



Dowodzenie z wykorzystaniem cech przystawiania trójkątów - przykłady

Przykłady zadań na dowodzenie z wykorzystaniem cech przystawiania trójkątów. Kilka przykładów o większym stopniu trudności. Ilustracje do przeprowadzonych dowodów.

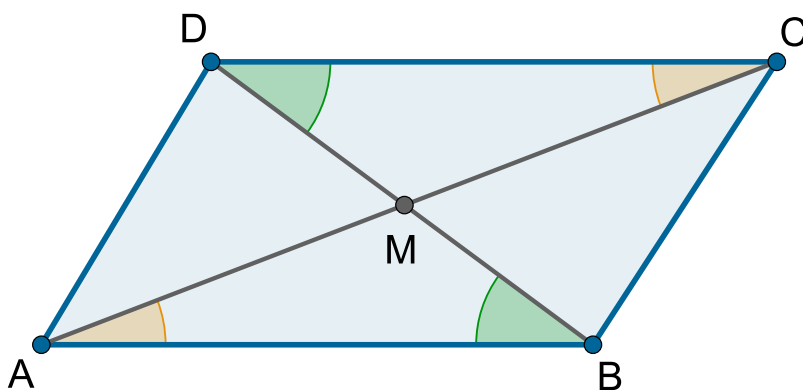
Dowodzenie z wykorzystaniem cech przystawania trójkątów - przykłady

W poniższych przykładach pokażemy zastosowanie cech przystawania trójkątów w zadaniach na dowodzenie.

Przykład 1

W równoległoboku $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie M . Wykaż, że trójkąty ABM i CDM są przystające.

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a zatem boki AB i CD są równe oraz zawierają się w prostych równoległych. Wynika stąd, że kąty CAB i DCA mają równe miary oraz kąty DBA i BDC mają równe miary.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Stąd i z równości

$$|AB| = |CD|,$$

wynika, że trójkąty ABM i CDM są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy kąt – bok – kąt.

Uwaga. Z przystawania trójkątów ABM i CDM wynika, że $|AM| = |MC|$ i $|BM| = |MD|$. Prawdziwe jest zatem poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: Przekątne w równoległoboku

W dowolnym równoległoboku przekątne dzielą się na połowy.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie: Czworokąt, który jest równoległobokiem

Czworokąt, którego przekątne dzielą się na połowy jest równoległobokiem.

Dowód

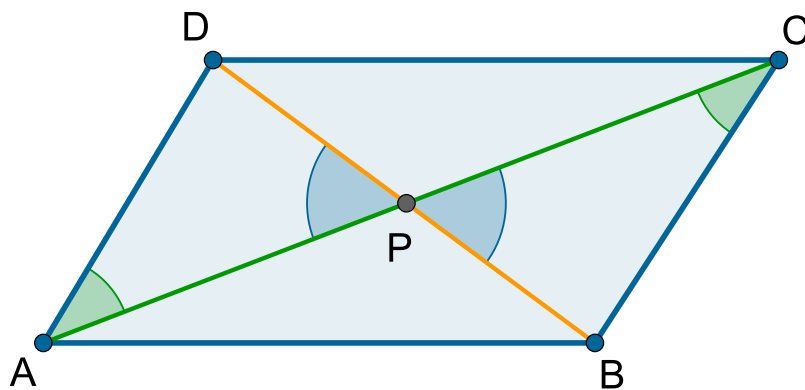
Dla dowodu rozpatrzmy czworokąt $ABCD$, którego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P będącym środkiem każdej z nich. Wtedy

$$|AP| = |CP|, |DP| = |BP|$$

oraz

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPC|,$$

jako kąty wierzchołkowe. Zatem trójkąty APD i BPC są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy bok – kąt – bok.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

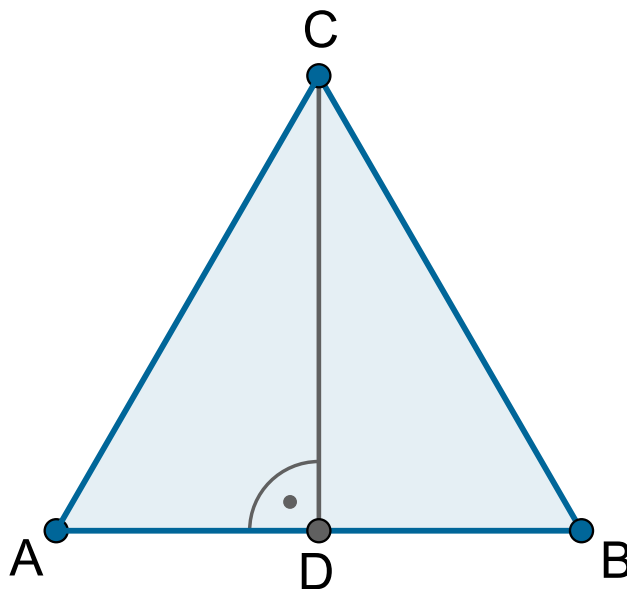
Wobec tego $|AD| = |BC|$, a także $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle PCB|$, skąd wniosek, że proste AD i BC są równoległe.

Skoro dwa boki czworokąta $ABCD$ są równe i równoległe, to jest on równoległobokiem, co kończy dowód.

Przykład 2

- W trójkącie ABC środek boku AB jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C . Wykaż, że boki AC i BC tego trójkąta są równe.

Oznaczmy przez D środek boku AB . Trójkąty ADC i BDC są prostokątne. Mają wspólną przyprostokątną DC , a także $|AD| = |DB|$.



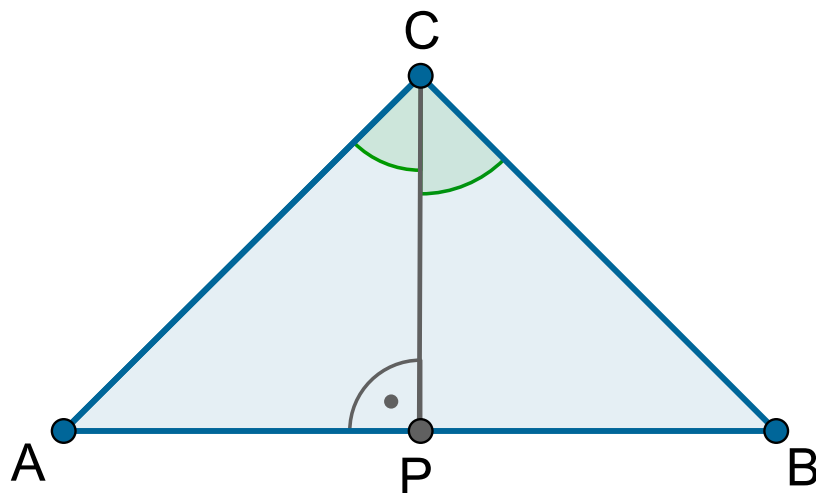
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Są to więc trójkąty przystające (na mocy cechy bok-kąt-bok). Stąd wynika, że $|AC| = |BC|$. To spostrzeżenie kończy dowód.

- W trójkącie ABC spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na bok AB jest taki punkt P , że kąty ACP i BCP mają równe miary. Wykaż, że

$$|AC| = |BC|.$$

Trójkąty APC i BPC są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną PC , a także kąty ACP i BCP mają równe miary.

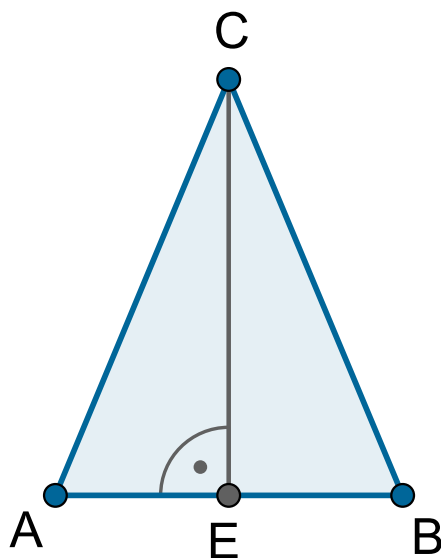


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąty te są zatem przystające (na mocy cechy kąt – bok – kąt). Stąd $|AC| = |BC|$.
Koniec dowodu.

- W trójkącie ABC boki AC i BC są równe. Wykaż, że spodem wysokości opuszczonej z wierzchołka C tego trójkąta jest środek boku AB .

Oznaczmy przez E spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C na bok AB .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych AEC i BEC mamy odpowiednio

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

$$|BE|^2 + |EC|^2 = |BC|^2,$$

skąd

$$|AE|^2 = |AC|^2 - |EC|^2$$

$$|BE|^2 = |BC|^2 - |EC|^2.$$

Skoro $|AC| = |BC|$, to $|AE|^2 = |BE|^2$. Uwzględniając, że $|AE| > 0$ oraz $|BE| > 0$, otrzymujemy $|AE| = |BE|$, czyli punkt E jest środkiem boku AB , co należało wykazać.

Uwaga!

Ponieważ odpowiednie boki w trójkątach AEC i BEC są równe, to na mocy cechy bok-bok-bok stwierdzamy, że trójkąty te są przystające. Wynika z tego, że

$$|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle CBE|,$$

$$|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle BCE|.$$

Prawdziwe jest więc poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: Trójkąt równoramienny

W dowolnym trójkącie równoramiennym

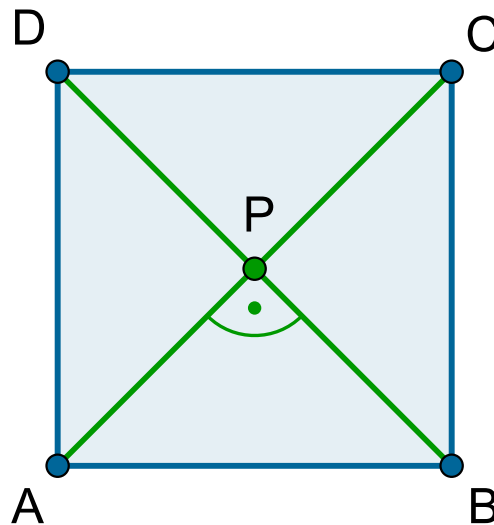
- kąty wewnętrzne przy podstawie są równe,
- środek podstawy jest spodkiem wysokości opuszczonej na tę podstawę,
- wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta wspólnego dla ramion zawiera się w dwusiecznej tego kąta.

Przykład 3

W prostokącie $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się pod kątem prostym. Wykaż, że

$$|AB| = |BC|.$$

Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych AC i BD prostokąta $ABCD$. Jest on środkiem każdej z tych przekątnych, bo czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że punkt P jest spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka B na bok AC . Wobec tego trójkąt ABC jest równoramienny i

$$|AB| = |BC|.$$

To spostrzeżenie kończy dowód.

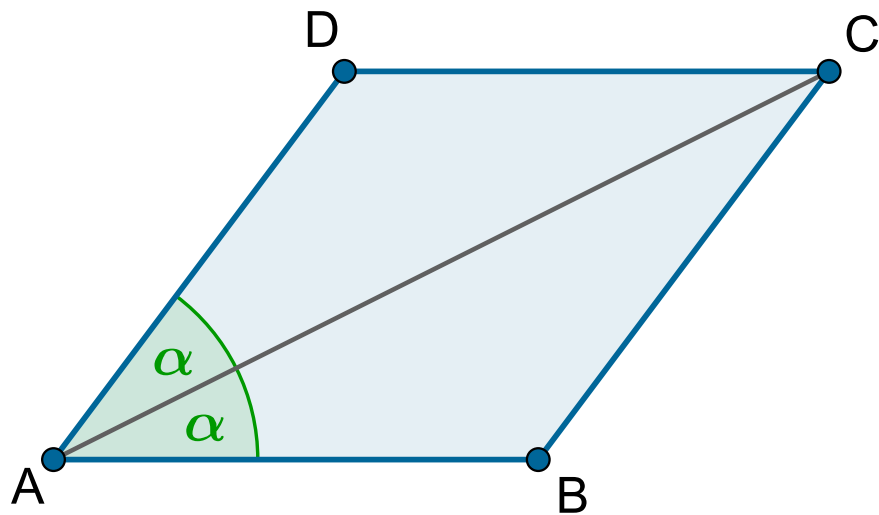
Udowodniliśmy więc, że prostokąt, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym jest kwadratem.

Przykład 4

W równoległoboku $ABCD$ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta BAD . Wykaż, że przekątne AC i BD tego równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.

Oznaczmy przez α miarę każdego z kątów, na które dwusieczna AC podzieliła kąt BAD

$$|\sphericalangle CAB| = \alpha, |\sphericalangle CAD| = \alpha.$$

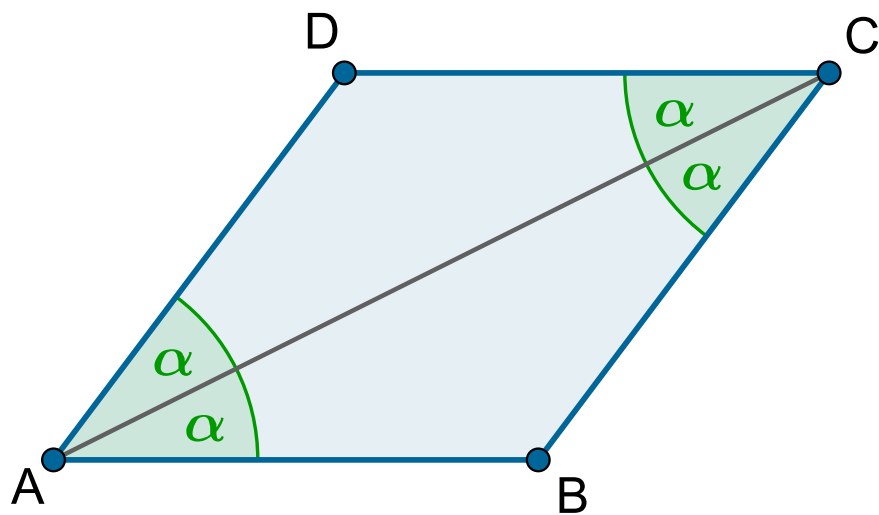


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy

$$|\sphericalangle ACD| = \alpha$$

$$|\sphericalangle ACB| = \alpha.$$

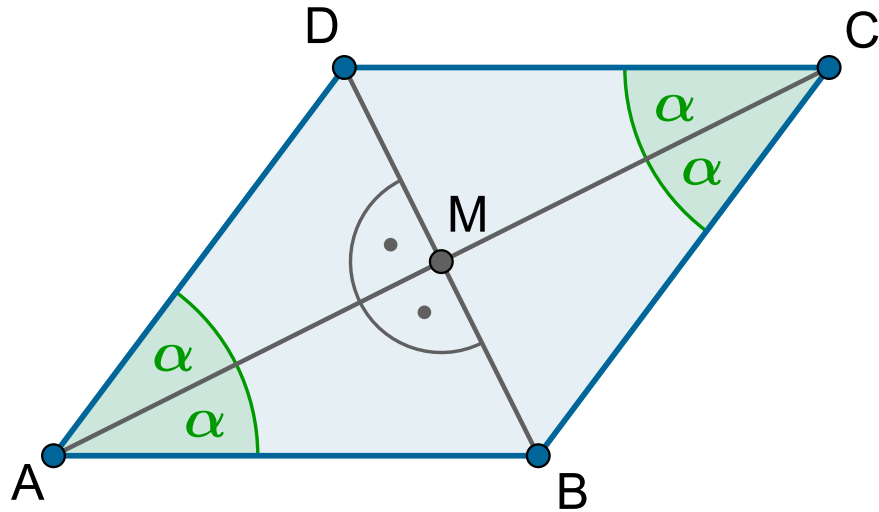


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąty ABC i ADC są zatem równoramienne, bo w każdym z nich kąty przy podstawie AC mają miarę równą α . Zatem

$$|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$$

Wynika z tego, że spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka B trójkąta ABC na podstawę AC jest środek M odcinka AC , który jest również spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D trójkąta ADC na podstawę AC .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

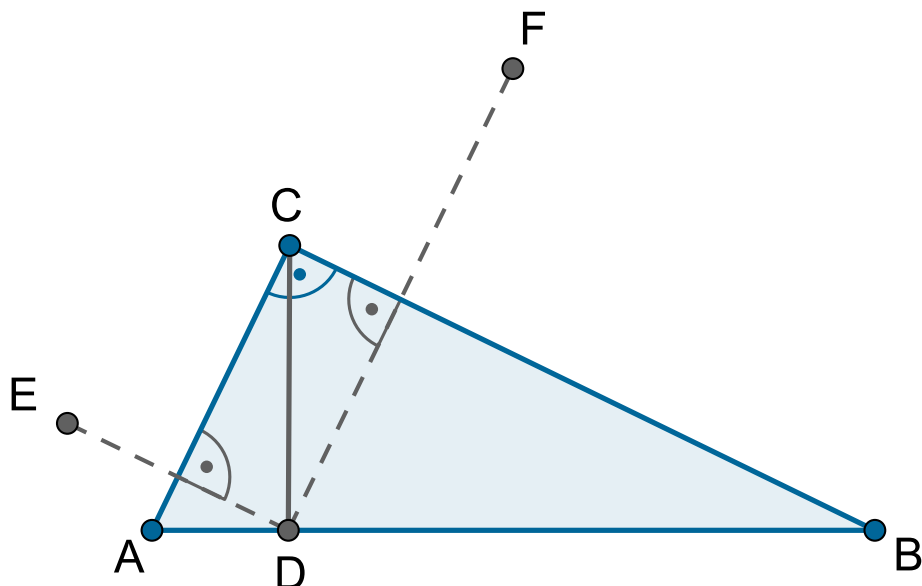
Wobec tego miary kątów BMA i AMD sumują się do kąta półpełnego, zatem punkt M leży na przekątnej BD .

To oznacza, że przekątne AC i BD równoległoboku przecinają się pod kątem prostym. Koniec dowodu.

Uwaga. Wykazaliśmy, że jeżeli w równoległoboku $ABCD$ przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta BAD , to równoległobok $ABCD$ jest rombem.

Przykład 5

W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego C na przeciwprostokątną AB . Punkt E jest symetryczny do punktu D względem prostej AC , a punkt F jest symetryczny do punktu D względem prostej BC .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

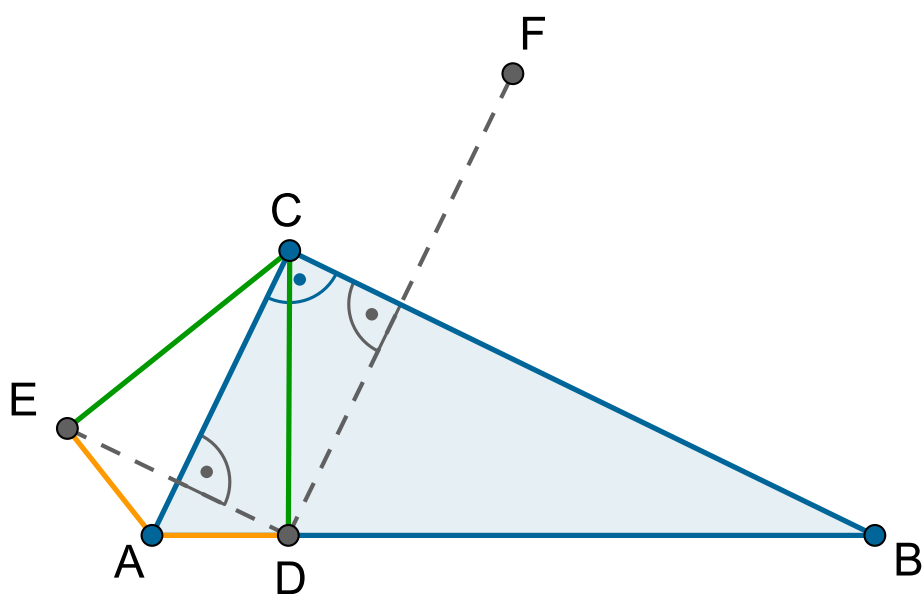
Wykażemy, że punkty C , E i F leżą na jednej prostej.

Zauważmy, że prosta AC jest symetralną odcinka DE . Wynika stąd, że

$$|AE| = |AD|,$$

$$|CE| = |CD|.$$

Wobec tego trójkąty EAC i DAC są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy bok – bok – bok.



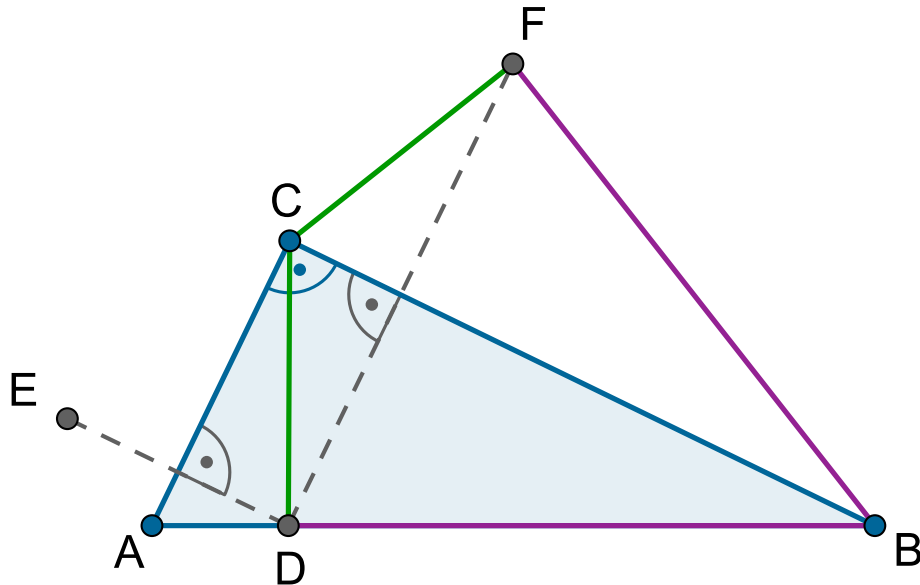
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy też, że prosta BC jest symetralną odcinka DF . Wynika stąd, że

$$|BF| = |BD|,$$

$$|CF| = |CD|.$$

Zatem trójkąty FBC i DBC są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy bok – bok – bok.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie ABC kąt ACB jest prosty. Oznaczmy przez α miarę kąta CAB . Wtedy

$$|\sphericalangle CBA| = 90^\circ - \alpha.$$

W trójkącie prostokątnym ADC kąt przy wierzchołku D jest prosty i

$$|\sphericalangle CAD| = \alpha,$$

więc

$$|\sphericalangle DCA| = 90^\circ - \alpha.$$

Wobec tego

$$|\sphericalangle EAC| = 90^\circ - \alpha.$$

(bo $\angle DCA$ i $\angle ECA$ to odpowiednie kąty w trójkątach przystających EAC i DAC).
W trójkącie prostokątnym BDC kąt przy wierzchołku D jest prosty i

$$|\angle DBC| = 90^\circ - \alpha.$$

Zatem

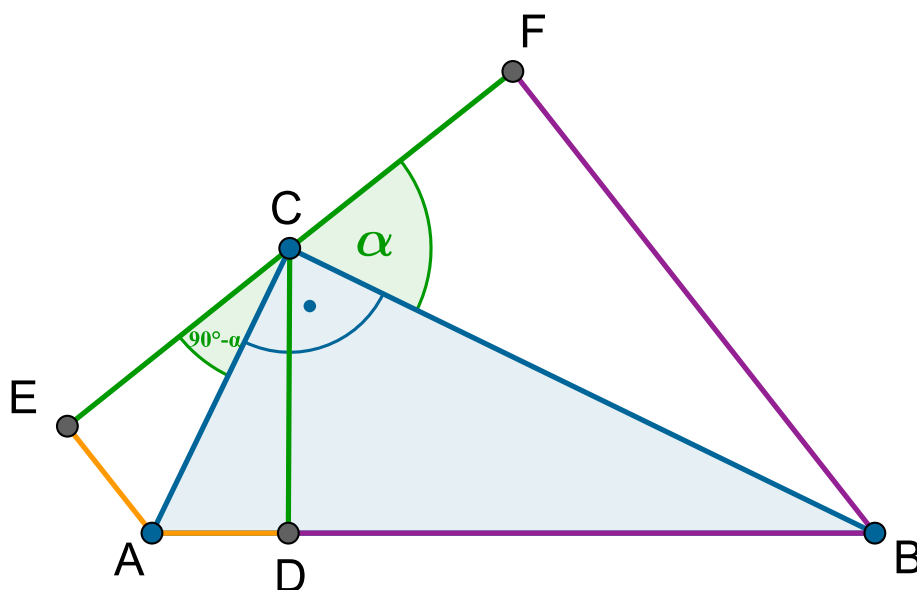
$$|\angle BCD| = \alpha.$$

Wobec tego

$$|\angle BCF| = \alpha,$$

(bo $\angle BCD$ i $\angle BCF$ to odpowiednie kąty w trójkątach przystających FBC i DBC).
Obliczmy miarę kąta ECF . Mamy

$$|\angle ECF| = |\angle ECA| + |\angle ACB| + |\angle BCF| = (90^\circ - \alpha) + 90^\circ + \alpha = 180^\circ.$$

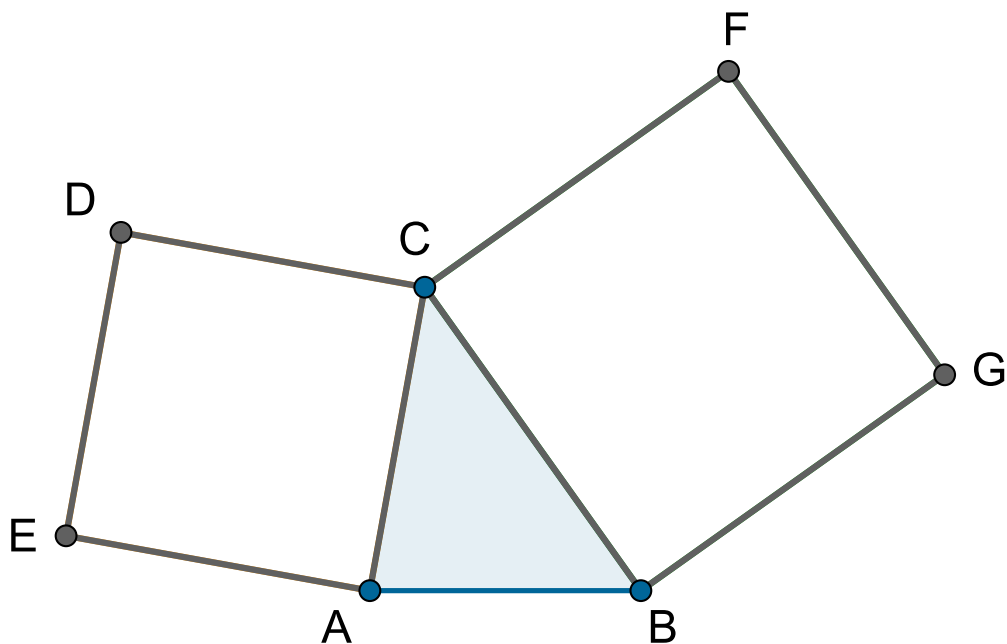


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wynika z tego, że punkty C , E i F leżą na jednej prostej, a to właśnie należało udowodnić.

Przykład 6

Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano kwadraty $ACDE$ i $BCFG$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wykażemy, że odcinki BD i AF mają równe długości.

Oznaczmy

$$|AC| = b, |BC| = a, |\sphericalangle ACB| = \gamma.$$

Czworokąt $ACDE$ jest kwadratem, więc $|CD| = |AC| = b$. Czworokąt $BCFG$ jest również kwadratem, więc

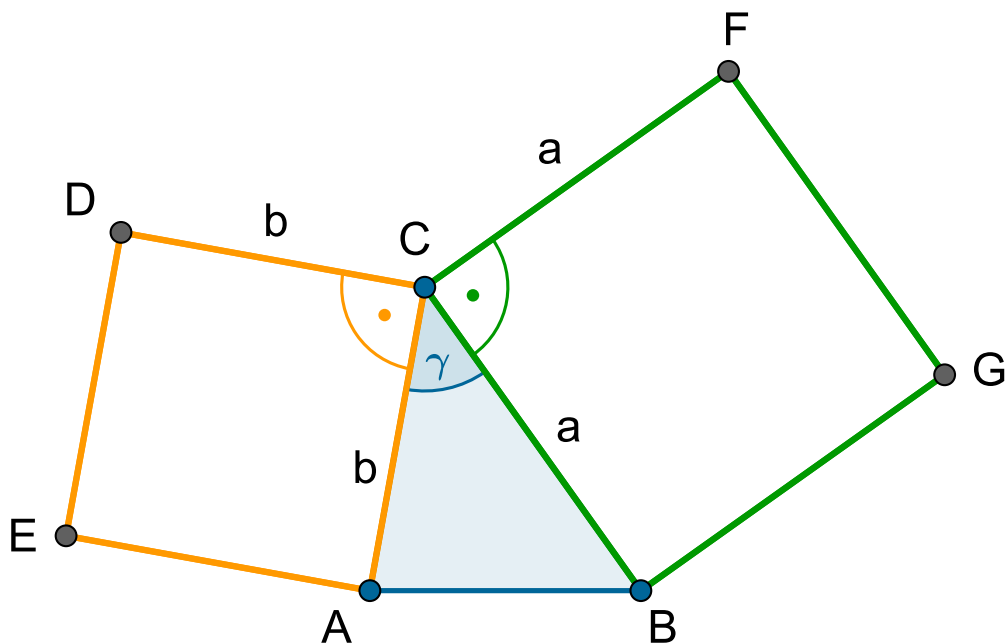
$$|CF| = |BC| = a.$$

Ponadto

$$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DCA| + |\sphericalangle ACB| = 90^\circ + \gamma$$

oraz

$$|\sphericalangle ACF| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCF| = \gamma + 90^\circ.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego

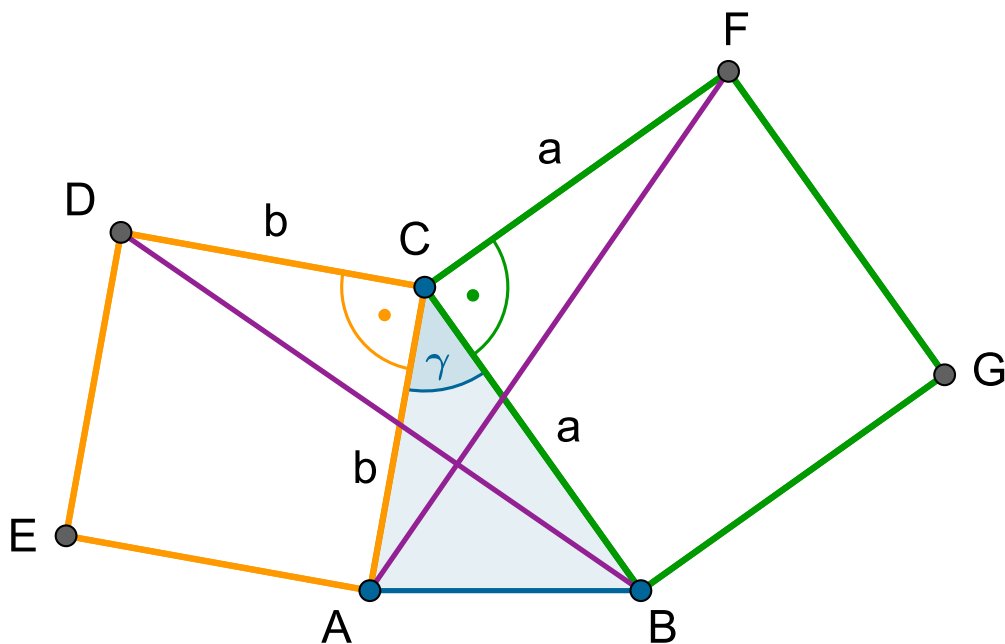
$$|CD| = |AC| = b$$

$$|\angle DCB| = |\angle ACF| = 90^\circ + \gamma$$

$$|CB| = |CF| = a,$$

więc trójkąty DCB i ACF są przystające, na mocy cechy bok – kąt – bok.

Wynika z tego, że $|BD| = |AF|$ (bo są to odpowiednie boki w trójkątach przystających).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

To kończy dowód.

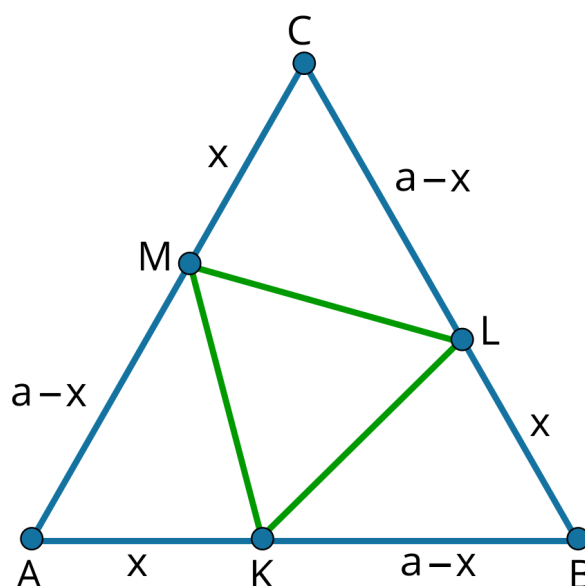
Przykład 7

Na bokach AB , BC i CA trójkąta równobocznego ABC wybrano odpowiednio punkty K , L i M tak, że

$$|AK| = |BL| = |CM|.$$

Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta równobocznego ABC i przez x – długość każdego z odcinków AK , BL i CM . Wtedy każdy z odcinków AM , CL i BK ma długość $a - x$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ

$$|AK| = |BL| = |CM| = x$$

$$|\sphericalangle MAK| = |\sphericalangle KBL| = |\sphericalangle LCM| = 60^\circ$$

$$|MA| = |KB| = |LC| = a - x$$

to trójkąty MAK , KBL i LCM są przystające, na mocy cechy bok – kąt – bok. Wobec tego odcinki MK , KL i LM są równe, więc trójkąt KLM jest równoboczny. Koniec dowodu.

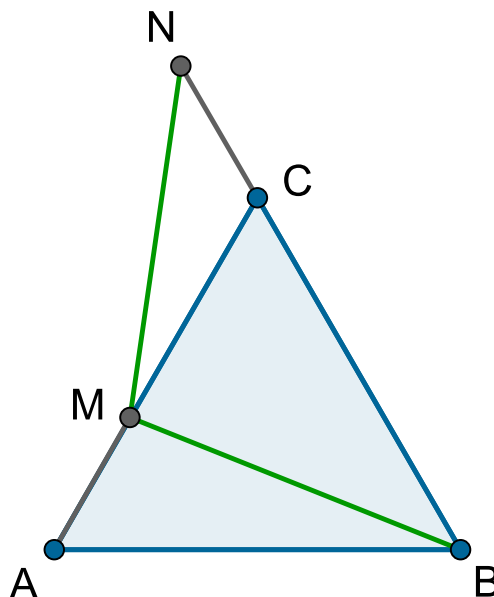
Przykład 8

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B , C , N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M taki, że

$$|AM| = |CN|.$$

Wykaż, że

$$|BM| = |MN|.$$



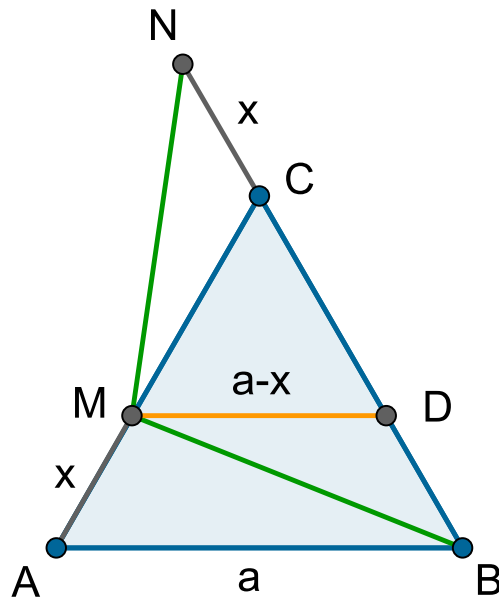
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczamy

$$|AB| = |BC| = |CA| = a, |AM| = |CN| = x.$$

- sposób I

Wyberzmy na boku BC taki punkt D , że odcinki MD i AB są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy

$$|\sphericalangle CMD| = |\sphericalangle CAB| = 60^\circ,$$

czyli trójkąt CMD jest równoboczny, a jego bok jest równy $a - x$. Zatem

$$|MD| = |CM| = a - x,$$

$$|BD| = |BC| - |CD| = a - (a - x) = x, |CN| = x,$$

$$|\sphericalangle BDM| = 120^\circ, |\sphericalangle NCM| = 120^\circ,$$

więc trójkąty BDM i MCN są przystające, na mocy cechy bok – kąt – bok.

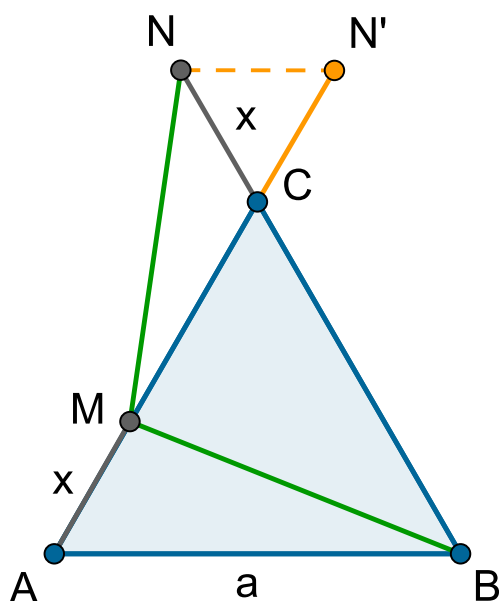
Wobec tego odcinki BM i MN są równe.

Koniec dowodu.

- sposób II

Przedłużamy bok AC o odcinek CN' tak, że

$$|MN'| = a.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy w trójkącie NCN' mamy

$$|CN| = |CN'| = x$$

oraz

$$|\sphericalangle NCN'| = 60^\circ.$$

więc trójkąt NCN' jest równoboczny.

Wynika z tego, że

$$|NN'| = x.$$

Zatem

$$|MN'| = |AB| = a,$$

$$|NN'| = |MA| = x,$$

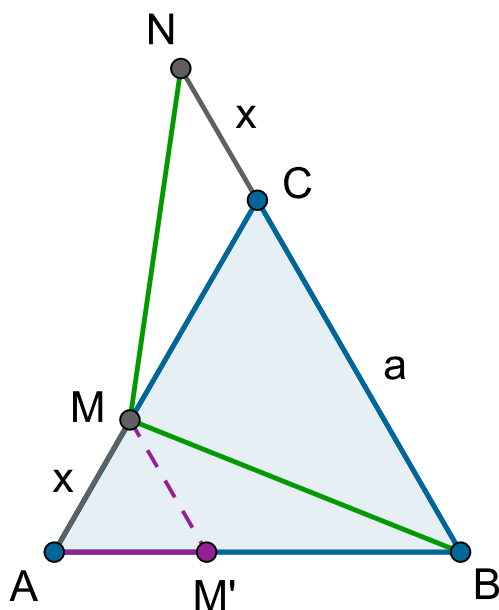
$$|\sphericalangle MN'N| = 60^\circ, |\sphericalangle BAM| = 60^\circ,$$

więc trójkąty $MN'N$ i BAM są przystające, na mocy cechy bok – kąt – bok. Wobec tego odcinki BM i MN są równe. Koniec dowodu.

- sposób III

Na boku AB odkładamy taki punkt M' , że

$$|AM'| = |AM| = x.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wówczas trójkąt AMM' jest równoboczny, a jego bok jest równy x . Wynika z tego, że

$$|MM'| = x, \angle BM'M = 120^\circ.$$

Wobec tego

$$|MM'| = |NC| = x$$

$$|M'B| = |CM| = a - x$$

$$|\sphericalangle MM'B| = 120^\circ, |\sphericalangle NCM| = 120^\circ,$$

więc trójkąty $MM'B$ i NCM są przystające, na mocy cechy bok – kąt – bok.
Zatem odcinki BM i MN są równe.

Koniec dowodu.