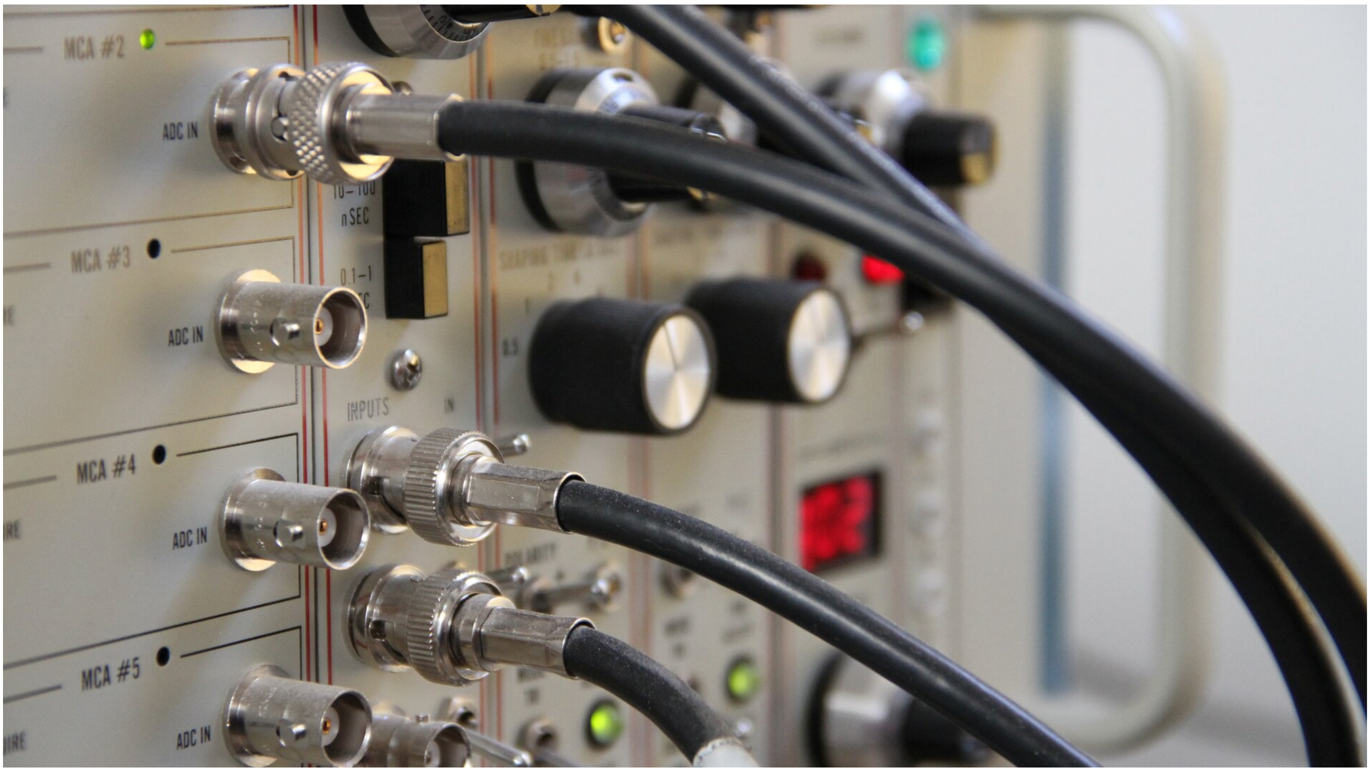


Krzywa Gaussa i odchylenie standardowe

Czy to nie ciekawe?

Na lekcji matematyki nauczyciel kazał uczniom obliczyć sumę liczb od 1 do 40. Oczekiwał, że zajmie im to przynajmniej kilkanaście minut. Tymczasem mały Carl już po minucie mówi *„Ja już obliczyłem”* i podaje wynik. Nauczyciel nie dowierzał. Posumował więc liczby sam i ku swemu zdumieniu, uzyskał ten sam wynik. *„Jak to możliwe, że tak szybko to policzyłeś?”* zapytał. *„To bardzo proste”*, odpowiedział Carl. *„Suma liczb 1 i 40 wynosi 41, 2 i 39 – też, 3 i 38 tak samo. Takich par jest dwadzieścia. Wystarczy pomnożyć 41 przez 20…”.*

Ten mały Carl to **Carl Gauss** – genialny niemiecki matematyk, fizyk, astronom…

A krzywa Gaussa to prosta recepta na rozwiązanie skomplikowanych problemów.

Twoje cele

Dzięki lekturze tego tekstu:

- poznasz postać krzywej Gaussa i jej podstawowe własności,
- dowiesz się, jakie jest znaczenie parametrów krzywej,
- zrozumiesz, dlaczego odchylenie standardowe jest tak powszechnie używane w opisie dokładności pomiarowych.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Krzywa obiekt geometryczny, którego szczególnym przypadkiem jest prosta. Ma różne cechy, których prostej „brakuje”, jak chociażby krzywizna czy punkt przegięcia. Niektóre krzywe mają swoje nazwy, na przykład: parabola, hiperbola, okrąg, elipsa, spirala itp.

Jeśli krzywa jest wykresem funkcji, może mieć punkty, które w ustalonym układzie współrzędnych interpretujemy jako minima czy maksima tej funkcji. Tego też w przypadku prostej nie zaobserwujemy.

Krzywą najłatwiej jest opisać wzorem w postaci zależności typu $y = f(x; a, b, c, \ldots)$, gdzie wartości zmiennej x są odkładane na osi poziomej, a zmiennej y, na pionowej. Symbole a, b, c, ... to parametry tej zależności, jak np. we wzorze dla paraboli: $y = ax^2 + bx + c$.

Krzywa Gaussa ma dwa parametry: a oraz σ (sigma) i opisana jest zależnością

$$y(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

Często korzysta się z prostszej postaci krzywej Gaussa dla wartości parametrów: a = 0, σ = 1:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2} .$$

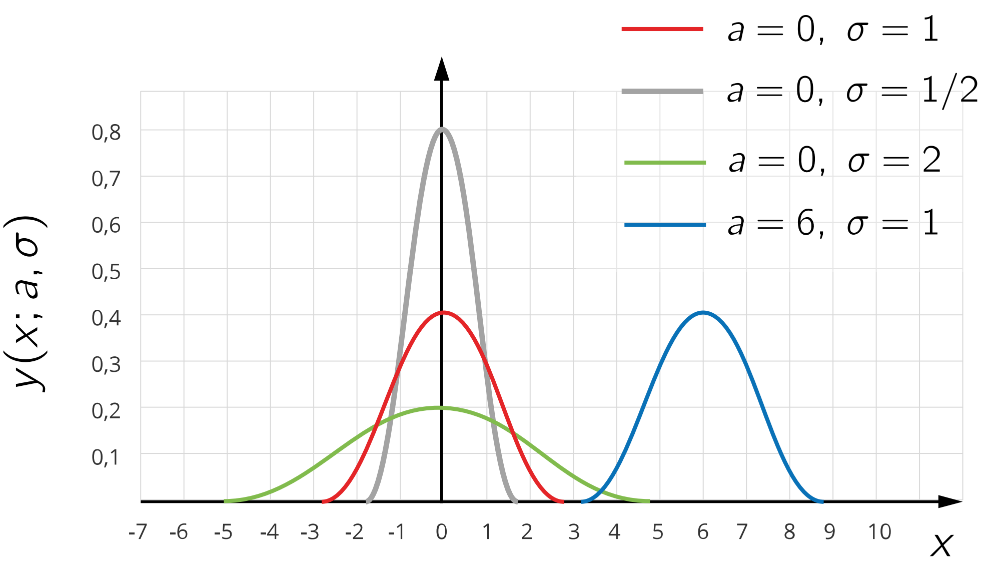
We wzorach tych jeden symbol może być dla Ciebie nowy: e to liczba niewymierna, której wartość z wystarczającą dla nas dokładnością wynosi 2,718281828459. Liczba e to **podstawa logarytmów naturalnych**, ale dla naszych celów wystarczy wiedzieć, że to po prostu liczba (większa niż 2, mniejsza niż 3), której wartość znamy.

Popatrzmy uważnie na te wzory, bo z nich wynikają ważne własności krzywej Gaussa.

1. Pierwszy czynnik to liczba, którą łatwo możemy policzyć, jeśli znamy wartość σ.

2. Drugi czynnik zawiera potęgowanie liczby większej od 1. Wykładnik jest ujemny, a więc im większa jego wartość bezwzględna, tym mniejszy drugi czynnik.
3. Ułamek w wykładniku ma w liczniku i mianowniku wyrażenia w kwadracie, a więc zawsze będzie miał wartości nieujemne. Z parzystości funkcji kwadratowej mamy bardzo ważny wniosek: krzywa Gaussa jest symetryczna względem prostej $x = a$.

Teraz już pora na pokazanie krzywych Gaussa dla różnych wartości parametrów:



Rys. 1. Krzywe Gaussa dla zadanych wartości parametrów, które podane są na rysunku.

Zauważ, że

1. Każda z krzywych rozciąga się od minus do plus nieskończoności (co ciężko oddać ze względu na szybkie malenie funkcji rozkładu do zera w miarę zwiększania różnicy między argumentem a parametrem a)
2. Im mniejsza jest wartość parametru σ (sigma), tym węższa jest krzywa i tym wyżej sięga maksimum krzywej.
3. Parametr a określa przesunięcie maksimum krzywej względem zera na osi x (Uwaga: jest to uniwersalna własność wykresów funkcji).
4. Pole obszaru między osią x a krzywą nie zależy od wartości parametrów - jest zawsze takie samo. Możesz to ocenić jedynie „na oko”, ale zapewniam Cię, że tak

właśnie jest.

> **Dla zainteresowanych**
>
> (Uwaga: współczynnik odwrotnie proporcjonalny do szerokości krzywej odpowiada właśnie za to - *oryginalną funkcję wykładniczą podzielono przez pole pod jej wykresem.*
>
> Jest to jeden z przypadków normowania funkcji. Na dość wysokim poziomie jest to analogiczne do znajdowania wersora (wektora jednostkowego) dla danego niezerowego wektora - tylko obliczenie długości wektora jest zwykle prostsze niż obliczenie pola pod wykresem funkcji. Ale znów - na bardzo wysokim poziomie jest to praktycznie to samo...)

Ale dlaczego krzywa Gaussa jest taka ważna? Odpowiem natychmiast: bo umożliwia w prosty i jednolity sposób oszacować dokładności wszelkich pomiarów, a także opisać bardzo wiele procesów zachodzących w przyrodzie. To mocne stwierdzenie i z pewnością wymaga wyjaśnienia.

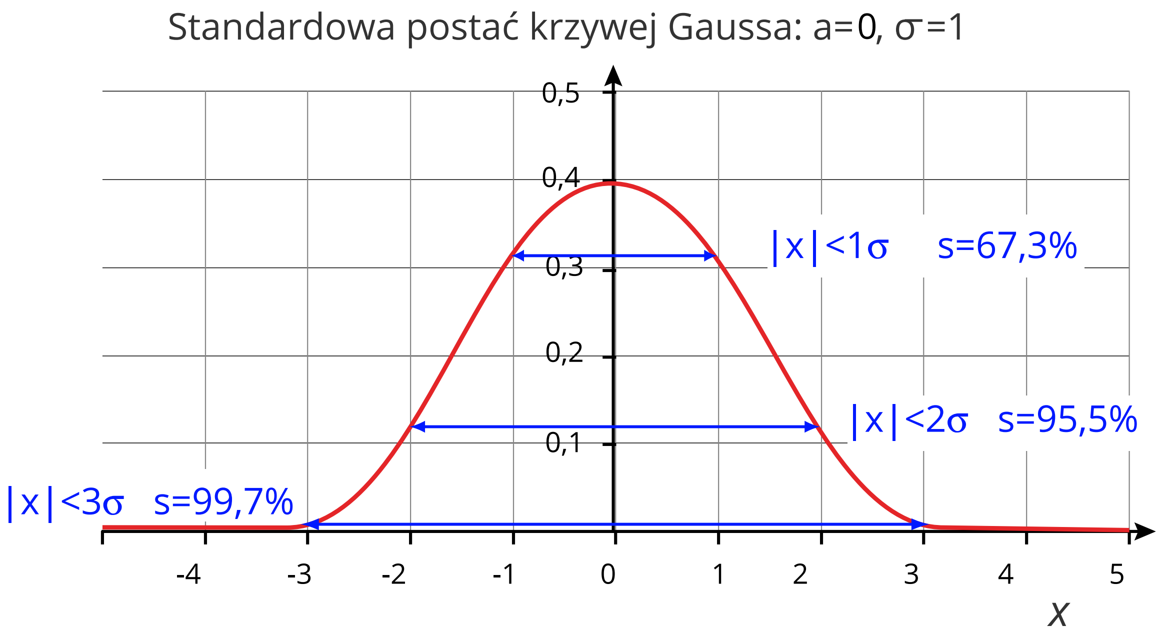
Weźmy więc za przykład czynność najprostszą i codzienną, a taką na pewno jest chodzenie. Ale czy wiesz, jaka jest długość Twojego kroku? To zależy, odpowiesz. Jest większa, jak się spieszę i mniejsza, jak spaceruję. A jak często Twoje kroki są długie, jak często krótkie. Nie wiesz? A ja wiem.

Gdybyś mierzył długość swych kroków w ciągu jakiegoś czasu, np. miesiąca (byłoby ich zapewne tysiące), to można byłoby wyliczyć ich średnią długość. Poszczególne długości byłyby jednak „porozrzucane" wokół tej średniej, większość w pobliżu, ale sporo większe i mniejsze też by się zdarzały. Chcę Ci więc powiedzieć, że rozkład odstępstw długości Twych kroków od średniej opisywany jest krzywą Gaussa. Rzecz jasna dotyczy to także nas wszystkich, chociaż każdy ma inną średnią i inny rozrzut.

Ta średnia i ten rozrzut to właśnie parametry krzywej Gaussa: średnia to a, rozrzut to σ, natomiast wysokość krzywej pokazuje, jak często dane odstępstwo od średniej się zdarza; jeśli często, to wysokość jest mniejsza, jeśli rzadko, to większa. Wiedz też, że bardzo dużo procesów, w których na wynik ma wpływ wiele różnych czynników, opisanych jest krzywą Gaussa, jak chociażby rozrzut czasu jazdy autobusu na danej trasie, czy liczby pasażerów w autobusie.

Przykłady można mnożyć, ale najbardziej klasycznym, a dla nas najważniejszym, jest proces powstawania błędów przypadkowych w pomiarach. Nieważne, co mierzysz: długość, czas, masę, prędkość, ciśnienie, temperaturę… Kiedy na wynik pomiaru mają wpływ różne czynniki o charakterze przypadkowym, to rozrzut odpowiednio dużej liczby wyników pojedynczych pomiarów wokół wartości mierzonej będzie zgodny z krzywą Gaussa (i im większa liczba tych wyników, tym lepsza zgodność). Ułatwia to w zasadniczy sposób ocenę dokładności pomiarów, pozwala porównywać pomiary wykonywane rożnymi przyrządami i metodami, umożliwia jednolity dla wszystkich na świecie ich opis.

Gdyby wydzielić grupę pomiarów, które mieszczą się w zakresie odległym od wartości średniej mniej niż wartość jednej sigmy, to okazałoby się, że takich pomiarów jest około 68,3 procent, w granicach dwóch sigm mieści się 95,5 procent, a w granicach trzech mieści się 99,7 procent (Rys. 2.). Odległość od wartości średniej równa wartości jednej sigmy to **odchylenie standardowe**. Wartość tego odchylenia można łatwo wyliczyć znając wartości wyników pomiarów: długości kroków, czasu jazdy autobusu itd. Ważne jest, że mając tak wyliczone odchylenie standardowe i wiedząc, że jest to równocześnie parametr krzywej Gaussa, wiemy wszystko o rozkładzie interesującej nas wielkości i nie musimy dla każdego przypadku szukać oddzielnego rozwiązania. Tu jest właśnie geniusz Gaussa, który już w młodości, jak wiesz, umiał upraszczać wykonywanie obliczeń.



Rys. 2. Standardowa postać krzywej Gaussa dla: a = 0, σ = 1. Strzałki poziome wydzielają obszary, w których mieści się zaznaczony procent powierzchni pod krzywą.

Więcej o rozkładzie Gaussa i odchyleniu standardowym dowiesz się z e-materiału „Rozkład normalny”.

Słowniczek

Krzywa Gaussa

(ang. *Gaussian curve*) krzywa określona wzorem Gaussa $y(x;a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, gdzie a i σ są parametrami. Krzywa przypomina kształt dzwonu i jest symetryczna względem punktu $x=a$. Parametr σ określa szerokość i wysokość krzywej. Pole pod krzywą Gaussa wynosi 1, niezależnie od wartości parametrów. Krzywa Gaussa ma bardzo szerokie zastosowanie w statystyce i analizie niepewności pomiarowych.

Odchylenie standardowe

(ang. *standard deviation*) to parametr σ krzywej Gaussa, który określa szerokość i wysokość krzywej. Może poprzyjmować tylko nieujemne wartości.

Film samouczek

Krzywa Gaussa i odchylenie standardowe

Jeżeli jeszcze nie wszystko jest dla Ciebie do końca zrozumiałe, to wątpliwości powinien rozwiać film-samouczek, do obejrzenia i wysłuchania którego serdecznie Cię zapraszam.

> **Polecenie 1**
> Skala logarytmiczna jest rodzajem skali pomiarowej, w której w równych odstępach umieszcza się logarytmy badanej wielkości. Wykorzystujemy ją, gdy chcemy na jednym wykresie zestawić ze sobą niewielkie (np. milimetry) jak i ogromne wartości funkcji (np. kilometry). Zastanów się, jaki kształt przyjmie funkcja Gaussa, jeśli zamiast przedstawiać jej wartości na wykresie y w funkcji x, będziemy przedstawiać logarytmy dziesiętne jej wartości $Y(x) = \log y(x)$ w funkcji x?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Jaka jest wartość wyrażenia $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x = a$?

Odpowiedź:

Ćwiczenie 2

Jaka jest wysokość standardowej postaci krzywej Gaussa? Podaj odpowiedź z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 3

Jaka jest wysokość krzywej Gaussa dla wartości parametrów a = -3, σ = 5? Podaj odpowiedź z dokładnością do pięciu cyfr znaczących.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 4

Mamy rozkład Gaussa o parametrach: a = 7, σ = 2,5. W jakim przedziale zawarte są wartości zmiennej niezależnej oddalone od średniej o nie więcej niż jedno odchylenie standardowe?

Odpowiedź: ($<x<$)

Ćwiczenie 5

Kiedy wartość x oddala się od wartości a, to wartość funkcji Gaussa się zmniejsza. Czy zmniejszanie następuje szybciej dla dużych wartości σ, czy dla małych? Wybierz prawidłową odpowiedź.

- ○ dla małych
- ○ nie zależy
- ○ dla dużych

Ćwiczenie 6

Co we wzorze na krzywą Gaussa sprawia, że kiedy rozkład Gaussa jest szeroki, to równocześnie zmniejsza się jego wysokość?

Ćwiczenie 7

Czy wartość parametru a może mieć wpływ na pole powierzchni pod krzywą Gaussa? Wybierz prawidłową odpowiedź.

- ○ nie może
- ○ może, ale tylko, kiedy $a = 0$
- ○ może mieć

Ćwiczenie 8

Jaka jest rola stałej π we wzorze na krzywą Gaussa? Wybierz prawidłową odpowiedź.

- Sprawia, że krzywa Gaussa ma postać dzwonu.
- Umożliwia opis procesów opartych na geometrii koła.
- Stanowi czynnik niezbędny, by pole pod krzywą Gaussa było równe 1.

Dla nauczyciela

Konspekt (scenariusz) lekcji

Imię i nazwisko autora:	Jan Pluta
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Krzywa Gaussa i odchylenie standardowe**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 15) posługuje się pojęciem niepewności pomiaru wielkości prostych i złożonych; zapisuje wynik pomiaru wraz z jego jednostką oraz z uwzględnieniem informacji o niepewności; uwzględnia niepewności przy sporządzaniu wykresów.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. definiuje wzór na krzywą Gaussa oraz rysuje odpowiadającą mu postać graficzną. 2. wyjaśnia rolę parametrów krzywej dla określenia jej kształtu i położenia na wykresie. 3. rozpoznaje relacje pomiędzy odchyleniem standardowym a kształtem krzywej Gaussa.
Strategie nauczania	Strategia nauczania: nauczanie przez dociekanie IBSE.
Metody nauczania	Rozwiązywanie problemów, pokaz multimedialny.
Formy zajęć:	- praca indywidualna, - praca w parach.
Środki dydaktyczne:	Komputer z rzutnikiem, materiały zaczerpnięte z literatury, czasopism naukowych i technicznych, telewizji itp.
Materiały pomocnicze:	materiały pomocnicze: animacje graficzne np. w EXCELu, lub na stronie geogebra.org/m/QrNaGua4
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Wprowadzenie według treści zawartej w części „Czy to nie ciekawe?” e-materiału.	
Faza realizacyjna:	

<table>
<tr><td colspan="2">Uczniowie oglądają film-samouczek.
Nauczyciel zadaje uczniom pytania:
- Jaki wzór opisuje krzywą Gaussa?
- Jaki kształt ma krzywa Gaussa?
- Jaką rolę w określeniu kształtu i położeniu krzywej mają parametry?
- Jaka jest relacja pomiędzy odchyleniem standardowym a kształtem krzywej Gaussa? itp.

W razie potrzeby nauczyciel wyjaśnia uczniom niezrozumiałe kwestie. Nauczyciel podkreśla znaczenie krzywej Gaussa i odchylenia standardowego dla opisu niepewności pomiarowych. Uczniowie rysują krzywe Gaussa dla zadanych przez nauczyciela wartości parametrów. Uczniowie rozwiązują zadania z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel wspiera uczniów w realizacji zadania.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Faza podsumowująca:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dyskusja końcowa jest zarazem wstępem do następnych lekcji, na których omawiane będzie zastosowanie krzywej Gaussa w analizie niepewności pomiarowych.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Praca domowa:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pisemna praca domowa: Narysuj krzywe Gaussa dla podanych wartości parametrów i zaznacz na nich położenie wartości parametrów krzywej.</td></tr>
<tr><td>Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:</td><td>Multimedium może być dostępna dla uczniów i wykorzystana nie tylko na lekcji, ale i w domu.</td></tr>
</table>