



## Interpretacja równania okręgu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Omówimy interpretację równania 1-wymiarowej hipersfery, elipsy o równych półosiach, czyli znanego nam okręgu. Opiszemy okrąg na podstawie rysunku za pomocą równania oraz naszkicujemy okrąg, gdy dane jest jego równanie. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

### Twoje cele

- Dowiesz się, jak wyznaczyć równanie okręgu na podstawie jego rysunku.
- Naszkicujesz okrąg, gdy dane jest jego równanie.
- Określisz wartości parametrów, dla których równanie opisuje okrąg.

# Przeczytaj

---

Przedstawimy różne interpretacje okręgu na podstawie:

- rysunku, gdy dany jest środek oraz promień okręgu lub punkty należące do okręgu,
- równania okręgu w postaci kanonicznej.

Przypomnijmy definicję okręgu na płaszczyźnie oraz równania okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

## Definicja: okrąg

Okręgiem o środku w punkcie  $S$  i promieniu długości  $r$ , gdzie  $r > 0$ , nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu  $S$  jest równa długości promienia  $r$ .

## Definicja: równanie okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej

Równanie postaci  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  opisuje okrąg na płaszczyźnie kartezjańskiej, gdzie  $S = (a, b)$  jest środkiem okręgu oraz  $r$  jest promieniem okręgu.

Wzór ten nazywamy [postacią kanoniczną równania okręgu](#).

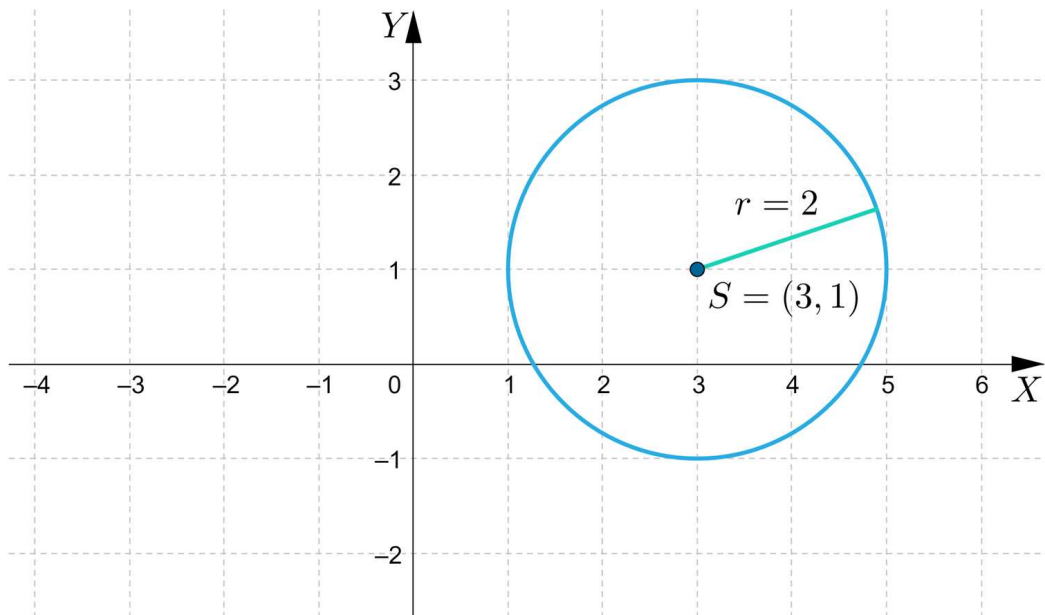
## Przykład 1

Naszkiejmy okrąg opisany za pomocą równania  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ .

### Rozwiązanie:

Z równania możemy odczytać, że środek okręgu  $S = (3, 1)$  oraz długość promienia  $r = 2$ .

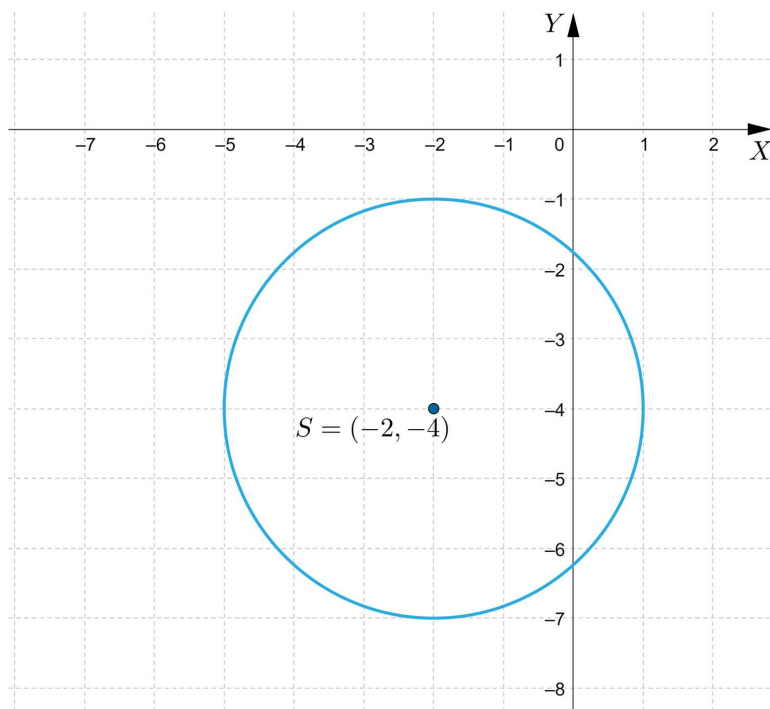
Rysunek tego okręgu przedstawia się następująco:



### Przykład 2

Zapiszmy równanie okręgu, którego wykres przedstawiono na poniższym rysunku.

**Rozwiązanie:**



Z rysunku możemy odczytać, że środek okręgu  $S = (-2, -4)$ , a promień  $r$  ma długość 3.

Okrąg przedstawiony na rysunku zapisujemy za pomocą równania:

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9.$$

### Przykład 3

Zapiszmy równanie okręgu oraz naszkicujmy jego wykres, jeżeli wiadomo, że środkiem okręgu jest punkt  $S = (1, 2)$  i należy do niego punkt  $A = (-2, 4)$ .

**Rozwiązanie:**

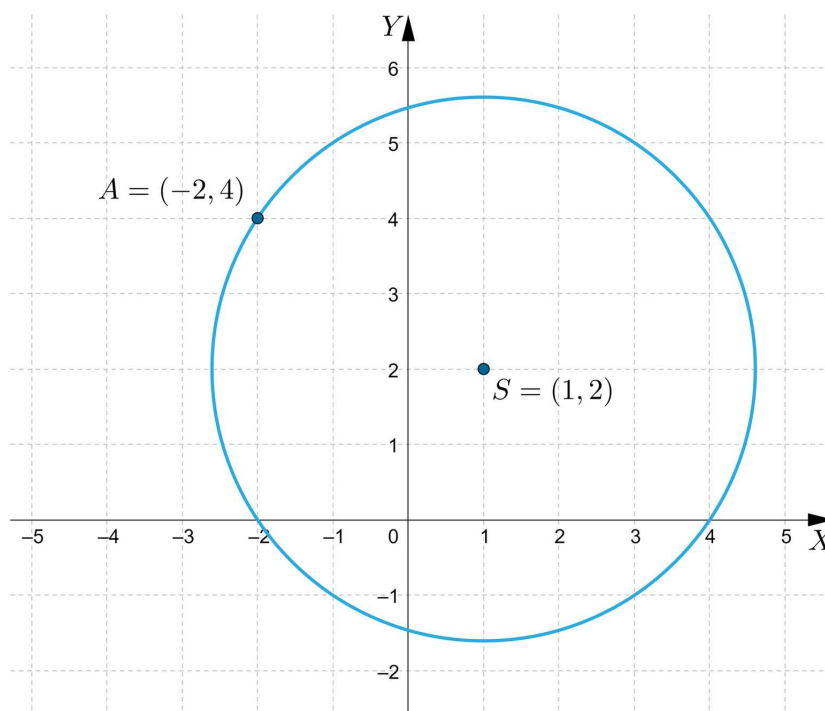
Punkt  $A$  należy do okręgu o środku w punkcie  $S$ , zatem długość promienia jest równa odległości punktów  $A$  i  $S$ .

$$\text{Zatem } r = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13}.$$

Okrąg zapisujemy za pomocą równania:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13.$$

Rysunek tego okręgu przedstawia się następująco:



**Przykład 4**

Wyznaczmy, dla jakiej wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + (y - 2)^2 = m^2 - m - 12$  opisuje okrąg, a następnie naszkicujemy ten okrąg dla najmniejszej liczby naturalnej  $m$ , dla której jest to równanie okręgu.

**Rozwiązanie:**

Jeżeli równanie opisuje okrąg, to spełniony jest warunek  $r > 0$ , a zatem:

$$m^2 - m - 12 > 0.$$

Nierówność jest prawdziwa dla  $m \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$ .

Najmniejsza liczba naturalna spełniająca tę nierówność jest równa 5.

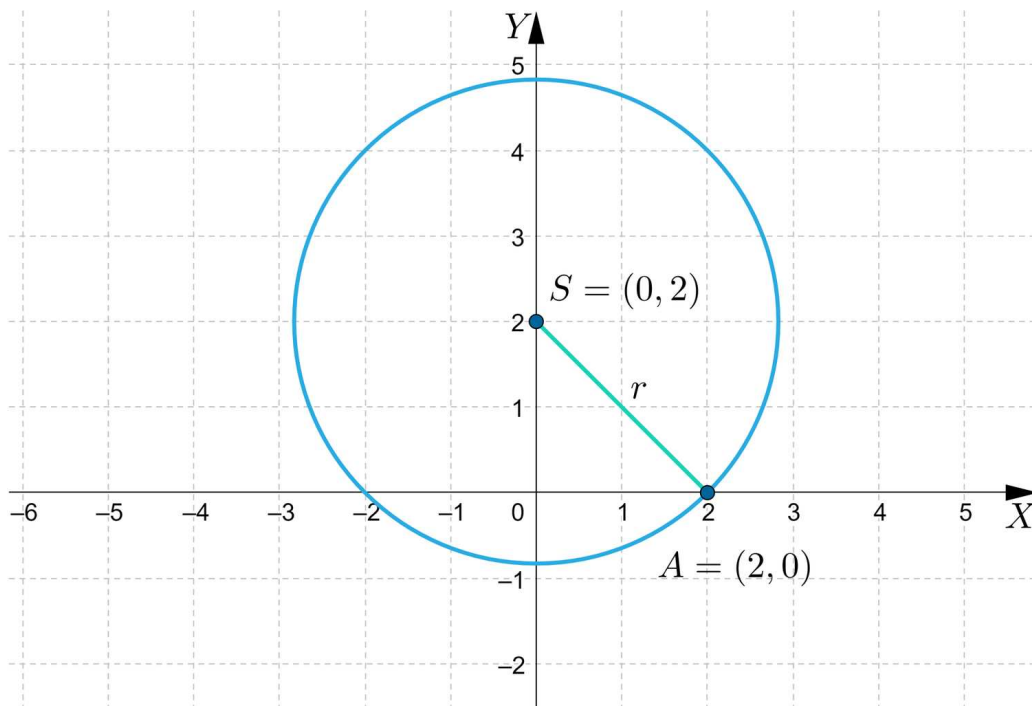
Zatem dla  $m = 5$  równanie okręgu przyjmuje postać:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 8.$$

Z równania możemy odczytać, że środkiem okręgu jest punkt  $S = (0, 2)$  oraz  $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

Do okręgu należy punkt  $A = (2, 0)$ .

Rysunek tego okręgu przedstawia się następująco:

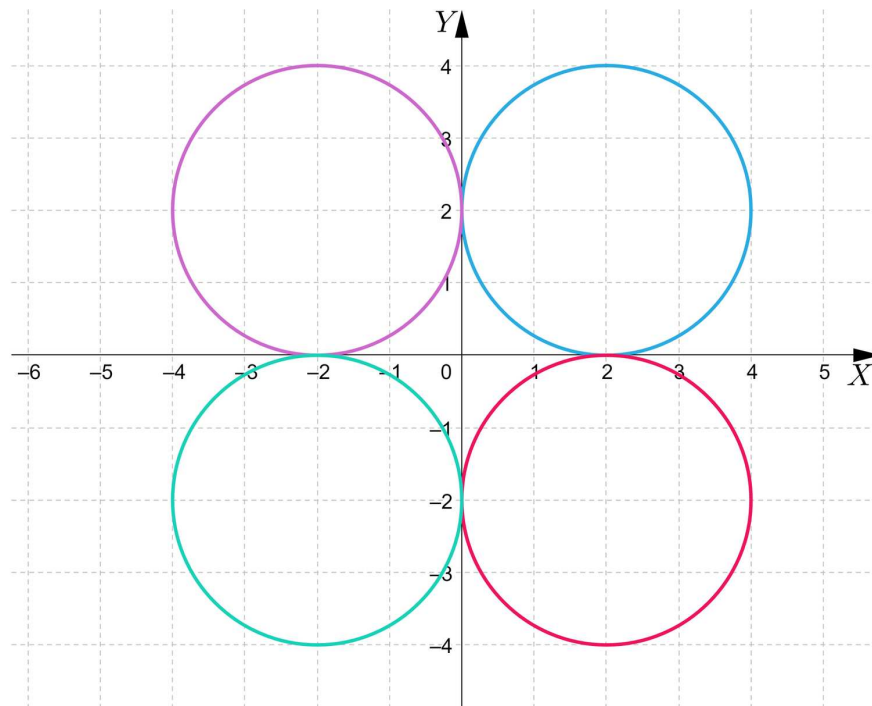


### Przykład 5

Wyznamy równania okręgów o promieniu długości 2, stycznych do obu osi układu współrzędnych.

#### Rozwiązanie:

Jeżeli promień okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych ma długość 2, to istnieją cztery takie okręgi, jak na poniższym rysunku.



Równania tych okręgów przedstawiają się następująco:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4,$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Zauważmy, że jeśli okrąg o promieniu długości  $r$  jest styczny do obu osi układu współrzędnych, to jego środek ma współrzędne:  $(r, r)$ ,  $(-r, r)$ ,  $(r, -r)$  lub  $(-r, -r)$ .

### Przykład 6

Wyznaczmy równanie okręgu przechodzącego przez punkt  $A = (-2, -1)$ , stycznego do obu osi układu współrzędnych.

#### Rozwiązanie:

Wiemy już, że równanie takiego okręgu możemy zapisać w postaci:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

W celu wyznaczenia wartości  $r$  rozwiązujemy równanie:

$$(-2 - r)^2 + (-1 - r)^2 = r^2.$$

Równanie jest równoważne równaniu  $4 + 4r + r^2 + 1 + 2r + r^2 = r^2$ , zatem  $r^2 + 6r + 5 = 0$ .

Rozwiązaniami tego równania są liczby  $(-5)$  oraz  $(-1)$ .

Istnieją zatem dwa okręgi spełniające warunki zadania. Ich równania zapisujemy w postaci:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \text{ oraz } (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25.$$

## Słownik

**postać kanoniczna równania okręgu**

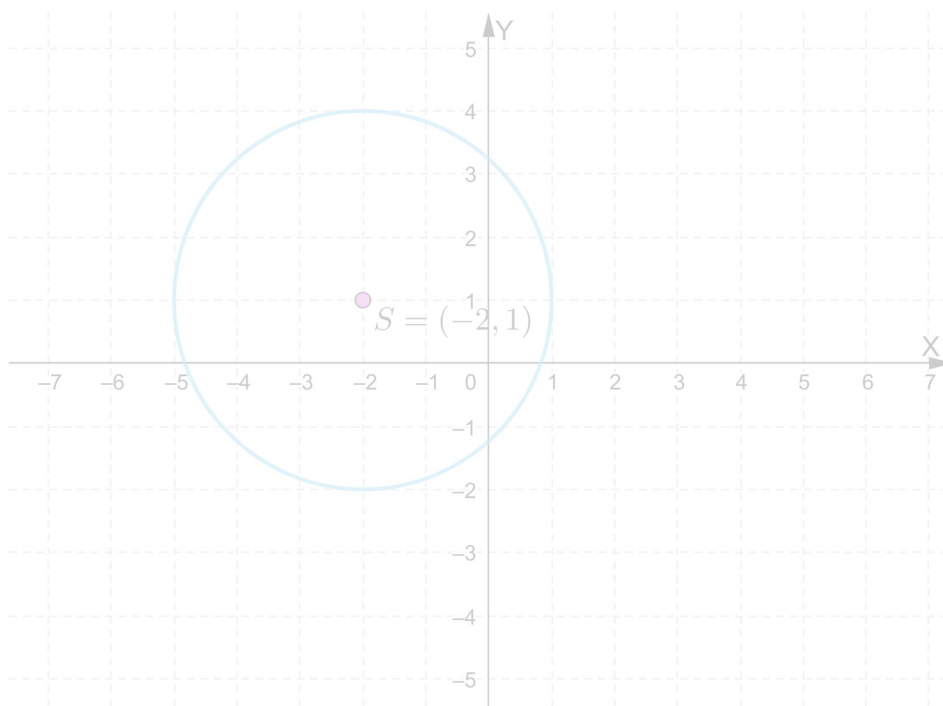
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , gdzie  $S = (a, b)$  jest środkiem okręgu oraz  $r$  jest promieniem okręgu

# Symulacja interaktywna

---

## Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną, zmieniaj współrzędne środka okręgu oraz długość promienia. Zwróć uwagę na zapis równania okręgu.



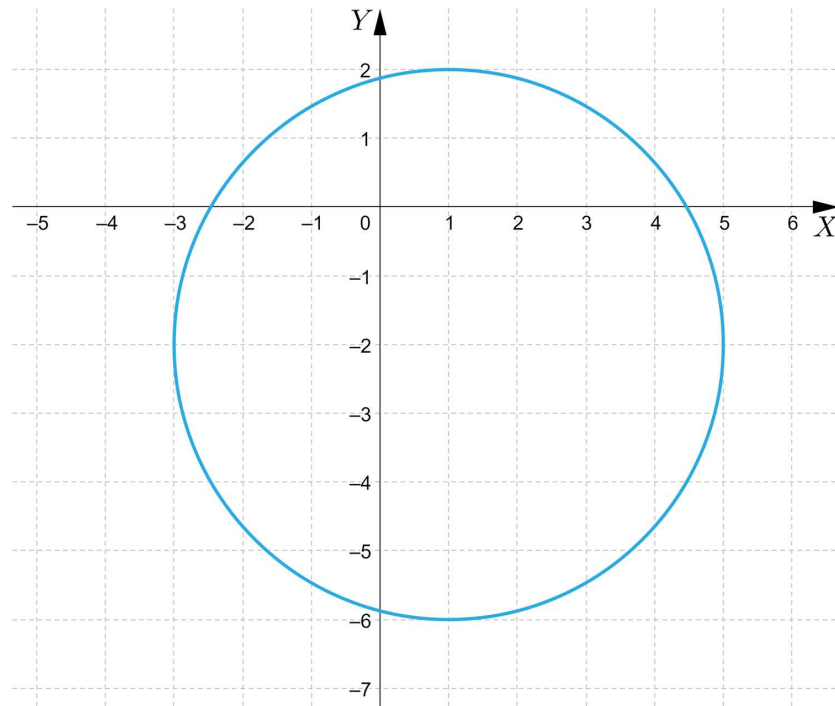
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1EAYHRmN>

## Polecenie 2




a. Naskicuj okrąg, który jest opisany za pomocą równania:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

b. Zapisz równanie okręgu przedstawionego na poniższym rysunku.



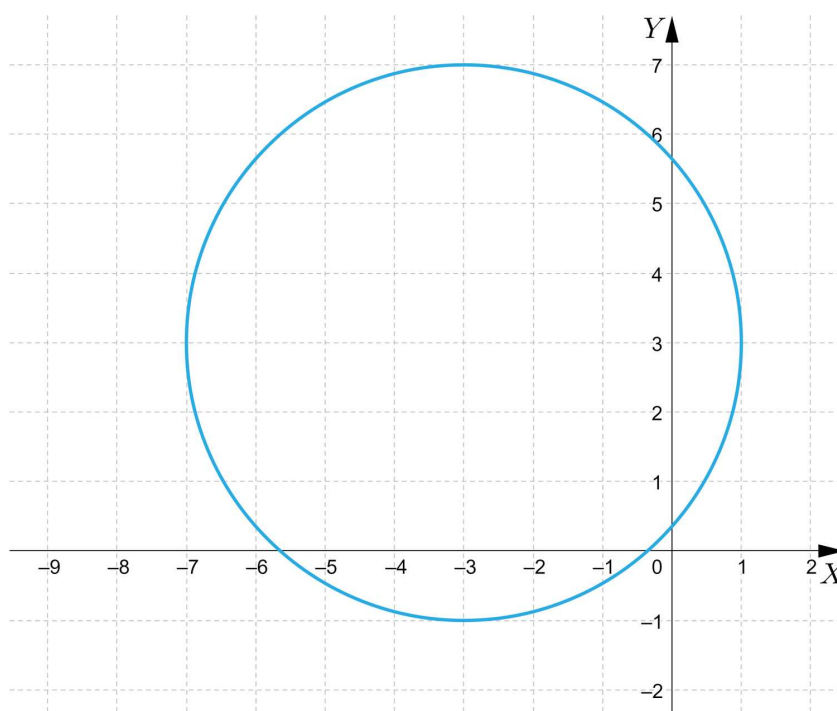
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Jaki wzór określa okrąg przedstawiony na poniższym rysunku?



## Ćwiczenie 2



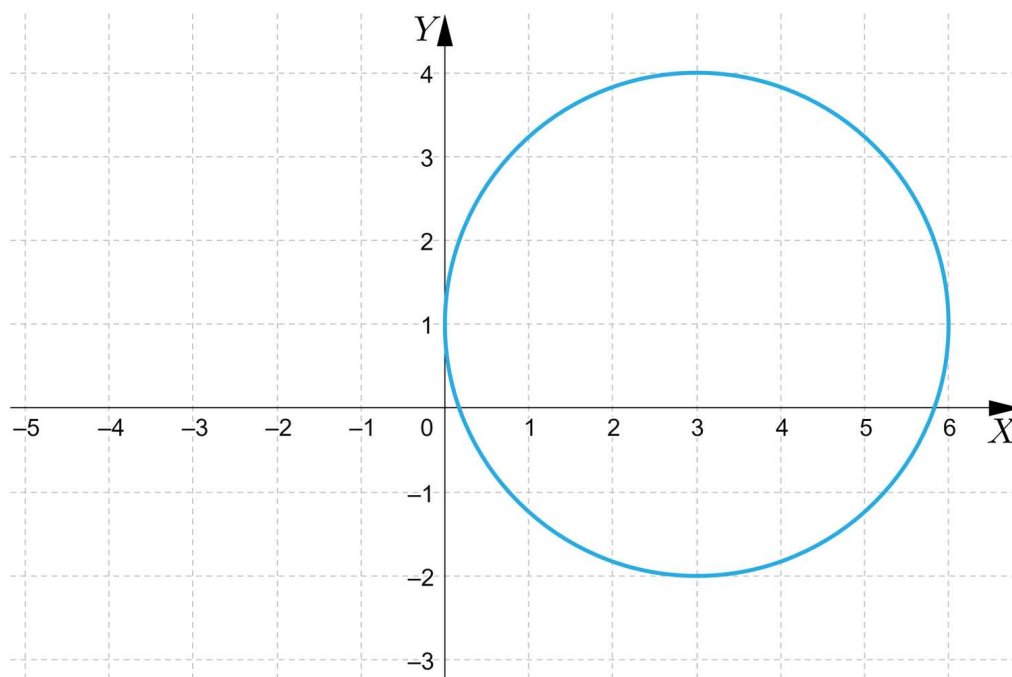
## Ćwiczenie 3



#### Ćwiczenie 4



Na poniższym rysunku przedstawiono okrąg.



#### Ćwiczenie 5



#### Ćwiczenie 6



#### Ćwiczenie 7



#### Ćwiczenie 8



Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt o współrzędnych  $(3, 2)$ , stycznego do obu osi układu współrzędnych.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Interpretacja równania okręgu

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza równanie okręgu na podstawie informacji z rysunku,
- szkicuje okrąg, gdy dane jest jego równanie,
- określa wartości parametrów, dla których równanie opisuje okrąg,
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Symulacja interaktywna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Interpretacja równania okręgu” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Symulacja interaktywna” i wykonują zawarte w tej części polecenia.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienia rozwiązania przez nauczyciela.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń w temacie: „Interpretacja równania okręgu”.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Koła i okręgi](#).

**Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Symulacja interaktywna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Interpretacja równania okręgu”.