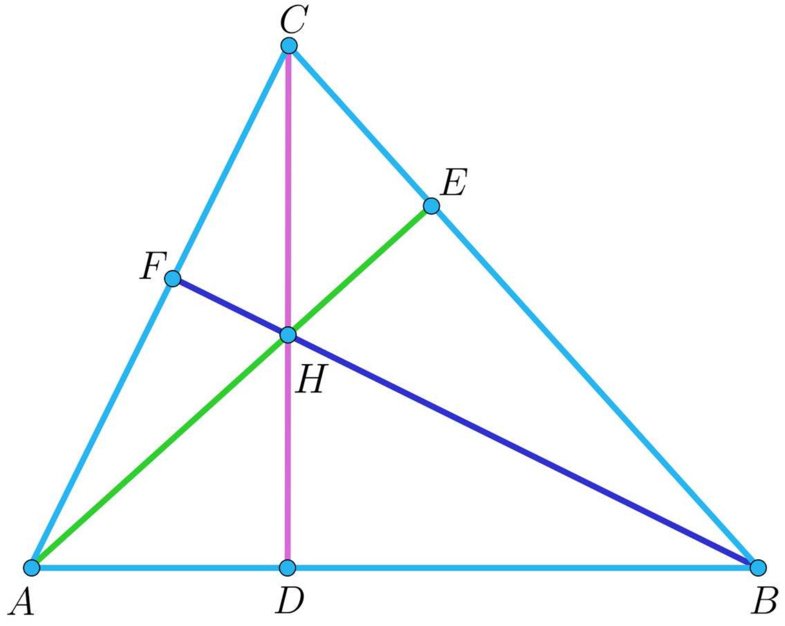
Twierdzenie: O wzajemności ortocentrum

Niech punkt H, różny od każdego z wierzchołków trójkąta ABC, będzie jego ortocentrum. Wtedy każdy z wierzchołków A, B, C jest ortocentrum w trójkącie, którego wierzchołkami są punkt H i pozostałe wierzchołki tego trójkąta.

Dowód

Zauważmy, że punkt H będzie różny od każdego z wierzchołków trójkąta ABC, tylko wtedy, gdy trójkąt ten nie będzie prostokątny.

Rozważmy trójkąt BCH, jak na rysunku.



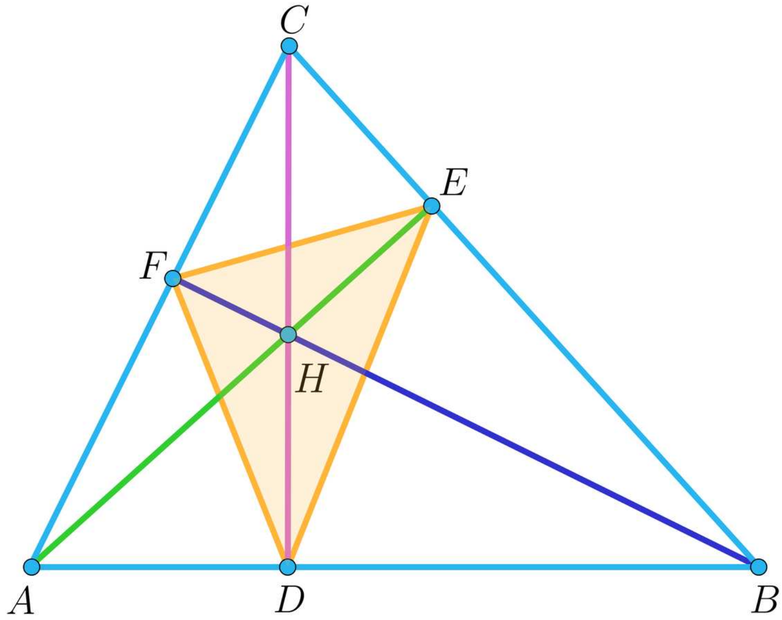
Dowód twierdzenia o wzajemności ortocentrum

Zauważmy wówczas, że prosta AE zawiera wysokość HE, prosta AC zawiera wysokość CF, a prosta AB zawiera wysokość BD trójkąta BCH. Co oznacza, że punkt A jest ortocentrum trójkąta BCH.

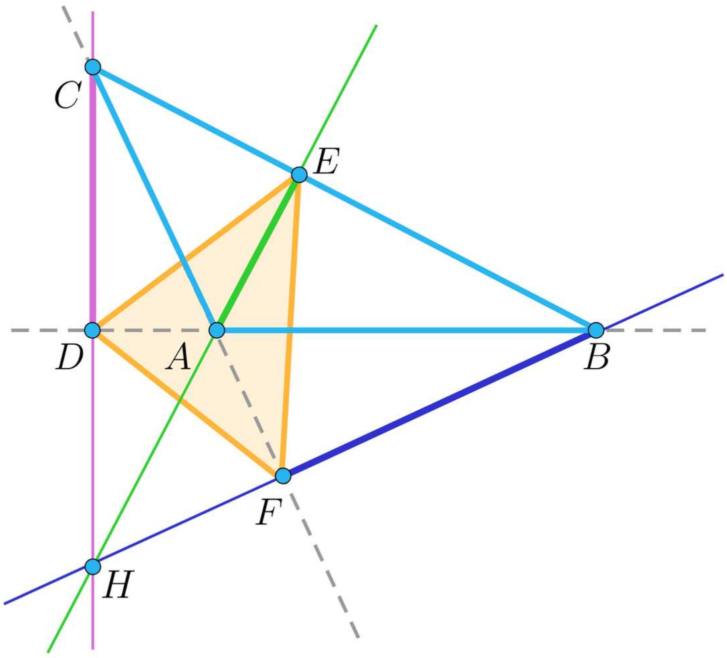
Problem Fagnana

Definicja: Trójkąt ortyczny

Dany jest trójkąt ABC, który nie jest prostokątny. Trójkąt DEF, którego wierzchołkami są spodki wysokości danego trójkąta ABC nazywamy trójkątem ortycznym albo spodkowym.



Trójkąt ortyczny trójkąta ostrokątnego



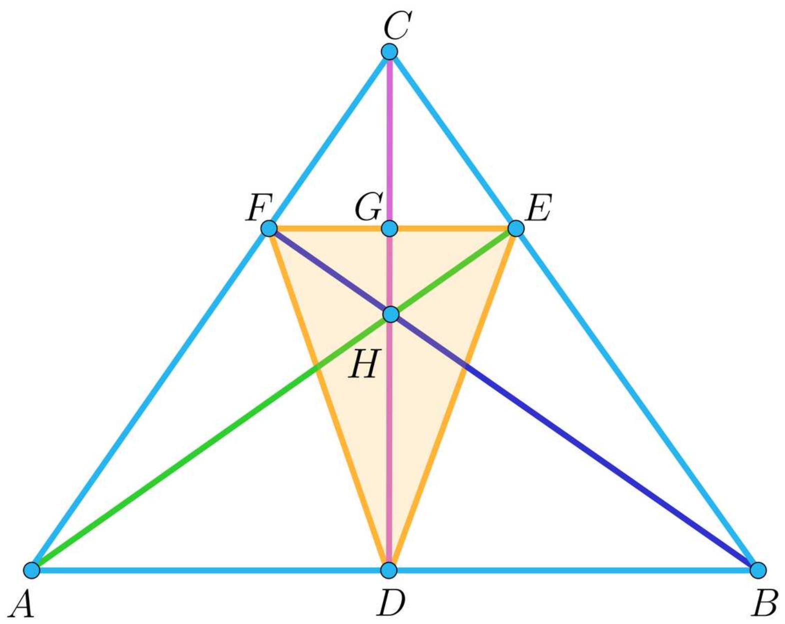
Trójkąt ortyczny trójkąta rozwartokątnego

Problemem Fagnana nazywa się problem optymalizacyjny związany z wyznaczeniem trójkąta o najmniejszym obwodzie, którego każdy z wierzchołków leży na innym z trzech boków danego trójkąta ostrokątnego. Problem ten został postawiony przez włoskiego matematyka i duchownego Giovanniego Fagnana w 1775 roku. Okazuje się, że jego rozwiązaniem jest trójkąt ortyczny.

Przykład 1

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości 30 i ramieniu 25. Wyznaczymy obwód trójkąta ortycznego oraz odległość ortocentrum trójkąta ABC od jego podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AB| = 30$, $|AC| = |BC| = 25$ oraz $\cos(\sphericalangle DAC) = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{15}{25} = \frac{|AF|}{|AB|}$.

Stąd $|AF| = \frac{15}{25} \cdot |AB| = 18$.

Ponieważ $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|FC|}$, więc $|EF| = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot |FC| = \frac{30}{25} \cdot (25 - 18) = \frac{42}{5}$.

Ponadto $|CD| = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ oraz $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CF|}{|CG|}$.

Stąd $|CG| = \frac{|CD|}{|AC|} \cdot |CF| = \frac{20}{25} \cdot (25 - 18) = \frac{28}{5}$ oraz $|DG| = 20 - \frac{28}{5} = \frac{72}{5}$.

Zatem $|DF| = \sqrt{\left(\frac{72}{5}\right)^2 + \left(\frac{21}{5}\right)^2} = 15$.

Szukany obwód jest więc równy $30 + \frac{42}{5}$.

Ponieważ trójkąty AHB i EHF są podobne w skali $\frac{30}{\frac{42}{5}} = \frac{25}{7}$ oraz $|HD| + |HG| = \frac{72}{5}$, więc $\frac{7}{25} \cdot |HD| + |HD| = \frac{72}{5}$.

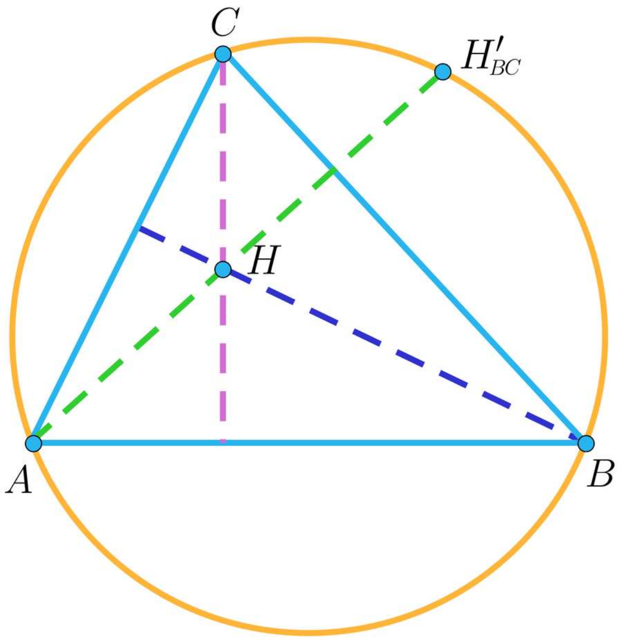
Stąd $|HD| = \frac{45}{4}$.

Ortocentrum a okrąg opisany na trójkącie

Na koniec warto wspomnieć o ciekawej własności ortocentrum – jej dowód pominiemy, ale dociekliwy uczeń może podjąć samodzielną próbę uzasadnienia.

Twierdzenie: O ortocentrum i okręgu opisanym

Obraz ortocentrum trójkąta w symetrii względem dowolnej prostej zawierającej bok tego trójkąta leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.



Twierdzenie o ortocentrum i okręgu opisanym

Słownik

wysokość trójkąta

wysokością trójkąta jest najkrótszy z odcinków łączących wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok

trójkąt ortyczny

trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości danego trójkąta nazywamy jego trójkątem ortycznym

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną. Ustal położenie wierzchołków trójkąta, a następie wybierz polecenie „Ortocentrum”. Obserwuj położenie punktu wspólnego wysokości danego trójkąta w zależności od miar kątów wewnętrznych trójkąta. Następnie wybierz polecenie „Trójkąt ortyczny”. Zmieniaj położenie wierzchołków trójkąta PQR i obserwuj jak zmienia się jego obwód. Kliknij przycisk „Koniec”, by porównać obwód trójkąta PQR i trójkąta ortycznego.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DNbXDyPqF

Polecenie 2

Ustal położenie wierzchołków, aby trójkąt ABC był rozwartokątny. Następnie znajdź takie położenie punktów P, Q, R, przy którym – twoim zdaniem – obwód jest najmniejszy. Oblicz błąd względny otrzymanego obwodu w stosunku do obwodu trójkąta ortycznego. Rozstrzygnij, czy w zagadnieniu Fagnana założenie o tym, że trójkąt jest ostrokątny jest konieczne.

Polecenie 3

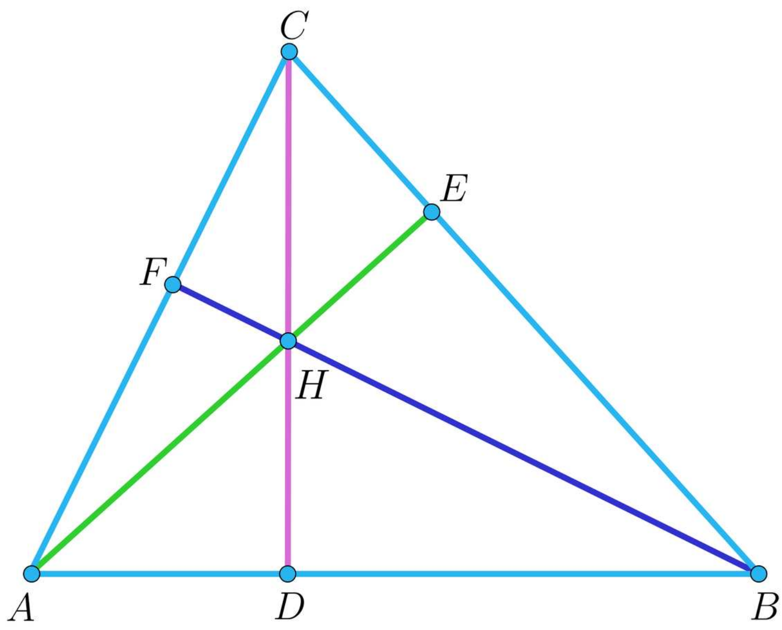
Ustal położenie wierzchołków, aby trójkąt ABC był ostrokątny. Następnie znajdź takie położenie punktów P, Q, R, przy którym – twoim zdaniem – obwód jest najmniejszy. Oblicz błąd względny otrzymanego obwodu w stosunku do obwodu trójkąta ortycznego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Punkty D, E, F są spodkami wysokości w trójkącie ABC, jak na rysunku.



Punkty D i E dzielą boki trójkąta w taki sposób, że $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{2}{5}$ oraz $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{1}{3}$. Wyznacz stosunek długości odcinków, na jakie punkt F dzieli bok AC.

Ćwiczenie 2

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB długości 17. Wysokości poprowadzone do ramion trójkąta mają długości 15. Wyznaczymy obwód trójkąta ortycznego.

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawną odpowiedź. W trójkącie prostokątnym o bokach 3, 4, 5 odległość ortocentrum od przeciwprostokątnej jest równa:

- $3\frac{3}{5}$.
- 2.
- $2\frac{2}{5}$.
- 3.

Ćwiczenie 4

Zaznacz poprawną odpowiedź. Dany jest trójkąt równoboczny ABC, w którym odległość ortocentrum od podstawy jest równa 1. Trójkąt DEF jest trójkątem ortycznym trójkąta ABC. Obwód trójkąta DEF jest równy:

- 3.
- 6.
- $\sqrt{3}$.
- $3\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

W trójkącie ostrokątnym ABC, o wysokościach odpowiednio h_a, h_b, h_c, odległości jego ortocentrum H od boków BC, AC, AB trójkąta są odpowiednio równe d_a, d_b, d_c. Wykaż, że $\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1$.
Ułóż w kolejności etapy dowodu.

Dowód:

Zatem $P_{ABC} = P_{AHB} + P_{BHC} + P_{CHA}$.

Możemy zatem zapisać równość $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P_{ABC}}{h_c} \cdot d_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P_{ABC}}{h_b} \cdot d_b + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P_{ABC}}{h_a} \cdot d_a$.

Stąd $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_c + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot d_b + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot d_a$.

Analogicznie $P_{CHA} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot d_b$ oraz $P_{AHB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_c$.

Skracając ułamki i dzieląc stronami otrzymaną równość przez P_{ABC} otrzymujemy $1 = \frac{1}{h_c} \cdot d_c + \frac{1}{h_b} \cdot d_b + \frac{1}{h_a} \cdot d_a$. Co było do udowodnienia.

Odcinek d_a jest wysokością w trójkącie BHC, dlatego pole tego trójkąta można wyrazić, jako $P_{BHC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot d_a$.

Ponieważ $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h_a$, więc $|AB| = \frac{2P_{ABC}}{h_c}$, $|AC| = \frac{2P_{ABC}}{h_b}$ oraz $|BC| = \frac{2P_{ABC}}{h_a}$.

Zauważmy, że odcinki AH, BH, CH dzielą trójkąt ABC na trzy trójkąty: AHB, BHC, CHA.

Ćwiczenie 7

Wyznacz konstrukcyjnie ortocentrum mając dane: podstawę $AB = c$ oraz wysokości $AE = h_a$ oraz $BF = h_b$.

Ćwiczenie 8

Oceń prawdziwość zdań. Przeciągnij do tabeli "PRAWDA" lub "FAŁSZ".

W dowolnym trójkącie jego ortocentrum i ortocentrum jego trójkąta ortycznego się pokrywają., W dowolnym trójkącie jego ortocentrum dzieli wysokości w stosunku $2:1$., W trójkącie równobocznym o boku długości a suma odległości jego ortocentrum od każdego z boków jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$., PRAWDA, FAŁSZ, PRAWDA

Stwierdzenie		Wartość logiczna
W dowolnym trójkącie jego ortocentrum i ortocentrum jego trójkąta ortycznego się pokrywają.		
W dowolnym trójkącie jego ortocentrum dzieli wysokości w stosunku $2:1$.		
W trójkącie równobocznym o boku długości a suma odległości jego ortocentrum od każdego z boków jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.		

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ortocentrum

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje podstawowe konstrukcje geometryczne
- zna i stosuje pojęcie wysokości trójkąta i ortocentrum
- zna i stosuje twierdzenie Cevy
- konstruuje i bada własności trójkąta ortycznego
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie zagadnień dotyczących trzech prostych, które przecinają się w jednym punkcie – tak kieruje dyskusją, by pojawiły się pojęcia symetralnej, dwusiecznej, środkowej. Następnie formułuje twierdzenie Cevy. Następnie prosi o przypomnienie pojęcia wysokości trójkąta.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o zaznaczenie wysokości trójkąta na wcześniej przygotowanym rysunku i formułuje problem istnienia ich punktu przecięcia. Nauczyciel wprowadza pojęcie ortocentrum i uczniowie ustalają kryteria jego położenia w zależności od rodzaju trójkąta. Następnie poleca uruchomić symulację interaktywną i wykonać zamieszczone w niej polecenia.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie o istnieniu ortocentrum i proponuje dorysować odpowiedni trójkąt, jak w dowodzie. Następnie prosi uczniów o określenie, czym są wysokości danego trójkąta dla trójkąta dorysowanego i na tej podstawie uczniowie zapisują niezbędne dla dowodu spostrzeżenia i formułują formalny dowód.
3. Nauczyciel prezentuje rysunek trójkąta z dorysowanymi wysokościami i zaznaczonym ortocentrum. Następnie zaznacza trójkąt, którego jednym z wierzchołków jest ortocentrum, a dwa pozostałe to dowolne wierzchołki trójkąta i prosi o wyznaczenie ortocentrum tego „nowego” trójkąta. Uczniowie formułują odpowiednią hipotezę. Nauczyciel podaje twierdzenie o „wzajemności ortocentrum” i uczniowie pod kierunkiem nauczyciela przeprowadzają dowód.
4. Nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie. Uczniowie rozwiązują problem w parach i wybrani uczniowie przedstawiają na forum klasy efekty pracy.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do przeprowadzenia dowodu twierdzenia o ortocentrum i okręgu opisanym na trójkącie.

Materiały pomocnicze:

Trójkąty i ich własności

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można ją wykorzystać przy realizacji tematu o wysokościach trójkąta.