Badanie monotoniczności ciągów

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Petri Haanpaa, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W sytuacjach życia codziennego często spotykamy różnego rodzaju ciągi liczbowe. Prawie zawsze są to ciągi, których nie można opisać prostymi wzorami. Trudno też przewidzieć, czy będą stale rosły lub malały. Jednak teoretyczna umiejętność badania czy dany ciąg jest rosnący, czy malejący często przydaje się przy określaniu ich dalszego przebiegu.

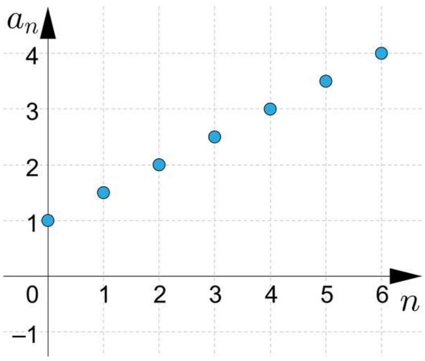
W tym materiale poznamy sposoby określania monotoniczności ciągów liczbowych. Zarówno skończonych, jak i nieskończonych.

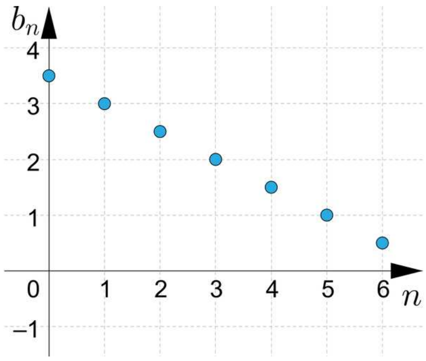
Twoje cele

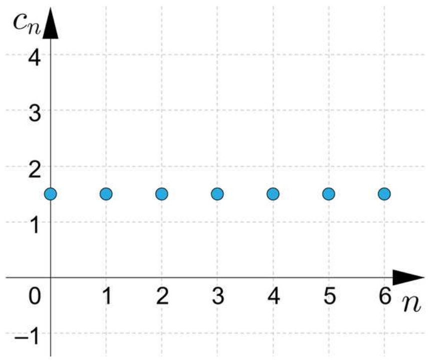
- Określisz monotoniczność danego ciągu.
- Ustalisz na podstawie wykresu czy ciąg jest rosnący, czy malejący.
- Korzystając ze wzoru ciągu, zbadasz jego monotoniczność.
- Określisz wyraz ciągu, od którego dany ciąg jest monotoniczny.
- Udowodnisz, że dany ciąg jest rosnący albo malejący.

Przeczytaj

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy trzech ciągów.







Pierwszy wykres jest wykresem ciągu rosnącego – każdy kolejny wyraz ciągu (a_n) jest większy od wyrazów poprzednich.

Uwaga

W niektórych przypadkach w tym materiale rozważać będziemy ciągi określone dla wszystkich liczb naturalnych. Najczęściej jednak określamy ciagi tylko dla liczb naturalnych dodatnich. Do takiej dziedziny ograniczymy się więc w definicjach ciągów monotonicznych, choć można analogiczne definicje sformułować dla ciągów określonych w całym zbiorze liczb naturalnych.

> **Definicja: Ciąg rosnący**
>
> Ciąg (a_n) nazywamy rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego.
>
> Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność
>
> $$a_{n+1} > a_n$$

Drugi wykres – to wykres ciągu malejącego – każdy kolejny wyraz ciągu (b_n) jest mniejszy od wyrazów poprzednich.

> **Definicja: Ciąg malejący**
>
> Ciąg (a_n) nazywamy malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego.
>
> Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność
>
> $$a_{n+1} < a_n$$

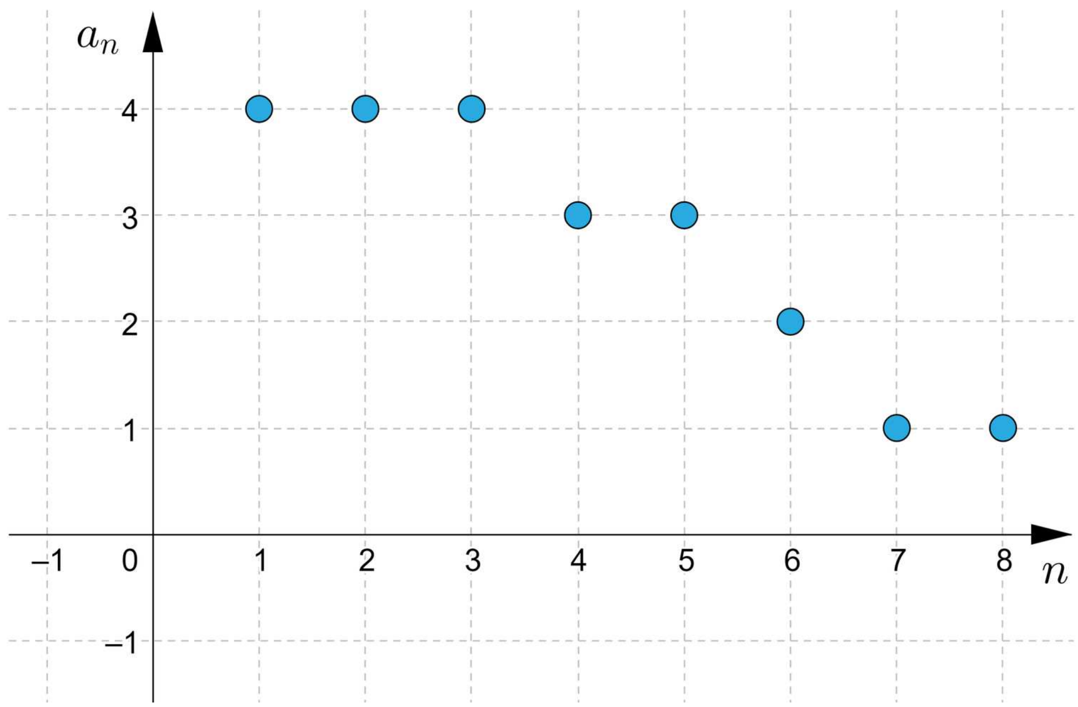
Trzeci wykres, to wykres ciągu stałego – każdy kolejny wyraz ciągu (c_n) jest równy wyrazom poprzednim.

> **Definicja: Ciąg stały**
>
> Ciąg (a_n) nazywamy stałym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu.
>
> Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest równość
>
> $$a_{n+1} = a_n$$

Możemy też rozważać ciągi, w których każdy kolejny wyraz ciągu jest nie mniejszy/ nie większy od wyrazu poprzedniego. Taki ciąg nazywamy odpowiednio **niemalejącym/ nierosnącym**. Ciąg stały jest jednocześnie ciągiem nierosnącym i niemalejącym.

> **Definicja: Ciąg niemalejący**
>
> Ciąg (a_n) nazywamy niemalejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu lub większy od wyrazu poprzedniego.
>
> Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność
>
> $$a_{n+1} \geq a_n$$

W podobny sposób możemy określić ciąg nierosnący. Wykres takiego ciągu przedstawia poniższy rysunek.



Definicja: Ciąg nierosnący

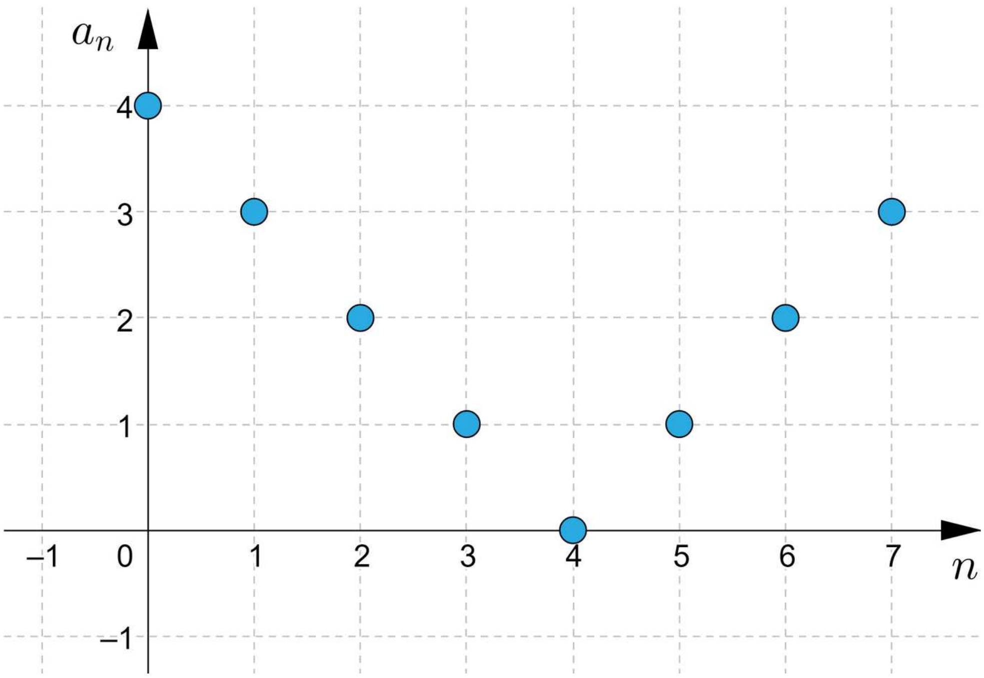
Ciąg (a_n) nazywamy nierosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest równy wyrazowi poprzedniemu lub mniejszy od wyrazu poprzedniego.

Czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność

$$a_{n+1} \leq a_n$$

O ciągach rosnących, malejących, stałych, nierosnących, niemalejących (w całej swojej dziedzinie) mówimy, że są to ciągi **monotoniczne**.

Istnieją też ciągi, które nie mają żadnej z powyższych własności. O takich ciągach mówimy, że nie są monotoniczne. Wykres ciągu, który nie jest monotoniczny przedstawia poniższy rysunek.



Definicję ciągu rosnącego (a_n) można zapisać w sposób równoważny w postaci nierówności

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

która jest spełniona dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 1

Wykażemy, że ciąg (a_n) określony dla $n \in \mathbb{N}_+$ wzorem $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$ jest rosnący.

Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1+3} - \frac{2n-1}{n+3}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3}$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika i wykonujemy wskazane działania.

$a_{n+1} - a_n = \frac{(2n+1)(n+3)-(2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{7}{(n+4)(n+3)} > 0$

Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$, zatem ciąg jest rosnący, co należało wykazać.

Przykład 2

Zbadamy monotoniczność ciągu (b_n) określonego dla $n > 1$ wzorem ogólnym

$b_n = \sqrt{n^2 - n}$.

Badamy znak różnicy $b_{n+1} - b_n$.

$b_{n+1} - b_n = \sqrt{(n+1)^2 - (n+1)} - \sqrt{n^2 - n}$

$b_{n+1} - b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

Przekształcamy zapisaną różnicę, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$b_{n+1} - b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$b_{n+1} - b_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} > 0$

Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ spełniona jest nierówność $b_{n+1} - b_n > 0$, zatem ciąg jest rosnący.

Jeśli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to ciąg jest rosnący, gdy dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Przykład 3

Zbadamy monotoniczność ciągu (c_n) określonego dla $n \in \mathbb{N}_+$ wzorem $c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Badamy znak ilorazu $\frac{c_{n+1}}{c_n}$.

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie.

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3}{2} > 1$

Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $\frac{c_{n+1}}{c_n} > 1$, zatem ciąg jest rosnący.

Definicję ciągu malejącego (a_n) można zapisać w sposób równoważny w postaci nierówności

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

która jest spełniona dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 4

Wykażemy, że ciąg (d_n) określony dla $n \in \mathbb{N}_+$ wzorem $d_n = 6 - 5n$ jest malejący.

Badamy znak różnicy $d_{n+1} - d_n$.

$d_{n+1} - d_n = 6 - 5(n+1) - 6 + 5n$

$d_{n+1} - d_n = 6 - 5n - 5 - 6 + 5n$

$d_{n+1} - d_n < -5$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ spełniona jest nierówność $d_{n+1} - d_n < 0$, zatem ciąg jest malejący, co należało wykazać.

Jeśli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to ciąg jest malejący, gdy dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

Przykład 5

Zbadamy monotoniczność ciągu (t_n) określonego dla $n \in \mathbb{N}_+$ wzorem $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Badamy znak ilorazu $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

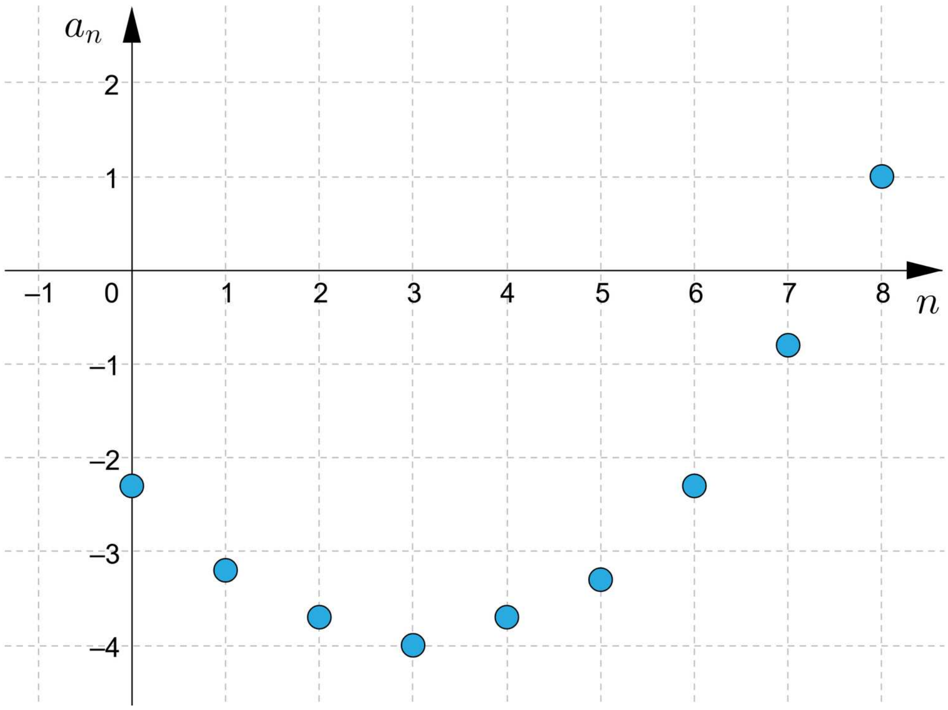
$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{2} < 1$

Wyrazy ciągu są dodatnie i dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $\frac{t_{n+1}}{t_n} < 1$ zatem ciąg jest malejący.

W niektórych przypadkach ciąg monotoniczny otrzymujemy dopiero po odrzuceniu pewnej liczby początkowych wyrazów danego ciągu. O takich ciągach mówimy, że są monotoniczne od pewnego miejsca.

Na przykład ciąg (a_n), którego wykres przedstawiono na rysunku poniżej, jest rosnący, począwszy od wyrazu a_3.



Przykład 6

Zbadamy monotoniczność ciągu (a_n) określonego dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $a_n = n^2 - 14n + 40$.

Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 14(n+1) + 40 - n^2 + 14n - 40$

$a_{n+1} - a_n = 2n - 13$

$2n - 13 > 0$ dla $n > 6,5$

Począwszy od wyrazu a_7 ciąg jest rosnący (dla $n \in \{1, 2,\ 3, 4,\ 5, 6\}$ ciąg jest malejący).

Słownik

ciąg rosnący

ciąg (a_n) nazywamy rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego; czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność

$$a_{n+1} > a_n$$

ciąg malejący

ciąg (a_n) nazywamy malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego; czyli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność

$$a_{n+1} < a_n$$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, w której przedstawiono sposób określania monotoniczności ciągu określonego wzorem rekurencyjnym i ciągu malejącego od pewnego miejsca.

Polecenie 2

Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym

$a_1 = 27$ i $a_{n+1} = a_n + 2n - 11$ dla $n \geq 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = \cos(n\pi)$ nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 8

Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{3^n}{n!}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Badanie monotoniczności ciągów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

a) $\begin{cases} a_1 = 0{,}001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$,

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$;

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa monotoniczność danego ciągu
- ustala na podstawie wykresu czy ciąg jest rosnący, czy malejący
- określa wyraz ciągu, od którego dany ciąg jest monotoniczny

- udowadnia, że dany ciąg jest rosnący albo malejący
- dobiera argumenty do uzasadnienia poprawności rozwiązania problemu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- graffiti
- listwa usztywniająca
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą graffiti powtarzają dotychczas zdobyte wiadomości o ciągach – na plakacie wcześniej przygotowanym przez nauczyciela, uzupełniają zapisy dotyczące ciągów. Po uzupełnieniu plakatu, jeden z uczniów odczytuje zapisane tam informacje. Uczniowie ewentualnie je uzupełniają.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą listwy usztywniającej. Najpierw metodą burzy mózgów tworzą propozycje sposobów badania monotoniczności ciągów. Na „listwie" zapisują przykłady określania za pomocą podanych sposobów czy ciąg jest malejący lub rosnący.
2. Następnie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj" i prezentacją multimedialną. Modyfikują swoje pomysły i dopisują następne.
3. Przedstawiciele grup prezentują wypracowane rozwiązania.
4. Wspólnie zapisują wzór ciągu i określają jego monotoniczność za pomocą wszystkich uzyskanych sposobów.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać jako wstęp do zajęć poświęconych badaniu monotoniczności ciągu arytmetycznego, bądź geometrycznego.