



Wartości dodatnie i ujemne funkcji kwadratowej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wartości dodatnie i ujemne funkcji kwadratowej

Źródło: Torsten Muller, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale wprowadzimy wiadomości dotyczące wartości ujemnych oraz dodatnich funkcji kwadratowej. Istotnym elementem będzie wyznaczenie zbioru wartości funkcji kwadratowej, a następnie wskazanie, które wartości są ujemne, a które dodatnie. Bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach, będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz na podstawie zbioru wartości funkcji kwadratowej, które wartości tej funkcji są dodatnie, a które ujemne.
- Odczytasz lub obliczysz argumenty, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie oraz wartości ujemne.
- Podasz rozwiązania prostych nierówności kwadratowych.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

W materiale omówimy, w jaki sposób odczytuje się lub wyznacza wartości dodatnie oraz wartości ujemne **funkcji kwadratowej** a także wyznaczymy argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Już wiesz

Jeżeli wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest punkt o współrzędnych (p, q) , to:

- dla $a > 0$ **zbiorem wartości** funkcji jest przedział $\langle q, \infty \rangle$,
- dla $a < 0$ **zbiorem wartości** funkcji jest przedział $(-\infty, q)$.

Do wyznaczenia wartości dodatnich oraz wartości ujemnych funkcji kwadratowej posłużymy się wzorem lub wykresem.

Argumenty funkcji, których wartości są równe 0, odpowiadają pierwszym współrzędnym punktów należących do paraboli, będącej wykresem tej funkcji kwadratowej. Punkty te leżą na osi X .

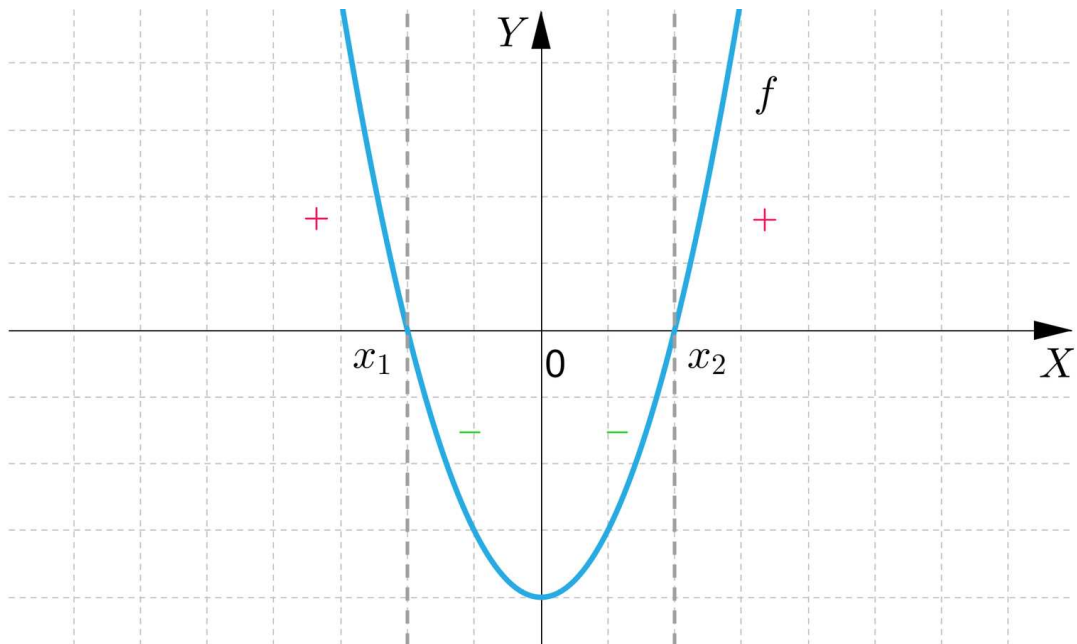
Jeżeli funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, to:

- funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów będących odcięzami punktów wykresu tej funkcji, które leżą powyżej osi X . Druga współrzędna tych punktów jest dodatnia;
- funkcja ta przyjmuje wartości ujemne dla argumentów będących odcięzami punktów wykresu tej funkcji, które leżą poniżej tej osi. Druga współrzędna tych punktów jest ujemna.

W przypadku określania wartości ujemnych oraz wartości dodatnich funkcji kwadratowej możemy wyróżnić następujące możliwości:

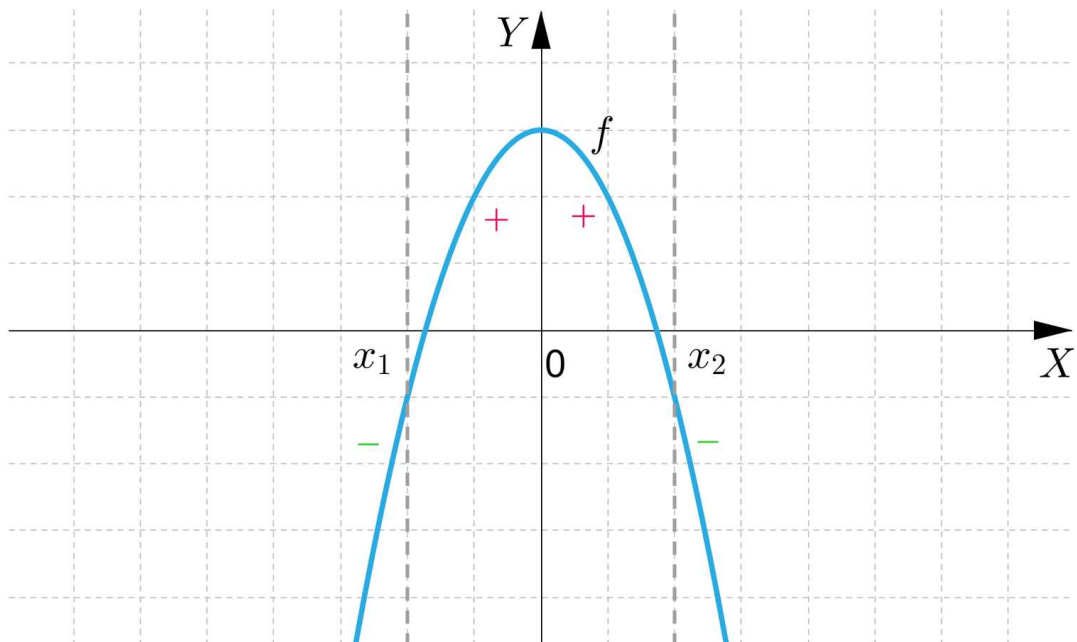
I. Jeżeli ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej, są skierowane do góry, q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 oraz $x_1 < x_2$, to:

- funkcja przyjmuje wartości ujemne należące do przedziału $\langle q, 0 \rangle$ dla $x \in (x_1, x_2)$,
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie należące do przedziału $(0, \infty)$ dla $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.



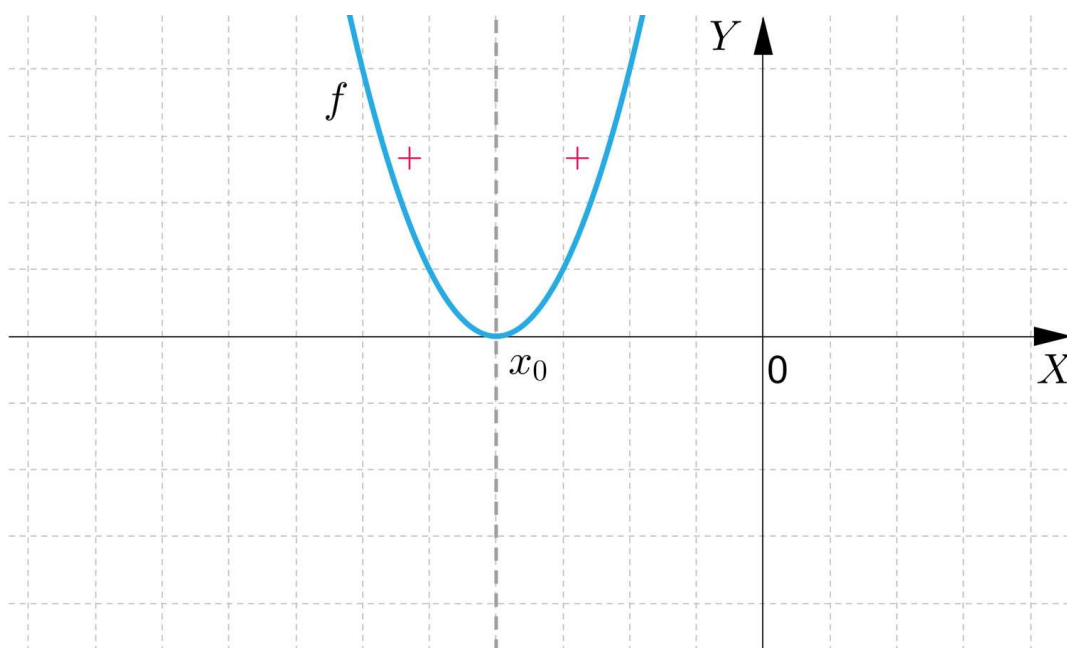
II. Jeżeli ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej, są skierowane do dołu, q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, funkcja ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 oraz $x_1 < x_2$, to:

- funkcja przyjmuje wartości dodatnie należące do przedziału $(0, q)$ dla $x \in (x_1, x_2)$,
- funkcja przyjmuje wartości ujemne należące do przedziału $(-\infty, 0)$ dla $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.



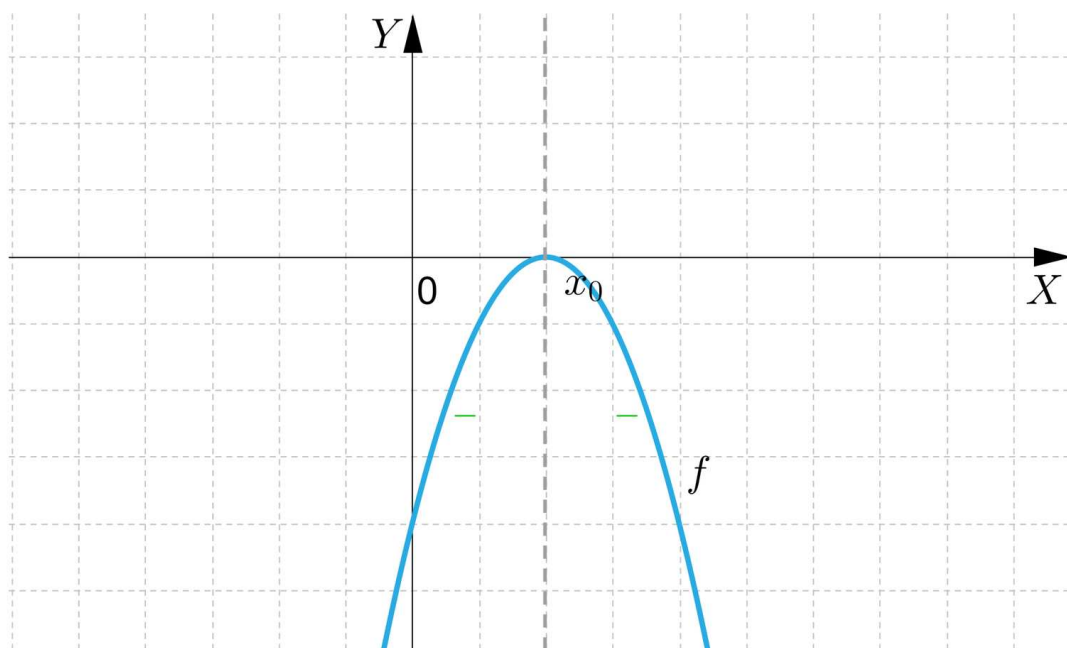
III. Jeżeli ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej, są skierowane do góry, q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, funkcja ma jedno miejsce zerowe x_0 , to:

- funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie należące do przedziału $(0, \infty)$ dla $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$.



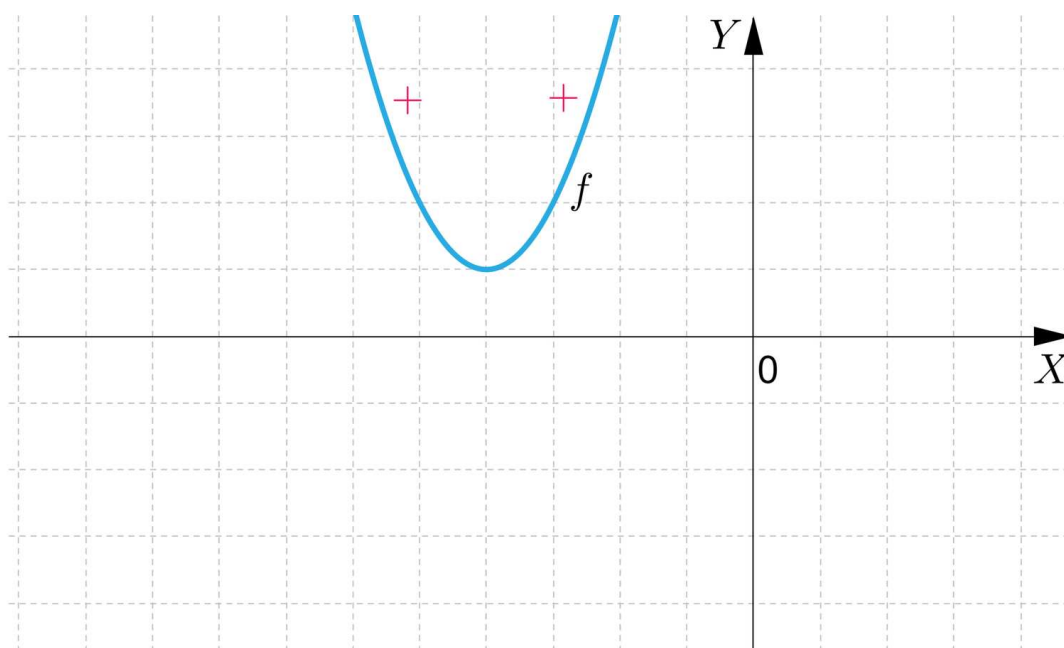
IV. Jeżeli ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej, są skierowane do dołu, q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, funkcja ma jedno miejsce zerowe x_0 , to:

- funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne należące do przedziału $(-\infty, 0)$ dla $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$.



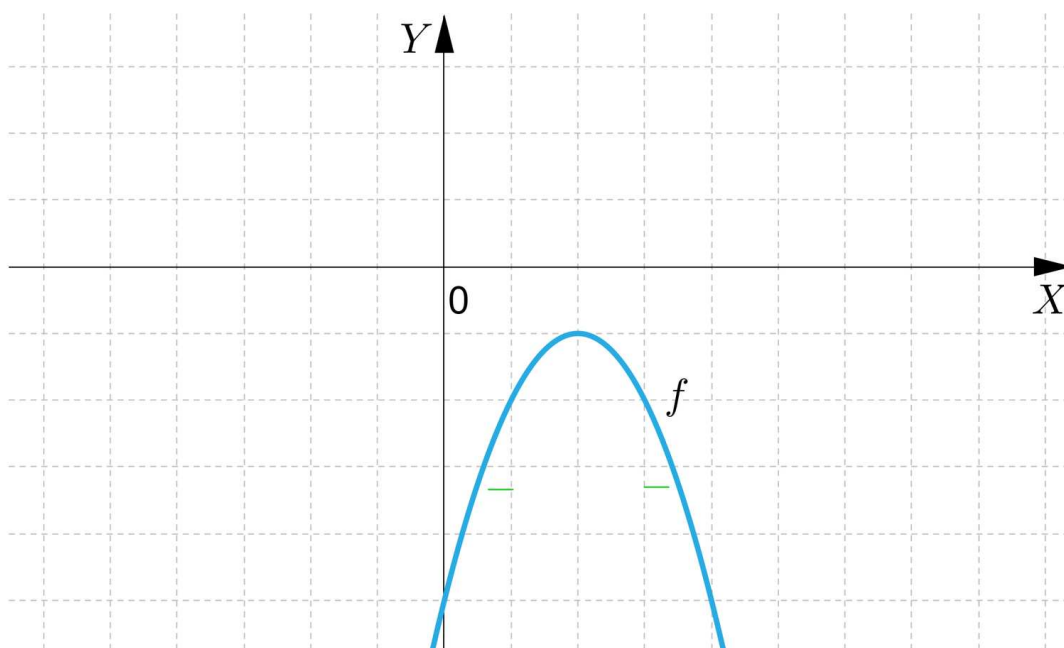
V. Jeżeli ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej, są skierowane do góry, q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, funkcja nie ma miejsc zerowych, to:

- ,funkcja przyjmuje wartości dodatnie należące do przedziału (q, ∞) dla $x \in \mathbb{R}$,
- funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych..



VI. Jeżeli ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej, są skierowane do dołu, q jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, funkcja nie ma miejsc zerowych, to:

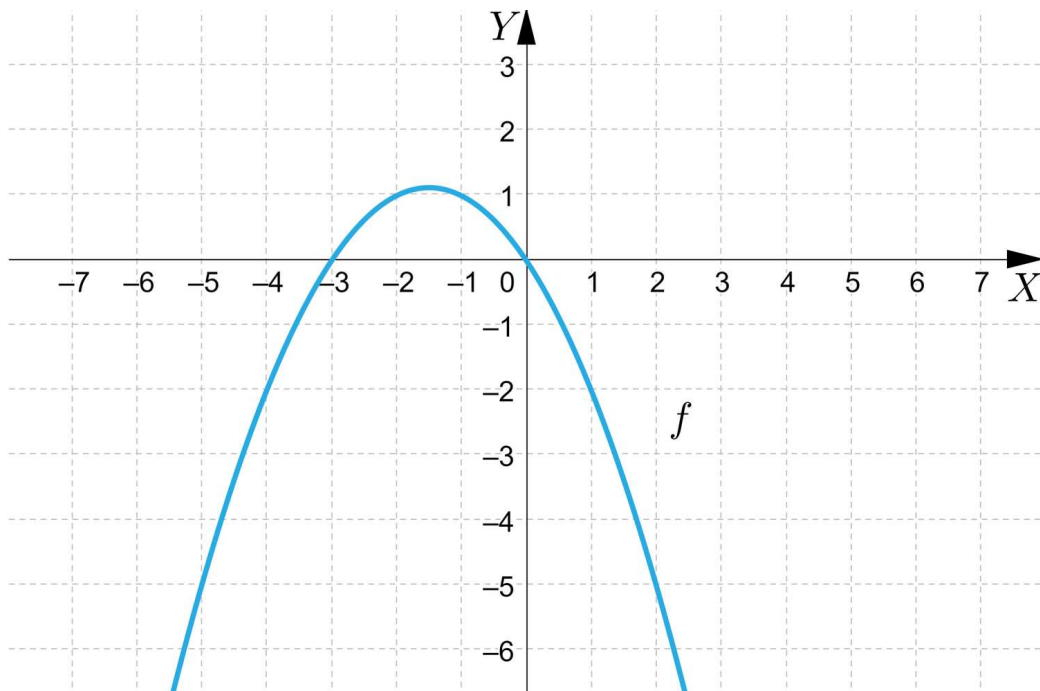
- wartości ujemne funkcji znajdują się w przedziale $(-\infty, q)$ dla $x \in \mathbb{R}$,
- funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich.



Przykład 1

Określmy, dla jakich argumentów funkcja f , której wykres przedstawiono na poniższym rysunku, przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

a)

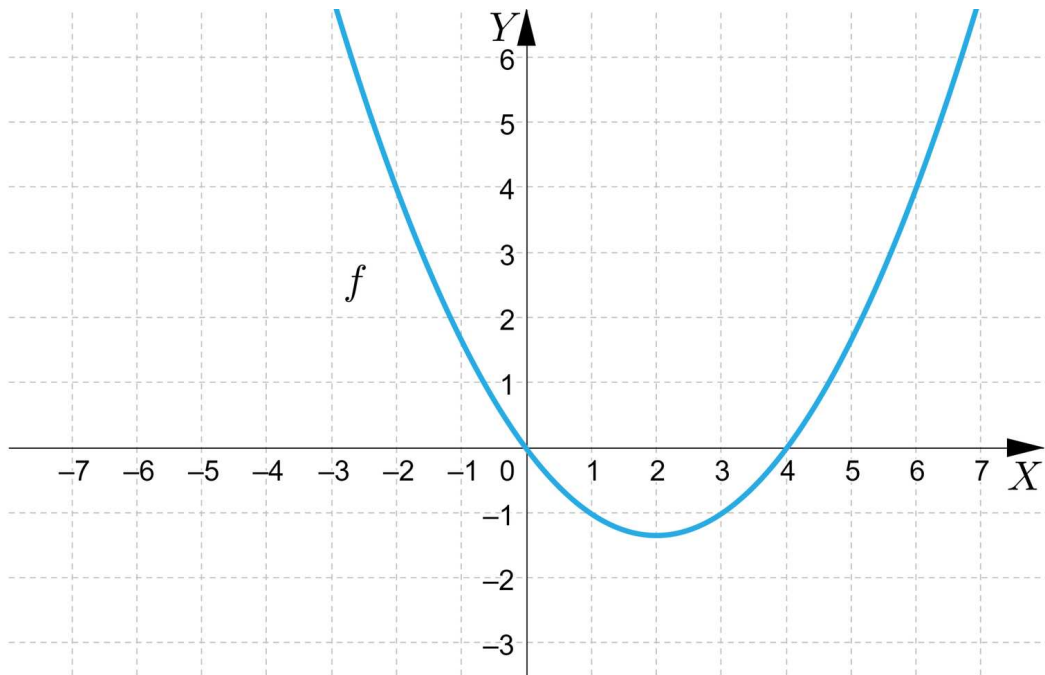


Rozwiązanie:

Funkcja f przyjmuje wartości:

- dodatnie dla argumentów należących do przedziału $(-3, 0)$,
- ujemne dla argumentów należących do przedziału $(-\infty, -3) \cup (0, \infty)$.

b)



Rozwiązanie:

Funkcja f przyjmuje wartości:

- dodatnie dla argumentów należących do przedziału $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$,
- ujemne dla argumentów należących do przedziału $(0, 4)$.

Jeżeli funkcja kwadratowa jest określona za pomocą pewnego wzoru, wówczas możemy wyznaczyć jej miejsca zerowe (o ile istnieją) i określić argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz ujemne.

Przykład 2

Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -x^2 + 2x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich wartości ujemne.

Rozwiązanie:

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci:

$$f(x) = -x(x - 2).$$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 0 i 2.

Ponieważ $a = -1 < 0$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu.

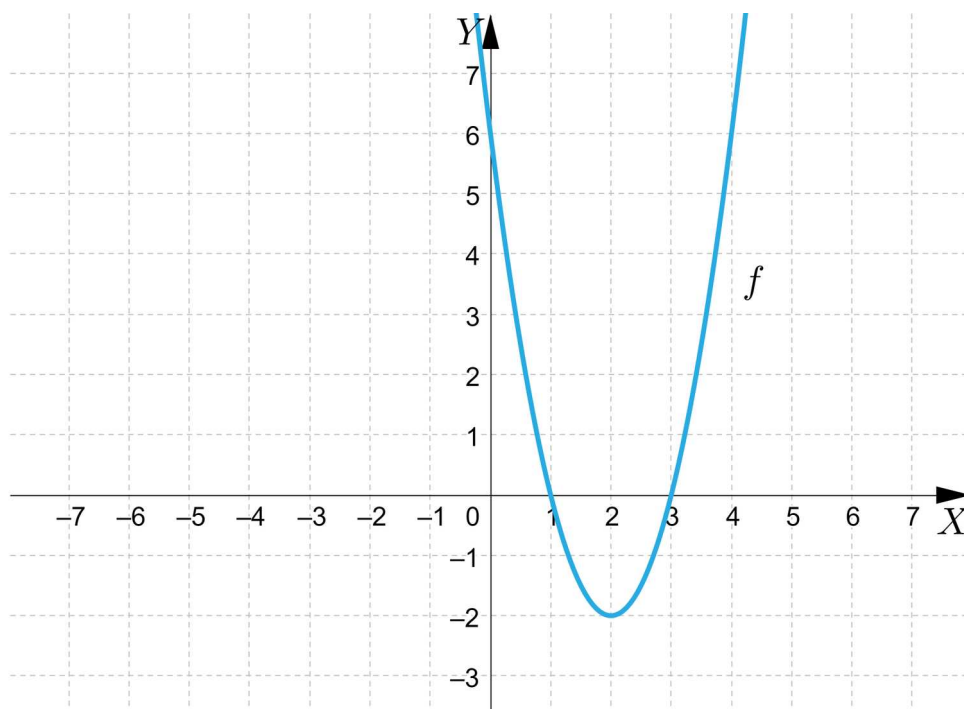
Wobec tego funkcja f przyjmuje wartości:

- ujemne dla $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$,

- dodatnie dla $x \in (0, 2)$.

Przykład 3

Na podstawie wykresu odczytamy wartości ujemne oraz dodatnie funkcji kwadratowej f oraz określimy argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.



Rozwiązanie:

Z wykresu odczytujemy, że:

- funkcja f przyjmuje wartości ujemne należące do przedziału $\langle -2, 0 \rangle$ dla argumentów $x \in (1, 3)$,
- funkcja f przyjmuje wartości dodatnie należące do przedziału $(0, \infty)$ dla argumentów $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Umiejętność odczytywania argumentów, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje wartości ujemne lub dodatnie, pozwala na rozwiązywanie nierówności kwadratowych typu $f(x) > 0$ lub $f(x) < 0$.

Przykład 4

Dana jest funkcja kwadratowa f . Wyznamy rozwiązania nierówności $f(x) > 0$ oraz $f(x) < 0$.

a) $f(x) = -3x^2$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Rozwiązanie:

a) Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0 a ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu.

Zatem:

- $f(x) > 0$ dla $x \in \emptyset$,
- $f(x) < 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 2 i 3 a ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do góry.

Zatem:

- $f(x) < 0$ dla $x \in (2, 3)$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

Przykład 5

Określmy, dla jakich argumentów funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = x^2 - 4|x|$ przyjmuje wartości niedodatnie.

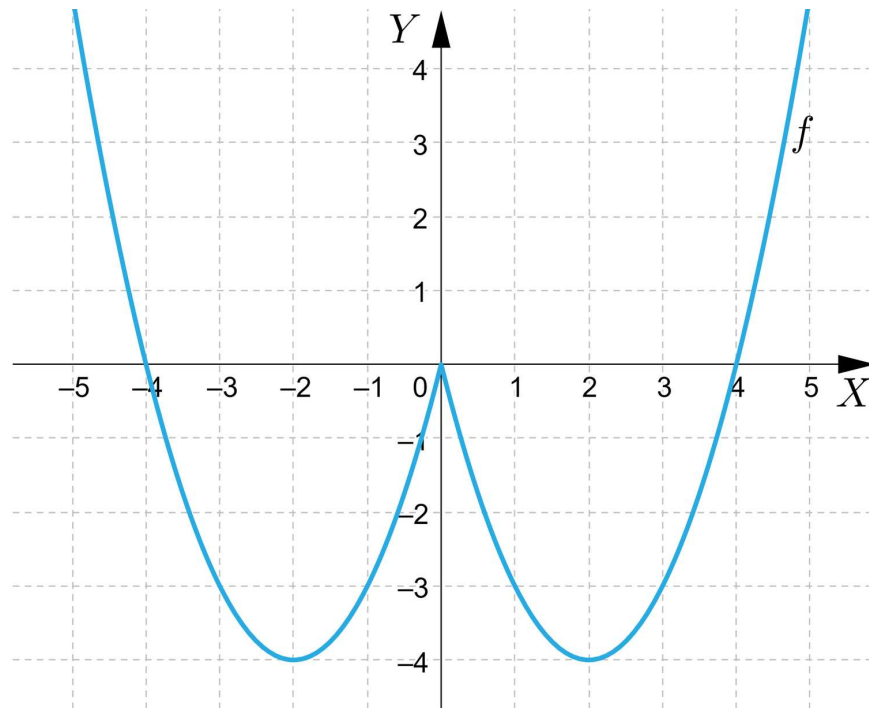
Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$f(x) = x^2 - 4|x| = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Funkcja f ma trzy miejsca zerowe: $(-4), 0, 4$.

Wykres funkcji f przedstawia się następująco:



Z wykresu odczytujemy, że:

$$f(x) \leq 0 \text{ dla } x \in \langle -4, 4 \rangle.$$

Przykład 6

Wyznamy dziedzinę funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{-x^2 + 16}$.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy pomocniczo funkcję g określoną wzorem $g(x) = -x^2 + 16$.

Zauważmy, że do wyznaczenia dziedziny funkcji f wystarczy określić, dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości nieujemne.

Wzór funkcji g zapisujemy w postaci:

$$g(x) = -x^2 + 16 = (4 + x) \cdot (4 - x).$$

Miejscami zerowymi funkcji g są liczby (-4) oraz 4 .

Ponieważ $a = -1 < 0$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji g są skierowane do dołu.

Wobec tego funkcja g przyjmuje wartości nieujemne dla $x \in \langle -4, 4 \rangle$.

Zatem otrzymany przedział jest dziedziną funkcji f .

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze \mathbb{R} wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

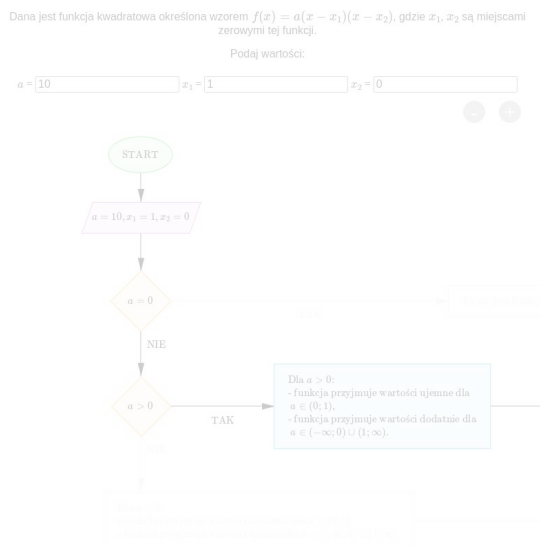
zbiór wartości funkcji

zbiór wszystkich tych liczb, które można otrzymać w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, a następnie wykonaj polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcSMSvznb>

Polecenie 2

Określ, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich wartości ujemne, jeżeli jest określona wzorem:




a) $f(x) = -2(x - 4)(x + 3)$,

b) $f(x) = 3(x + 1)(x - 5)$.

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm wyznaczający przedziały, dla jakich funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = x^2 - 4x$. Wyznacz:

a) wartości dodatnie oraz wartości ujemne funkcji f ,

b) zbiory argumentów, dla których przyjmowane są wartości dodatnie/ ujemne .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości dodatnie i ujemne funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa na podstawie zbioru wartości funkcji kwadratowej, które wartości tej funkcji są dodatnie, a które ujemne,
- odczytuje lub oblicza argumenty, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie oraz wartości ujemne,
- podaje rozwiązania prostych nierówności kwadratowych,
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- drzewo pomysłów;
- metoda krokodyła.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji – „Wartości dodatnie i ujemne funkcji kwadratowej” i prosi uczniów o sformułowanie celów i kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Każda grupa układa 2 zadania oparte na uzyskanych wiadomościach – pierwsze polegające na wyznaczeniu wartości dodatnich i ujemnych funkcji kwadratowej, gdy ramiona paraboli są skierowane do góry, drugie – gdy ramiona paraboli są skierowane do dołu.
3. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z materiałem w sekcji „Schemat interaktywny” i wykonują zawarte w tej części polecenia.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum klasy krok po kroku.
5. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy.
6. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wartości dodatnie i ujemne funkcji kwadratowej”).

Materiały pomocnicze:

- [Argumenty i wartości funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie wyznaczania wartości dodatnich i ujemnych funkcji kwadratowej.
- „Schemat interaktywny” można wykorzystać do rozwiązywania prostych nierówności kwadratowych.