



Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Przykład zadania opartego na realistycznej sytuacji: obliczanie sumy wyrazów ciągu arytmetycznego. Animacja: obliczanie sumy wyrazów ciągu arytmetycznego. Twierdzenie o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego. Rozwiązania zdań wykorzystujących to twierdzenie.

Zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym wykorzystujące wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego. Interpretacja graficzna ciągu arytmetycznego. Zasób zawiera zadania, w tym zadania interaktywne.

Zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym wykorzystujące wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego. Wyznaczanie wyrazów i różnicy ciągu arytmetycznego. Zasób zawiera zadania, w tym część zadań interaktywnych.

Zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym wykorzystujące wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego. Wyznaczanie wyrazów i różnicy ciągu arytmetycznego. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera zadania otwartych z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Materiał ten poświęcony jest sumie wyrazów ciągu arytmetycznego. Analizując zawarte tu przykłady, dowiesz się w jaki sposób stosować twierdzenie o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego do rozwiązywania różnego rodzaju zadań.

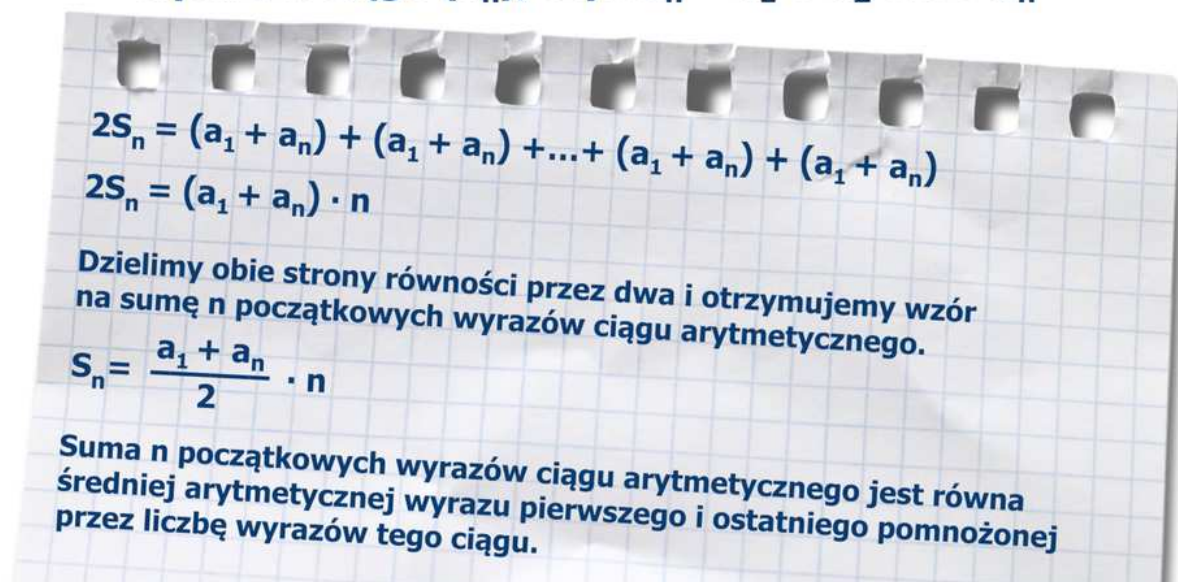
Ważne!

Symbolem S_n oznaczamy sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , czyli

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Przykład 1

➡ Oznaczmy symbolem S_n sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , czyli $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RL2eFzX5Zqw0V>

atrapa:opis animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja ilustruje sumę S z indeksem dolnym n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego a z indeksem dolnym n . Suma S z indeksem dolnym n początkowych n = ułamek w liczniku a z indeksem dolnym jeden plus a z indeksem dolnym n mianownik 2 koniec ułamka razy n .

Twierdzenie: o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Przykład 2

Oblicz sumę $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Sumowane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_{100} = 100$. Mamy więc

$$S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Przykład 3

Oblicz sumę stu początkowych liczb naturalnych, które podzielone przez 3 dają resztę 2.

Pierwszą liczbą naturalną, która podzielona przez 3 daje resztę 2 jest 2, drugą 5, trzecią 8. Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Suma stu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

$$S_{100} = \frac{2a_1 + 99r}{2} \cdot 100 = \frac{2 \cdot 2 + 99 \cdot 3}{2} \cdot 100 = 15050.$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = 595$ z niewiadomą n .

Liczby, które sumujemy po lewej stronie równania, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$, różnicy $r = 4$. Suma ta składa się z n wyrazów.

Ponieważ n jest liczbą wyrazów, więc jest liczbą całkowitą dodatnią. Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy

$$S_n = \frac{2 \cdot 3 + (n - 1)4}{2} \cdot n = 3n + 2n(n - 1) = 2n^2 + n.$$

Z treści zadania wynika, że

$$2n^2 + n = 595.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe $2n^2 + n - 595 = 0$, które ma dwa rozwiązania $n_1 = -17,5$ oraz $n_2 = 17$. Tylko druga z liczb jest całkowita dodatnia. Zatem rozwiązaniem równania jest liczba 17.

Przykład 5

Liczby 9, 5, 1 są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz sumę $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30}$.

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1 = 9$, a różnica ciągu jest równa $r = a_2 - a_1 = 5 - 9 = -4$.

- sposób I:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} &= a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} + a_{11} + \\ &+ a_{12} + \dots + a_{30} - (a_1 + a_2 + \dots + a_9) = S_{30} - S_9. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29r}{2} \cdot 30 = (18 - 116) \cdot 15 = -1470$$

oraz

$$S_9 = \frac{2a_1 + 8r}{2} \cdot 9 = \frac{18 - 32}{2} \cdot 9 = -63,$$

więc

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} = -1470 + 63 = -1407.$$

- sposób II:

Możemy zauważyć, że wyrazy $a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{30}$, które mamy zsumować, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (b_n) , który składa się z 21 wyrazów i w którym

$$b_1 = a_{10} = a_1 + 9r = -27$$

oraz

$$b_{21} = a_{30} = a_1 + 29r = -107.$$

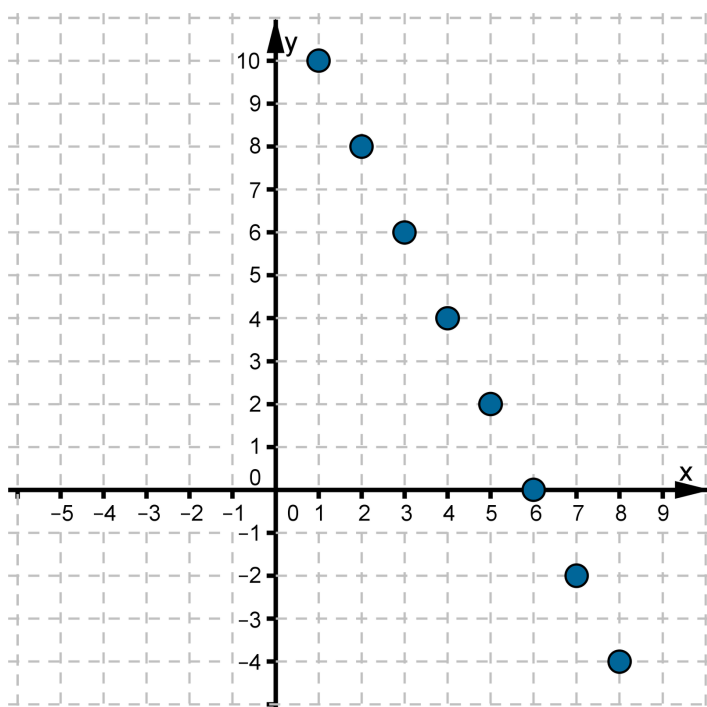
Suma 21 początkowych wyrazów tego ciągu jest więc równa

$$S_{21} = \frac{b_1 + b_{21}}{2} \cdot 21 = \frac{-27 - 107}{2} \cdot 21 = -1407.$$

Ćwiczenie 1



Korzystając z wykresu ciągu arytmetycznego, uzupełnij sumy wyrazów odpowiednimi wartościami.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij poniższe równości odpowiednimi liczbami. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz poprawną odpowiedź.

- $S_1 =$
- $S_2 =$
- $S_3 =$
- $S_4 =$
- $S_5 =$
- $S_6 =$
- $S_7 =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Suma kolejnych 100 liczb naturalnych jest równa 7250. Jakie to liczby? Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Pierwsza z nich to , a ostatnia .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 7$ dla $n \geq 1$ jest równa 352. Ciąg składa się z 22 wyrazów.	☐	☐
Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 5 - 3n$ dla $n \geq 1$ jest równa -2145 . Ciąg składa się z 40 wyrazów.	☐	☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych liczb trzycyfrowych wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Długości kolejnych boków pewnego wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Najdłuższy bok wielokąta ma długość 28, a obwód wielokąta jest równy 93. Ile boków ma ten wielokąt? Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Ten wielokąt ma boków.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa $S_n = \frac{3n^2 - 13n}{2}$ dla każdego $n \geq 1$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Różnica tego ciągu jest równa 3.

☐ Piąty wyraz tego ciągu jest równy 5.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Różnica pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 2, natomiast sumy n oraz $n + 2$ jego początkowych wyrazów są równe $S_n = 176$ oraz $S_{n+2} = 240$. Oblicz n . Poniżej podaj prawidłowe rozwiązania, liczby wpisuj w kolejności rosnącej.

$n =$ lub $n =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Sumę pewnego ciągu arytmetycznego można zapisać wzorem: $2n^2 - 12n$. Oblicz wartość pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu. Połącz w pary, przyporządkowując wyrazom ciągu odpowiednie wartości.

a_3

-6

a_1

-2

a_2

2

a_4

6

a_5

-10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Zaznacz poprawną odpowiedź. W ciągu arytmetycznym $a_1 = 5$ oraz $a_{30} = 9$. Wtedy suma $S_{30} = a_1 + a_2 + \dots + a_{30}$ jest równa

☐ 1890

☐ 210

☐ 225

☐ 270

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które podzielone przez 5 dają resztę 2. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych liczb wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych liczb wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $r = 4$. Wyznacz największe n , dla którego $S_n < 80$. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Największe n jest równe .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



W pewnym ciągu arytmetycznym $a_9 = 11$ oraz $a_{14} = 1$ znajdź sumę początkowych dwudziestu jeden wyrazów tego ciągu. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego wzór ogólny jest postaci $a_n = \frac{2n-1}{5}$. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Suma piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa $S_{15} = 135$, a różnica tego ciągu jest równa $r = 3$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu od wyrazu szesnastego do wyrazu trzydziestego. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Ile liczb trzeba wstawić między liczby (-13) oraz 8 , aby otrzymać ciąg arytmetyczny, którego suma jest równa (-25) ? Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Trzeba wstawić liczb.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, w którym sumy ośmiu i trzynastu początkowych wyrazów są równe $S_8 = -2\frac{2}{3}$, $S_{13} = 6\frac{1}{2}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Rozwiąż równanie $4^2 \cdot 4^4 \cdot 4^6 \cdot \dots \cdot 4^{2n} = 0,25^{-30}$. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Rozwiązaniem równania jest liczba .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Wykaż, że $n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Wyznacz sumę dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , wiedząc, że $a_8 + a_{10} + a_{16} + a_{18} = 20$. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Wiedząc, że siódmy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, oblicz sumę trzynastu pierwszych wyrazów tego ciągu. Uzupełnij poniższe zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma tych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Wykaż, że $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 5050$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.