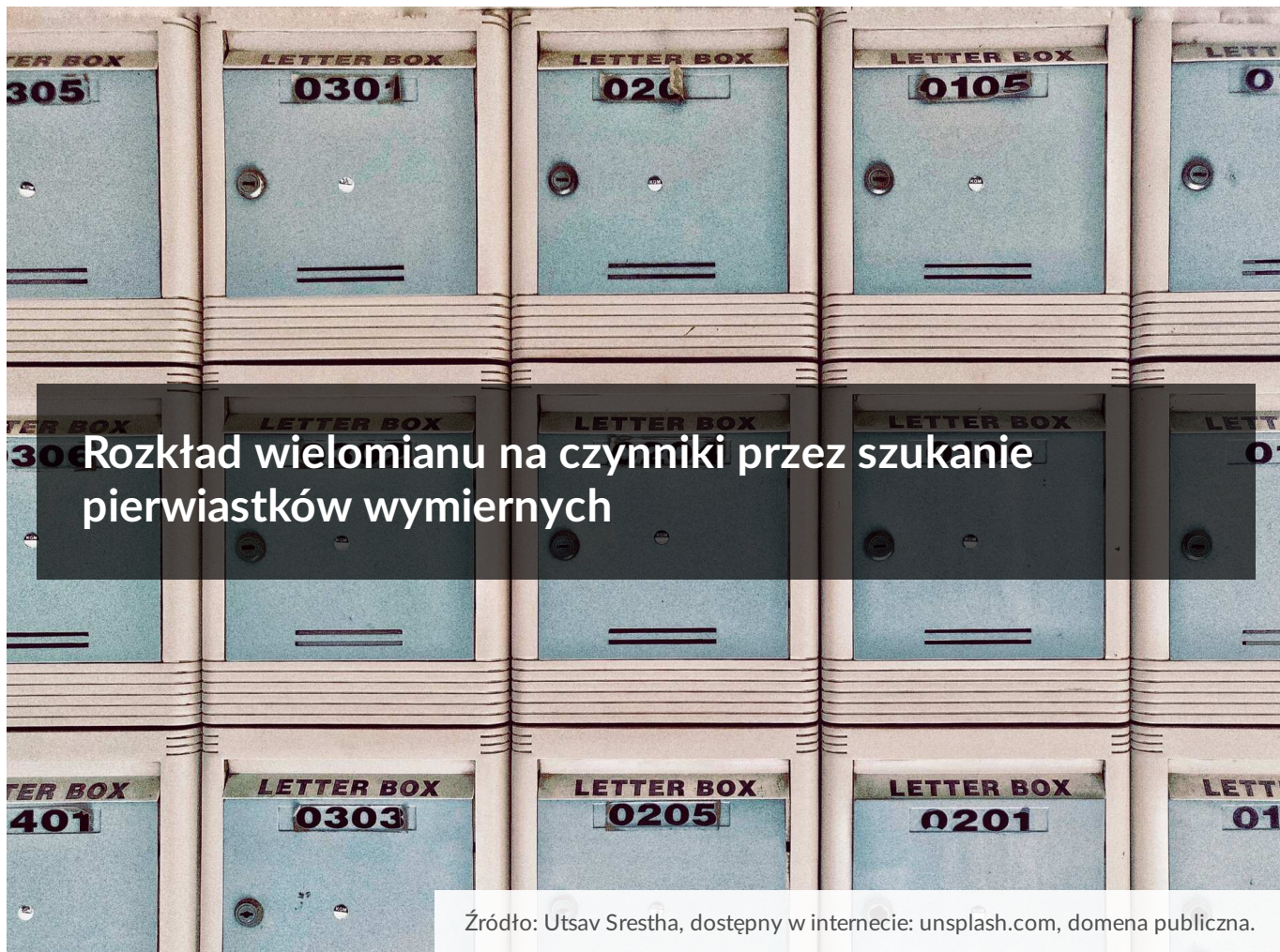




Rozkład wielomianu na czynniki przez szukanie pierwiastków wymiernych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wiemy, że każdy wielomian niezerowy $W(x)$, którego pierwiastkami są liczby x_1, x_1, \dots, x_k , można zapisać jako iloczyn $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \cdot Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest jakimś wielomianem stopnia o k mniejszego niż stopień wielomianu $W(x)$. Z tego wynika, że znajomość pierwiastków wielomianu ułatwia jego rozkład na czynniki - i na odwrót, rozłożenie wielomianu na czynniki nierozkładalne daje pełną informację o jego pierwiastkach.

Twoje cele

- Wykorzystasz twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych do rozkładu wielomianów na czynniki.
- Zobaczysz, jak znalezienie pierwiastków wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych pozwala wyznaczyć w niektórych przypadkach również pierwiastki niewymierne tego wielomianu.

Przeczytaj

Przypomnijmy na początek podstawowe twierdzenia pozwalające wyznaczyć niektóre pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie: o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 .

Twierdzenie: o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Bazując na znajomości pierwiastków i [twierdzeniu Bézouta](#) pokażemy rozwiązania kilku zadań.

Przykład 1

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian:

$$W(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że wielomian ten ma pierwiastek całkowity 1. Możemy zatem podzielić $W(x)$ przez dwumian $x - 1$.

Po wykonaniu dzielenia (np. schematem Hornera) uzyskamy zapis

$$W(x) = (x - 1)(3x^2 + 5x + 1).$$

Za pomocą wyróżnika możemy stwierdzić, że uzyskany wielomian drugiego stopnia jest rozkładalny. Po wyznaczeniu jego pierwiastków zapisujemy $W(x)$ w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych

$$W(x) = 3(x - 1) \left(x + \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right) \left(x + \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right).$$

Przykład 2

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian:

$$W(x) = 3x^4 + 17x^3 + 30x^2 + 12x - 8.$$

Rozwiązanie

Analizując dzielniki wyrazu wolnego możemy zauważyć, że $W(-2) = 0$, czyli wielomian jest podzielny przez dwumian $x + 2$.

Po wykonaniu dzielenia dostajemy

$$W(x) = (x + 2)(3x^3 + 11x^2 + 8x - 4).$$

Analizując analogicznie wielomian $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$, możemy stwierdzić, że również jego pierwiastkiem jest (-2) . Zatem

$$W(x) = (x + 2)^2(3x^2 + 5x - 2).$$

Po wyznaczeniu pierwiastków funkcji kwadratowej uzyskujemy rozkład $W(x)$ na wielomiany nierozkładalne

$$W(x) = 3(x + 2)^3(x - \frac{1}{3})$$

co można też zapisać w postaci

$$W(x) = (x + 2)^3(3x - 1).$$

Przykład 3

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian:

$$W(x) = 2x^5 + x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 6x + 3.$$

Rozwiązanie

Sprawdźmy, czy wielomian ma **pierwiastek całkowity**, analizując dzielniki wyrazu wolnego. Po obliczeniach możemy stwierdzić, że żadna z liczb (-3) , 3 , (-1) , 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Sprawdźmy, czy wielomian ma **pierwiastki niecałkowite wymierne** - jeśli istnieją, muszą być wśród liczb $(-\frac{3}{2})$, $\frac{3}{2}$, $(-\frac{1}{2})$, $\frac{1}{2}$.

Wykonując obliczenia, można zauważyć, że $W(-\frac{1}{2}) = 0$.

Zgodnie z twierdzeniem Bézouta wielomian $W(x)$ jest więc podzielny przez dwumian $x + \frac{1}{2}$. Możemy też podzielić go przez dwukrotność tego dwumianu, czyli przez $2x + 1$.

Po wykonaniu dzielenia uzyskamy

$$W(x) = (2x + 1)(x^4 + 4x^2 + 3).$$

Rozłóżmy teraz wielomian $x^4 + 4x^2 + 3$.

Można to zrobić używając metod stosowanych przy rozwiązywaniu równań dwukwadratowych (wprowadzając niewiadomą pomocniczą $t = x^2$). Można też

zauważyć możliwość użycia wzorów skróconego mnożenia

$$\begin{aligned}x^4 + 4x^2 + 3 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 1 = \\&= (x^2 + 2)^2 - 1 = (x^2 + 2 + 1)(x^2 + 2 - 1) = \\&= (x^2 + 3)(x^2 + 1).\end{aligned}$$

Zatem $W(x)$ można zapisać w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych

$$W(x) = (2x + 1)(x^2 + 3)(x^2 + 1).$$

Przykład 4

Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian:

$$W(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x - 48.$$

Rozwiązanie

Jeśli wielomian $W(x)$ ma pierwiastki wymierne, to będą to całkowite dzielniki liczby 48.

Zauważmy, że $W(\pm 1) \neq 0$, ale $W(2) = 32 + 16 - 6 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 48 = 0$.

Możemy zatem zapisać $W(x)$ jako iloczyn dwumianu $x - 2$ i pewnego wielomianu czwartego stopnia

$$W(x) = (x - 2)(x^4 + 3x^3 + 8x + 24).$$

Zauważmy, że $x^4 + 3x^3 + 8x + 24$ łatwo rozłożyć na czynniki przez grupowanie

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^3 + 8x + 24 &= \\&= x^3(x + 3) + 8(x + 3) = (x + 3)(x^3 + 8).\end{aligned}$$

Do rozkładu wielomianu $x^3 + 8$ łatwo z kolei użyć wzoru skróconego mnożenia na sumę sześcianów

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

przy czym uzyskany wielomian drugiego stopnia $x^2 - 2x + 4$ jest już nierozkładalny.

Podsumowując

$$W(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

Przykład 5

Wiedząc, że zachodzi równość $x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48 = (x + x_1)^{n_1}(x + x_2)^{n_2}$

wyznamy liczby x_1 , x_2 , n_1 , n_2

Rozwiązanie

Zauważmy, że $n_1 + n_2 = 5$ - jest to stopień wielomianu. Jednocześnie wyraz wolny to $48 = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2}$. Rozkładając liczbę 48 na czynniki otrzymamy $2^4 \cdot 3$. Zatem $x_1 = 3$, $n_1 = 1$ i $n_2 = 4$. Zauważmy, że niektóre współczynniki wielomianu są liczbami ujemnymi. Wynika stąd, że jeden z pierwiastków wielomianu jest liczbą ujemną. Dlatego $x_2 = -2$.

Przykład 6

Dany jest wielomian trzeciego stopnia $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych. Wiadomo, że jest on podzielny przez dwumian $x - 1, 25$. Wskażemy, jakie liczby mogą być wyrazem wolnym tego wielomianu.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $1, 25 = \frac{5}{4}$, zatem wielomian W można zapisać w postaci:

$$W(x) = \left(x + \frac{5}{4}\right) \cdot (ax^2 + mx + n)$$

Wyłączymy $\frac{1}{4}$ przed nawias:

$$W(x) = \frac{1}{4}(4x + 5) \cdot (ax^2 + mx + n)$$

Zauważmy, że $d = 5n$.

Skoro współczynniki wielomianu mają być liczbami całkowitymi, to d musi być wielokrotnością liczby 5.

Słownik

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty

twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0

twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami rozkładu wielomianu na czynniki metodą dzielenia wielomianów.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DYIJTakz9>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej rozkładu wielomianu na czynniki przez szukanie pierwiastków wymiernych.

Polecenie 2

Rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = 6x^3 - 43x^2 + 69x + 28$$

wiedząc, że ma on pierwiastek całkowity.

Polecenie 3

Rozłóż na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = 3x^5 + 5x^4 - 15x^3 - 25x^2 + 18x + 30$$

wiedząc, że jedynym jego pierwiastkiem wymiernym jest liczba $(-\frac{5}{3})$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

Dany jest wielomian

$$W(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 5,$$

w którym współczynniki a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Ponadto wiadomo, że $a + b + c + d = -6$.



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozkład wielomianu na czynniki przez szukanie pierwiastków wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;

5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Zakres rozszerzony. Uczeń:

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych do rozkładu wielomianów na czynniki,
- wyznacza w niektórych przypadkach pierwiastki niewymierne wielomianu wykorzystując znalezione pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają twierdzenie Bézouta.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wraz z nauczycielem analizują twierdzenia o pierwiastkach całkowitych i wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.
2. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie dwóch przykładów z sekcji Przeczytaj.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują rozwiązania.
4. Następnie wspólnie omawiają kolejne przykłady.
5. Uczniowie oglądają animację, następnie komentują rozwiązania zawartych w nim przykładów
6. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Na każdym stoliku zadaniowym znajdują się 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania, otrzymuje ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie, nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozkładu wielomianu na czynniki.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie zadania zawartego w poleceniach 2 i 3.

Materiały pomocnicze:

[Wielomiany](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana jako materiał przygotowujący ucznia do samodzielnej pracy na lekcji.