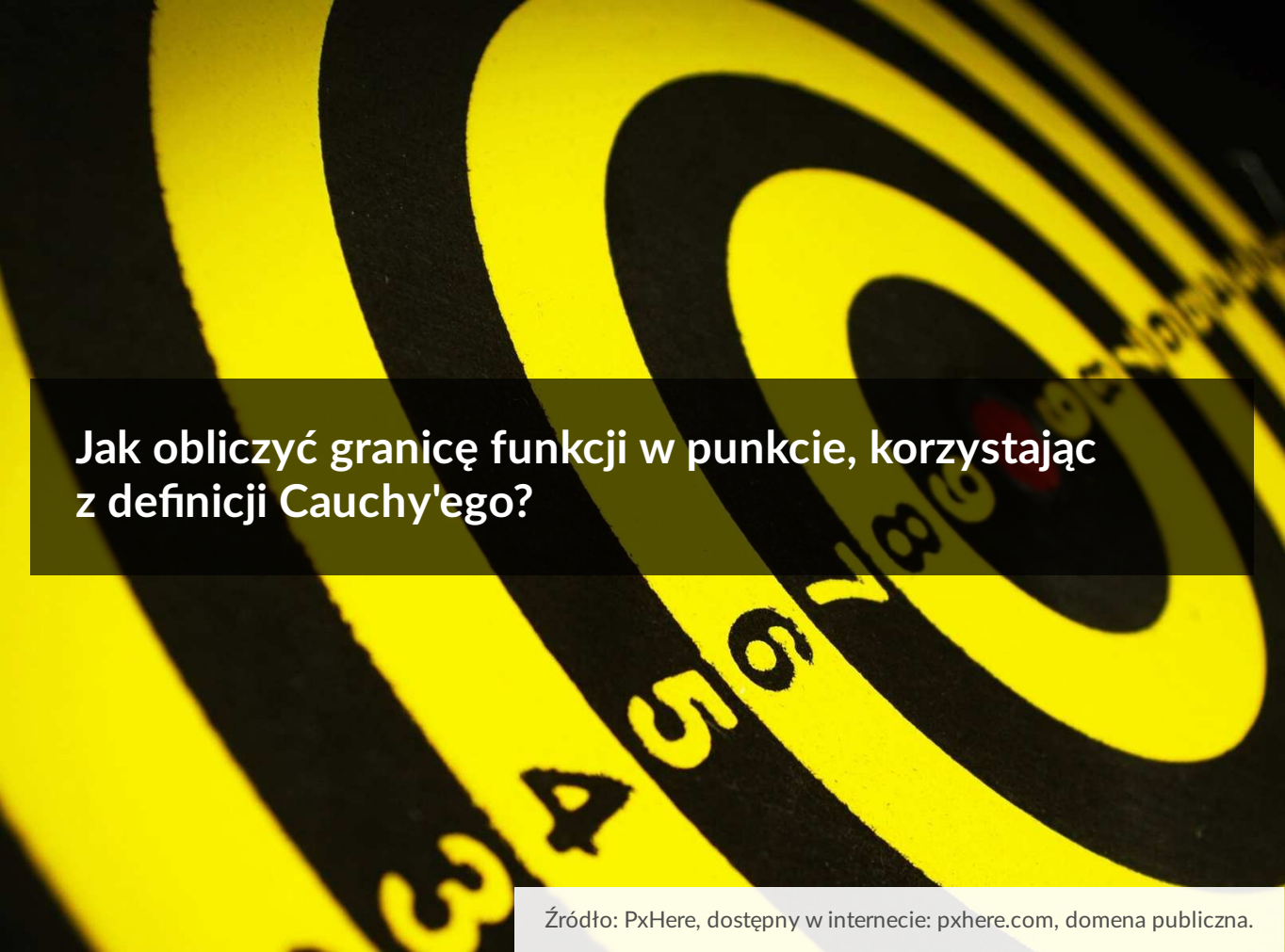




Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Cauchy'ego?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Cauchy'ego?

Źródło: PxHere, dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie w odróżnieniu od definicji Heinego nie wykorzystuje pojęcia granicy ciągu. Wykorzystuje pojęcie otoczenia i sąsiedztwa punktu oraz zwykłą arytmetykę liczb. Definicja podana przez Augustina Louisa Cauchy'ego nie pozwala na ogół na bezpośrednie obliczenie granicy funkcji w punkcie a jedynie na wykazanie, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie. Temat ten poświęcimy podaniu przykładów wykorzystania definicji Cauchy'ego w dowodzeniu, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie. Ponadto w sekcji Film samouczek pokażemy jak wykorzystać definicję Cauchy'ego do obliczenia granicy funkcji.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie definicję granicy funkcji w punkcie według Cauchy'ego.
- Wykażesz, korzystając z definicji Cauchy'ego, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie.

Przeczytaj

Na początek przypomnijmy sobie definicję Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie.

Definicja: Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą funkcji $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla argumentów funkcji f należących do sąsiedztwa punktu x_0 o promieniu δ (tzn. dla każdego $x \in D_f$ takiego, że $0 < |x - x_0| < \delta$), wartości funkcji f należą do otoczenia liczby g o promieniu ε , tzn. spełniony jest warunek $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Definicję Cauchy'ego na ogół wykorzystuje się do wykazywania, że dana z góry liczba jest granicą pewnej funkcji w punkcie. W pewnych szczególnych przypadkach jest możliwe obliczenie granicy funkcji w punkcie z wykorzystaniem definicji Cauchy'ego. Przykład taki można znaleźć w Samouczku w kolejnej sekcji. Poniższe przykłady pokazują w jaki sposób można użyć definicji Cauchy'ego do wykazania, że dana funkcja posiada granicę w punkcie równą z góry zadanej wartości.

Przykład 1

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow p} (ax + b) = ap + b,$$

gdzie $a, b, p \in \mathbb{R}$ są danymi liczbami oraz $a \neq 0$. Zgodnie z definicją Cauchy'ego weźmy dowolną, ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$. Musimy wskazać liczbę $\delta > 0$ tak, aby spełniona była definicja Cauchy'ego. Niech $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x - p| < \delta$ otrzymamy

$$|(ax + b) - (ap + b)| = |a(x - p)| = |a| \cdot |x - p| < |a| \cdot \delta = \varepsilon.$$

Definicja Cauchy'ego jest zatem spełniona, co dowodzi że

$$\lim_{x \rightarrow p} (ax + b) = ap + b.$$

Przykład 2

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow p} (x^2 - 2px) = -p^2,$$

gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest danym parametrem. Zgodnie z definicją Cauchy'ego weźmy dowolną, ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$. Musimy wskazać liczbę $\delta > 0$ tak, aby spełniona była definicja

Cauchy'ego. Niech $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x - p| < \delta$ otrzymamy

$$|(x^2 - 2px) - (-p^2)| = |x^2 - 2px + p^2| = |x - p|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Definicja Cauchy'ego jest zatem spełniona, co dowodzi że

$$\lim_{x \rightarrow p} (x^2 - 2px) = -p^2.$$

Przykład 3

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{3x - 6} = \frac{5}{3}.$$

Weźmy dowolną, ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$. Wskażemy liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x - 2| < \delta$ spełniony był warunek $|f(x) - \frac{5}{3}| < \varepsilon$. Zauważmy, że

$$\left| \frac{x^2 + x - 6}{3x - 6} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{x^2 + x - 6 - 5(x - 2)}{3x - 6} \right| = \left| \frac{x^2 - 4x + 4}{3x - 6} \right| = \frac{|x - 2|}{3}.$$

Ponieważ wiemy, że $|x - 2| < \delta$ więc przyjmując $\delta = 3\varepsilon$, otrzymamy

$$\left| f(x) - \frac{5}{3} \right| = \frac{|x - 2|}{3} < \frac{\delta}{3} = \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Na mocy definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{3x - 6} = \frac{5}{3}.$$

Przykład 4

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x + 2} = 8.$$

Weźmy dowolną, ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$. Wskażemy liczbę $\delta > 0$ tak, aby spełniona była definicja Cauchy'ego, tzn. aby dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x + 2| < \delta$ zachodziła nierówność $\left| \frac{x^3 - 4x}{x + 2} - 8 \right| < \varepsilon$. Mamy

$$\left| \frac{x^3 - 4x}{x + 2} - 8 \right| = \left| \frac{x(x + 2)(x - 2) - 8(x + 2)}{x + 2} \right| = |x^2 - 2x - 8| = |x + 2||x - 4|.$$

Ponieważ wiemy, że $0 < |x + 2| < \delta$ więc w szczególności

$$-\delta < x + 2 < \delta.$$

Odejmując stronami 6, otrzymamy

$$-\delta - 6 < x - 4 < \delta - 6.$$

Ponieważ $\delta - 6 < \delta + 6$ więc z ostatniego ciągu nierówności wynika, że $|x - 4| < \delta + 6$. Stąd oraz z (1) mamy

$$\left| \frac{x^3 - 4x}{x+2} - 8 \right| = |x + 2| |x - 4| < \delta(\delta + 6)$$

Ponieważ liczbę $\delta > 0$ możemy wybrać dowolnie, więc dobierając ją dostatecznie blisko zera prawdziwa będzie nierówność $\delta(\delta + 6) < \varepsilon$. Aby ją wyznaczyć wystarczy rozwiązać równanie $\delta(\delta + 6) = \varepsilon$ względem δ . W tym przypadku otrzymamy $\delta_0 = \sqrt{\varepsilon + 9} - 3 > 0$. Wybierzmy zatem dodatnią liczbę δ tak aby była mniejsza od δ_0 . Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x + 2| < \delta$ dostaniemy

$$\left| \frac{x^3 - 4x}{x+2} - 8 \right| < \delta(\delta + 6) < \delta_0(\delta_0 + 6) = \varepsilon$$

Definicja Cauchy'ego jest zatem spełniona, co dowodzi że

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x+2} = 8$$

Przed kolejnym przykładem przytoczymy pewną ważną nierówność.

Ważne!

Dla wszystkich liczb rzeczywistych prawdziwa jest nierówność

$$|\sin x| < |x|$$

W szczególności dla $x > 0$ zachodzi

$$\sin x < x.$$

Przykład 5

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Weźmy dowolną, ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$. Wskażemy liczbę $\delta > 0$ tak, aby spełniona była definicja Cauchy'ego. Ponieważ

$$\left| \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right| = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2} \right|.$$

więc ze wzoru na [sumę sinusów](#) mamy

$$\left| \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x-\pi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| \left| \cos \frac{x-\pi}{2} \right|.$$

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ oraz $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, więc

$$\cos \frac{x-\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \sin \frac{x}{2}.$$

Z przytoczonej wcześniej nierówności wynika, że $\left|\sin \frac{x}{2}\right| < \left|\frac{x}{2}\right|$. Reasumując

$$\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right| = 2\left|\sin \frac{x}{2}\right|^2 < 2\left|\frac{x}{2}\right|^2 = \frac{|x|^2}{2}.$$

Niech zatem $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$. Stąd oraz z powyższej nierówności dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x| < \delta$ otrzymamy

$$\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right| < \frac{|x|^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon.$$

Na mocy definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Słownik

suma sinusów

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Animacja

Polecenie 1

Na poniższej animacji pokazano w jaki sposób definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie może być użyta, zarówno do obliczenia granicy jak i wykazania, że dana z góry liczba jest granicą funkcji w punkcie. Zapoznaj się z przedstawionymi metodami a następnie wykonaj zamieszczone poniżej polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DEXKtCuUo>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej obliczania granicy na mocy definicji Cauchy'ego.

Polecenie 2

Korzystając z definicji Cauchy'ego, oblicz granicę funkcji $f(x) = 3 - 2x$ w punkcie $x_0 = 2$.

Polecenie 3

Korzystając z definicji Cauchy'ego wykaż, że $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 1) = 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1) =$

☐ 1

☐ 2

☐ -2

☐ -1

Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłową odpowiedź. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x) =$

☐ -2

☐ 4

☐ -4

☐ 2

Ćwiczenie 3



Które z podanych granic są równe (-1) ?

☐ $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x)$

☐ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1 - 4x)$

☐ $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)$

☐ $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)$

Ćwiczenie 4



Przeciągnij w puste miejsca odpowiednie wyrażenia.

Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x + 1) = \boxed{}$.

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i połóżmy $\delta = \boxed{}$.

Wówczas dla wszystkich argumentów funkcji $f(x) = 3x + 1$ takich, że

$$0 < |x - \boxed{}| < \delta$$

otrzymujemy

$$|f(x) - g| = |3x - 1| = 3|x - \frac{1}{3}| < \boxed{} = \varepsilon$$

$\frac{\varepsilon}{3}$

3δ

0

$\frac{1}{3}$

3ε

3

2

Ćwiczenie 5



Uzupełnij tekst, przeciągając w puste pola odpowiednie wyrażenia.

Wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 12x) =$.

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i połóżmy $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Wówczas dla wszystkich argumentów funkcji

$f(x) = 2x^2 - 12x$ takich, że $0 < |x -$ $| < \delta$ mamy

$|f(x) - g| =$ $< 2\delta^2 = \varepsilon$.

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Korzystając z definicji Cauchy'ego, udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} \right) = 3$.

Ćwiczenie 8



Korzystając z definicji Cauchy'ego, udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x + 2\pi) = 1$.

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Cauchy'ego?

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję Cauchy'ego do obliczania granic wybranych typów funkcji.
- stosuje definicję Cauchy'ego do wykazywania, że dana liczba jest granicą wybranych funkcji elementarnych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda akwariów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Cauchy'ego?”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Granice funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Cauchy'ego?”.