



Ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę

Źródło: www.pixabay.com, domena publiczna.

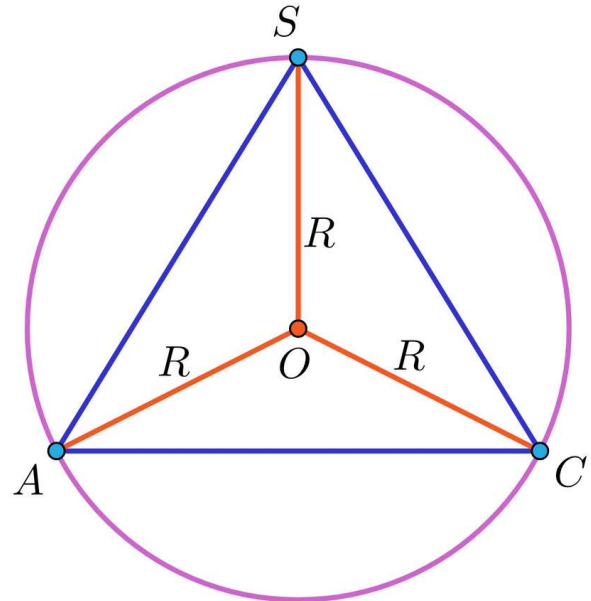
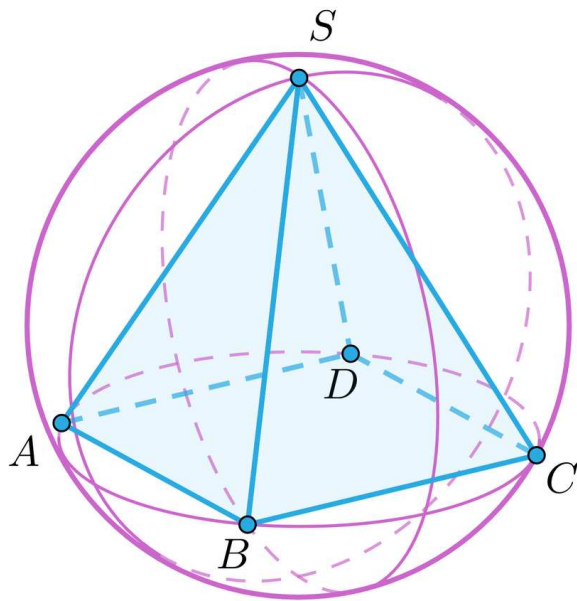
Na co dzień żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni. Pomimo to, zadania o bryłach sprawiają nam sporo kłopotu. Kluczem do rozwiązania zadania z geometrii jest rysunek, ale często nie potrafimy wykonać go w takim rzucie, na którym dobrze widać wielkości podane w zadaniu. Ponieważ rozwiązanie zadania z geometrii przestrzennej sprowadza się do rozwiązania zadania z geometrii płaskiej, warto nauczyć się rysować taki przekrój danej bryły płaszczyzną, który jest znaną nam figurą płaską i zawiera poszukiwaną wielkość oraz możliwie wiele danych wielkości. Tę sztuczkę wykorzystamy do rozwiązania zadań o kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.

Zagadnienia dotyczące ostrosłupa wpisanego w kulę wykraczają poza podstawę programową, ale wykorzystują treści w niej zawarte.

Twoje cele

- Poznasz własności ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w kulę.
- Zastosujesz wzory na obliczanie pola powierzchni i objętość brył.

Przeczytaj



Ostrosłup prawidłowy czworokątny jest wpisany w kulę (kula jest opisana na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym) wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na powierzchni kuli.

Trójkąt będący przekrojem przechodzącym przez wysokość ostrosłupa oraz przekątną podstawy jest wpisany w okrąg o promieniu R i jest trójkątem równoramiennym, w szczególnym przypadku może być trójkątem równobocznym.

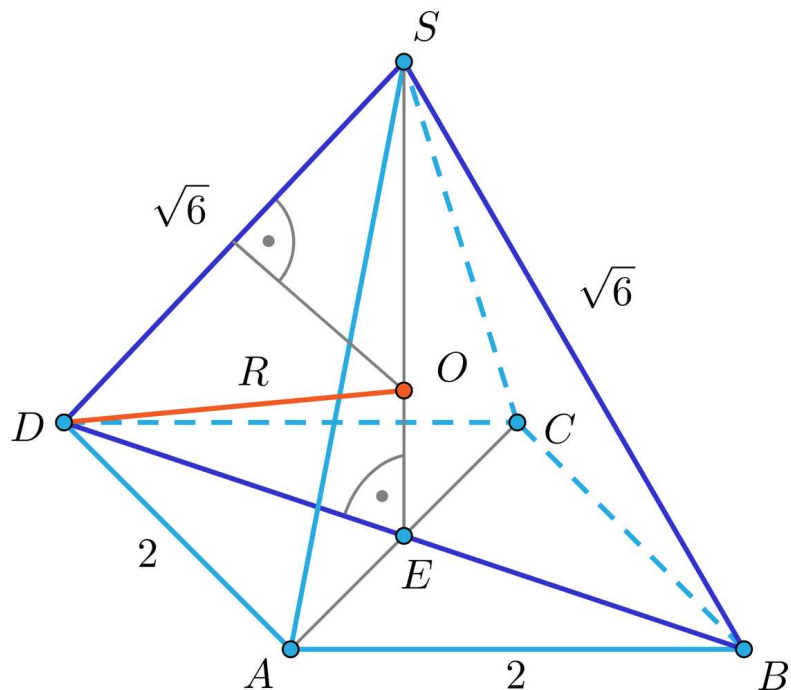
Środek kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym leży na prostej zawierającej wysokość tego ostrosłupa.

Przypomnijmy, że długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie wyraża się wzorem $R = \frac{abc}{4P_{\Delta}}$, gdzie P_{Δ} – pole trójkąta, a, b i c – długości boków tego trójkąta.

Przykład 1

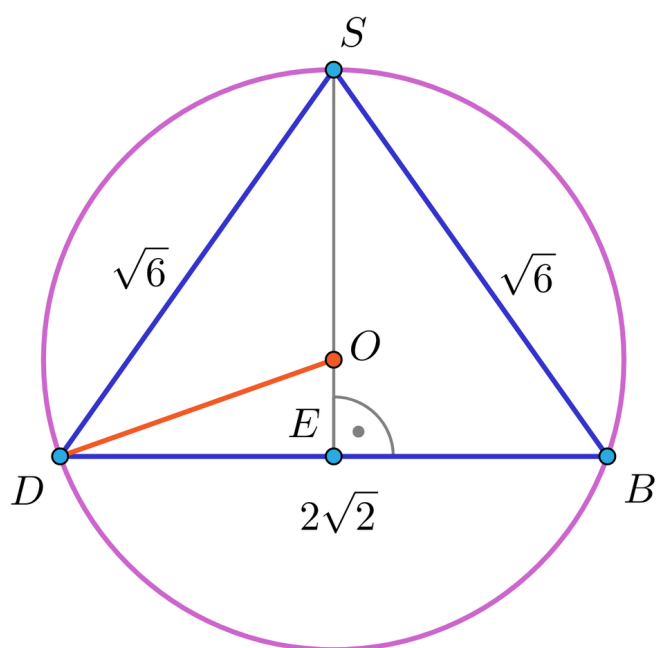
Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $\sqrt{6}$, a krawędź podstawy 2. Wyznamy promień kuli opisanej na tym ostrosłupie.

Wykonajmy odpowiedni rysunek.



Zauważmy, że promień kuli, to promień koła opisanego na trójkącie BDS .

Zatem możemy posłużyć się następującym rysunkiem.



Zauważmy, że $|DE| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Wyznamy wysokość ostrosłupa korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DES .

$$|DS|^2 = |DE|^2 + |ES|^2$$

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{2})^2 + |ES|^2$$

$$|ES| = 2$$

Z trójkąta prostokątnego DEO mamy.

$$|DO|^2 = |EO|^2 + |DE|^2$$

$$R^2 = (2 - R)^2 + (\sqrt{2})^2$$

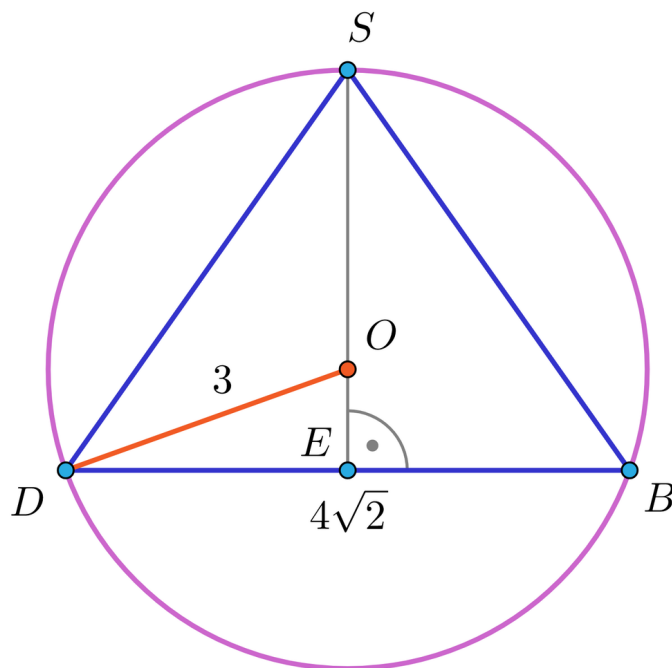
$$R^2 = 4 - 4R + R^2 + 2$$

$$R = \frac{3}{2}$$

Przykład 2

W kulę o promieniu długości 3 wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości 4. Obliczmy długość wysokości tego ostrosłupa.

W rozwiązaniu posłużymy się przekrojem ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe krawędzie boczne.



Zauważmy, że $|SO| = |DO| = 3$. Zatem, aby wyznaczyć długość wysokości SE wystarczy obliczyć długość odcinka EO . Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DEO :

$$|EO|^2 + |DE|^2 = |DO|^2$$

$$|EO|^2 + (2\sqrt{2})^2 = 3^2$$

$$|EO|^2 = 9 - 8$$

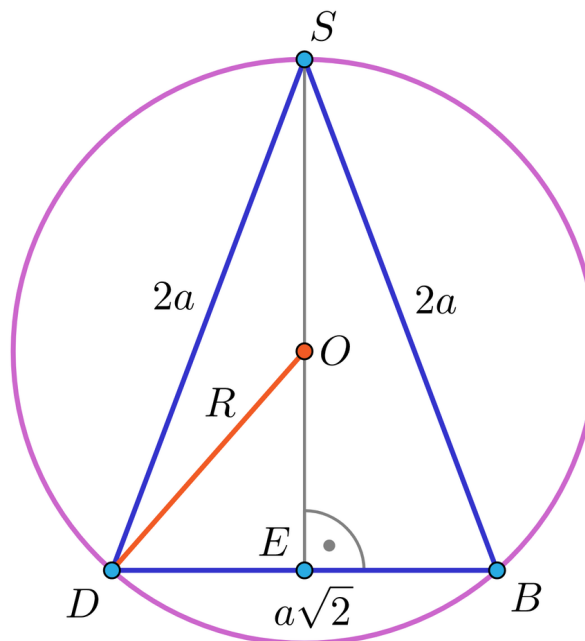
$$|EO| = 1$$

Stąd wysokość ostrosłupa $|SE| = |EO| + |SO| = 4$.

Przykład 3

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Obliczymy pole powierzchni kuli opisanej na tym ostrosłupie.

W rozwiązaniu posłużymy się przekrojem ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe krawędzie boczne.



Obliczymy długość odcinka SE korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DES :

$$|SE|^2 + |DE|^2 = |DS|^2$$

$$|SE|^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (2a)^2$$

$$|SE|^2 = 4a^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$|SE| = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Korzystając ze wzoru na długość promienia okręgu opisanego na trójkącie otrzymujemy:

$$R = \frac{|DS| \cdot |BS| \cdot |BD|}{4P_{BDS}} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{4 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{14}} = \frac{2a\sqrt{14}}{7}.$$

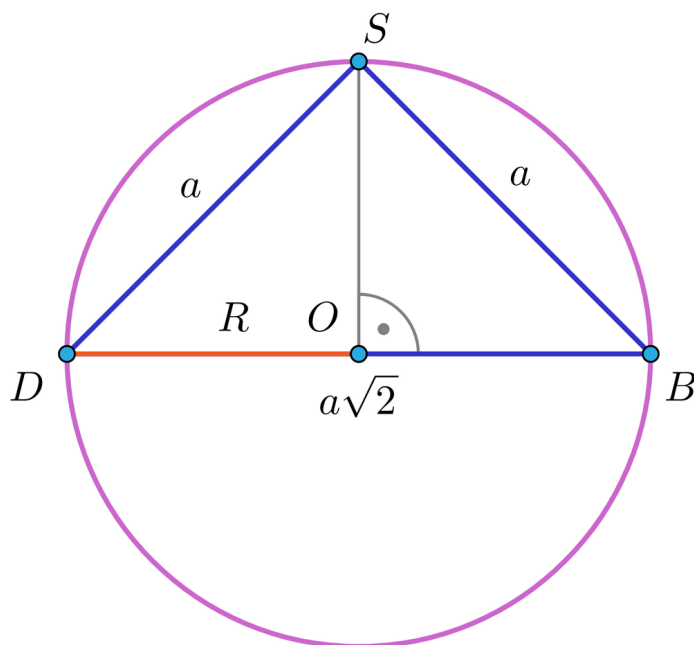
$$\text{Stąd } P = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{2a\sqrt{14}}{7} \right)^2 = \frac{32}{7}\pi a^2.$$

Przykład 4

Wszystkie krawędzie **ostrosłupa prawidłowego czworokątnego** są równe i mają długość a .

Obliczymy objętość kuli opisanej na tym ostrosłupie.

W rozwiązaniu posłużymy się przekrojem ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe krawędzie boczne.



Zauważmy, że boki trójkąta BDS mają długości a , a i $a\sqrt{2}$ czyli ten trójkąt jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Zatem $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Stąd } V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3.$$

Słownik

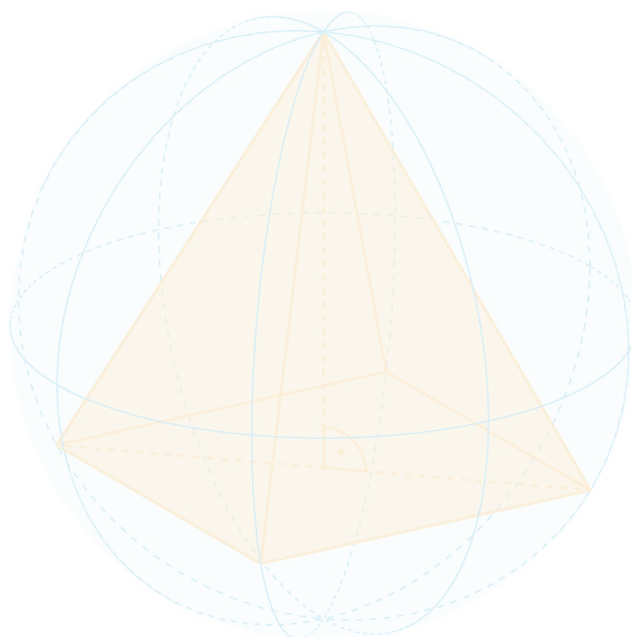
ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę

ostrosłup prawidłowy czworokątny jest wpisany w kulę (kula jest opisana na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym) wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na powierzchni kuli

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem, na którym przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę. Za pomocą suwaków możesz zmieniać wymiary ostrosłupa.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18NpiEbc>

Polecenie 2

Ustaw przy pomocy suwaków wymiary ostrosłupa tak, aby środek kuli znajdował się wewnątrz ostrosłupa. Uzupełnij zdanie.

Jeśli środek kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym znajduje się na wysokości ostrosłupa (wewnątrz ostrosłupa), to kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest kątem .

prostym

rozwartym

ostrym

Polecenie 3

Ustaw przy pomocy suwaków wymiary ostrosłupa tak, aby środek kuli pokrywał się ze spodkiem wysokości ostrosłupa. Uzupełnij zdanie.

Jeśli środek kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pokrywa się ze spodkiem wysokości ostrosłupa, to kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest kątem .

Polecenie 4

Ustaw przy pomocy suwaków wymiary ostrosłupa tak, aby środek kuli znajdował się poza ostrosłupem. Uzupełnij zdanie.

Jeśli środek kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym znajduje się poza ostrosłupem, to kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest kątem .

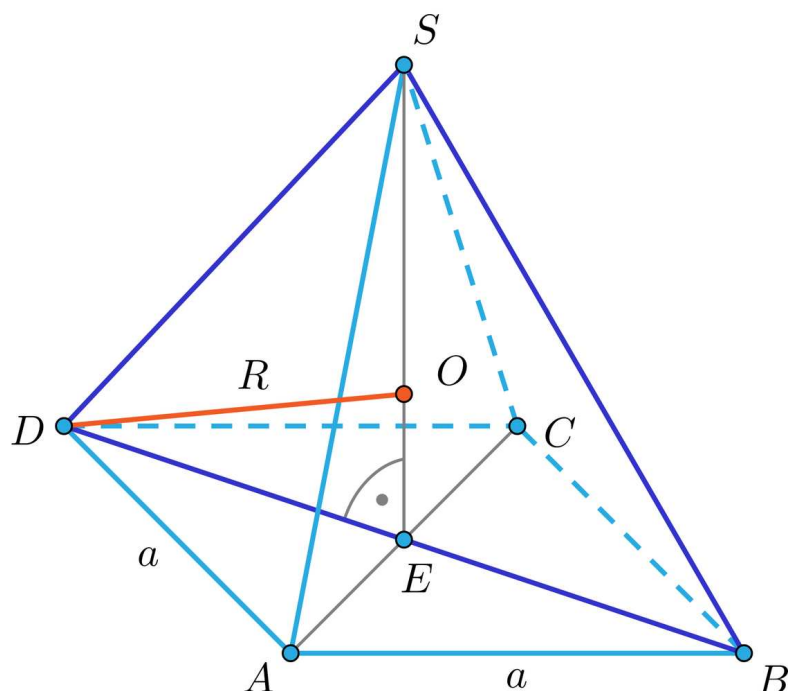
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę o promieniu R .



Ćwiczenie 2



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna wynosi 6, a kąt nachylenia tej krawędzi do płaszczyzny podstawy jest równy 60° . Objętość kuli opisanej na tym ostrosłupie jest równa:

- $48\pi\sqrt{3}$

- 48π

- $32\pi\sqrt{3}$

- $\bigcirc \quad 32\pi$

Ćwiczenie 3



W kulę o promieniu 6 wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny. Oblicz objętość ostrosłupa wiedząc, że jego podstawa zawiera się w kole wielkim kuli. Podaj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Cyfra	Odpowiedź
Setek	
Dziesiątek	
Jedności	

Ćwiczenie 4



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 4, krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość kuli opisanej na tym ostrosłupie.

Ćwiczenie 5



Oblicz objętość kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, którego wysokość jest równa krawędzi podstawy.

Ćwiczenie 6



Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o podstawie $ABCD$, płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe krawędzie boczne, wynosi $12\sqrt{2}$. Krawędź podstawy ma długość 6. Wykaż, że promień kuli opisanej na tym ostrosłupie jest równy $\frac{17}{4}$.

Ćwiczenie 7



W kulę wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a , w którym ściana boczna nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Pole powierzchni kuli jest równe 64π .

Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 8



W kulę o promieniu R wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy α . Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli środek kuli leży wewnątrz ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor – Szczęśniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony.

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna własności kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym,
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość ostrosłupów oraz kuli,
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- lekcja odwrócona,
- pokaz multimedialny,
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz przypomnienie wiadomości o objętości ostrosłupa, okręgu opisanym na trójkącie równobocznym, prostokątnym i dowolnym.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat: „Ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisany w kulę” i cele zajęć. Razem z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla aplet i omawia jego działanie.
2. Nauczyciel czyta polecenia pod apilem – uczniowie, metodą analizy pomysłów, próbują uzupełnić luki. Wybrany uczeń sprawdza poprawność odpowiedzi przy pomocy apletu.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 6 grup. Każda grupa otrzymuje do rozwiązania jedno ćwiczenie spośród ćwiczeń 1 – 6 w części „Sprawdź się”.
4. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/ powinnam zapamiętać, że”

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Ostrosłup i jego własności](#)
- [Kula i sfera](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet wraz z towarzyszącymi mu ćwiczeniami może stanowić pracę domową dla uczniów.