



Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Każdą funkcję możemy przedstawić w kilku postaciach. Jednym ze sposobów przedstawienia funkcji jest wykres. Wykresem funkcji logarytmicznej jest krzywa logarytmiczna. Wykresy tej funkcji mogą m.in. przedstawiać stężenia jonów wodorowych w roztworze chemicznym, czy też skalę natężenia dźwięku. Jest wiele przykładów ich zastosowania w życiu codziennym oraz różnych dziedzinach nauki. W trakcie lekcji omówimy własności krzywej logarytmicznej dla przypadku, gdy podstawa logarytmu jest większa od 1.

Twoje cele

- Określisz własności wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$.
- Sporządzisz wykres funkcji logarytmicznej.
- Zastosujesz swoją wiedzę do rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Przeczytaj

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$.

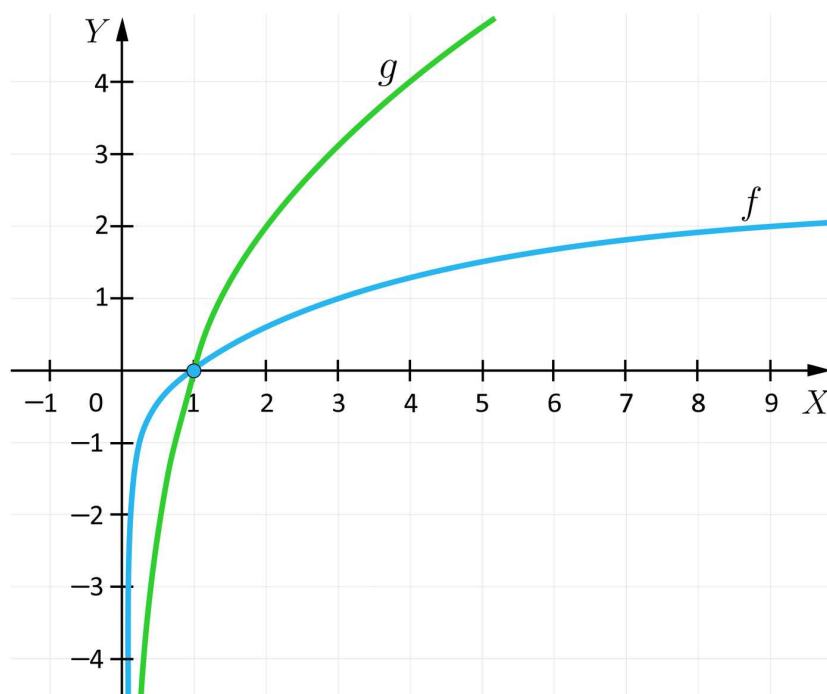
W materiale omówimy własności wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ dla przypadku, gdy $a \in (1, \infty)$.

Naszkcujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji zadanych wzorami $f(x) = \log_3 x$ oraz $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

W tym celu w tabelach przedstawmy wartości tych funkcji dla kilku argumentów.

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	-1	0	1	2
x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x)$	-2	0	2	4

Wykresy tych funkcji przedstawiają się następująco:



Na podstawie wykresów funkcji możemy określić własności wykresu funkcji zadanej wzorem $f(x) = \log_a x$ dla $a \in (1, \infty)$:

- asymptotą wykresu funkcji jest prosta $x = 0$,
- wykres funkcji zawsze przechodzi przez punkt $(1, 0)$, bo $\log_a 1 = 0$,

- wykres funkcji znajduje się w I i IV ćwiartce układu współrzędnych, bo funkcja jest określona tylko dla $x > 0$,
- $f(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$ oraz $f(x) > 0$ dla $x \in (1, \infty)$.

Wymienione pierwsze trzy własności wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in (1, \infty)$ nie ulegają zmianie, gdy podstawa a logarytmu jest liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Ciekawostka

Wykresy funkcji logarytmicznych określonych wzorami $f(x) = \log_a x$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ są symetryczne względem osi X układu współrzędnych.

Dowód:

Wzór funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ możemy zapisać w postaci $g(x) = \log_{a^{-1}} x$.

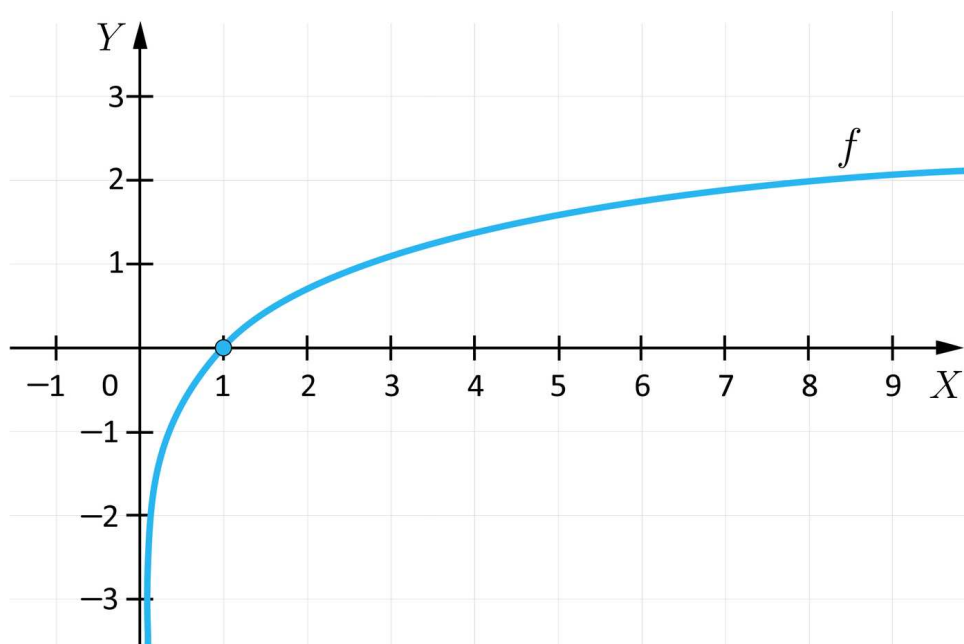
Zatem $g(x) = \log_{a^{-1}} x = \log_a x^{-1} = -\log_a x$.

Jeżeli $g(x) = -f(x)$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi X .

Mając dany punkt, który należy do wykresu funkcji logarytmicznej, możemy wyznaczyć jej wzór.

Przykład 1

Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ przedstawiono na poniższym rysunku. Wyznamy wzór tej funkcji.



Z rysunku możemy odczytać, że do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(8, 2)$.

Chcąc wyznaczyć wartość a we wzorze funkcji logarytmicznej, musimy rozwiązać równanie:

$$2 = \log_a 8, \text{ zatem } a^2 = 8.$$

$$\text{Wartość } a = 2\sqrt{2} \text{ lub } a = -2\sqrt{2}.$$

Ponieważ $a > 0$, zatem funkcję f opisujemy za pomocą wzoru $f(x) = \log_{2\sqrt{2}} x$.

Przykład 2

Do wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ należy punkt o współrzędnych $(4, 9)$. Wyznamy wzór tej funkcji.

W celu wyznaczenia wzoru funkcji, współrzędne punktu $(4, 9)$ podstawiamy do wzoru $f(x) = \log_a x$ i rozwiązujemy równanie:

$$\log_a 9 = 4$$

$$\text{Z równania otrzymujemy, że } a = \sqrt{3} \text{ lub } a = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Ponieważ } a > 0, \text{ zatem } a = \sqrt{3}.$$

Wzór funkcji jest postaci $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$.

Przykład 3

Do wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_4(ax - b)$ należą punkty o współrzędnych $(6, 1)$ oraz $(\frac{9}{4}, -1)$.

Wyznamy wzór tej funkcji.

W celu wyznaczenia wartości a i b musimy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \log_4(6a - b) = 1 \\ \log_4(\frac{9}{4}a - b) = -1 \end{cases}$$

$$\text{Układ przekształcamy do postaci: } \begin{cases} 6a - b = 4 \\ \frac{9}{4}a - b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $a = 1$ i $b = 2$.

Zatem wzór funkcji zapisujemy w postaci: $f(x) = \log_4(x - 2)$.

Sprawdzenie:

$$f(6) = \log_4(6 - 2) = \log_4 4 = 1$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \log_4\left(\frac{9}{4} - 2\right) = \log_4 \frac{1}{4} = -1.$$

Wykorzystując własności wykresu funkcji logarytmicznej możemy wyznaczyć argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne.

Przykład 4

Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja określona wzorem $f(x) = \log_5(2x - 1)$ przyjmuje wartości ujemne.

W celu ustalenia dziedziny logarytmu rozwiązujemy nierówność $2x - 1 > 0$, zatem $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Jeżeli $f(x) < 0$ to $2x - 1 > 0$ oraz $2x - 1 < 1$, zatem $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Szukamy części wspólnej rozwiązania oraz dziedziny funkcji.

Zatem $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Przykład 5

Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja określona wzorem $f(x) = \log_3(x^2 - x)$ przyjmuje wartości dodatnie.

W celu ustalenia dziedziny logarytmu rozwiązujemy nierówność $x^2 - x > 0$, więc $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Jeżeli $f(x) > 0$, to rozwiązujemy nierówność: $x^2 - x > 1$.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

Szukamy części wspólnej rozwiązania oraz dziedziny funkcji.

Zatem funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów

$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

Słownik

funkcja logarytmiczna

funkcja określona wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$

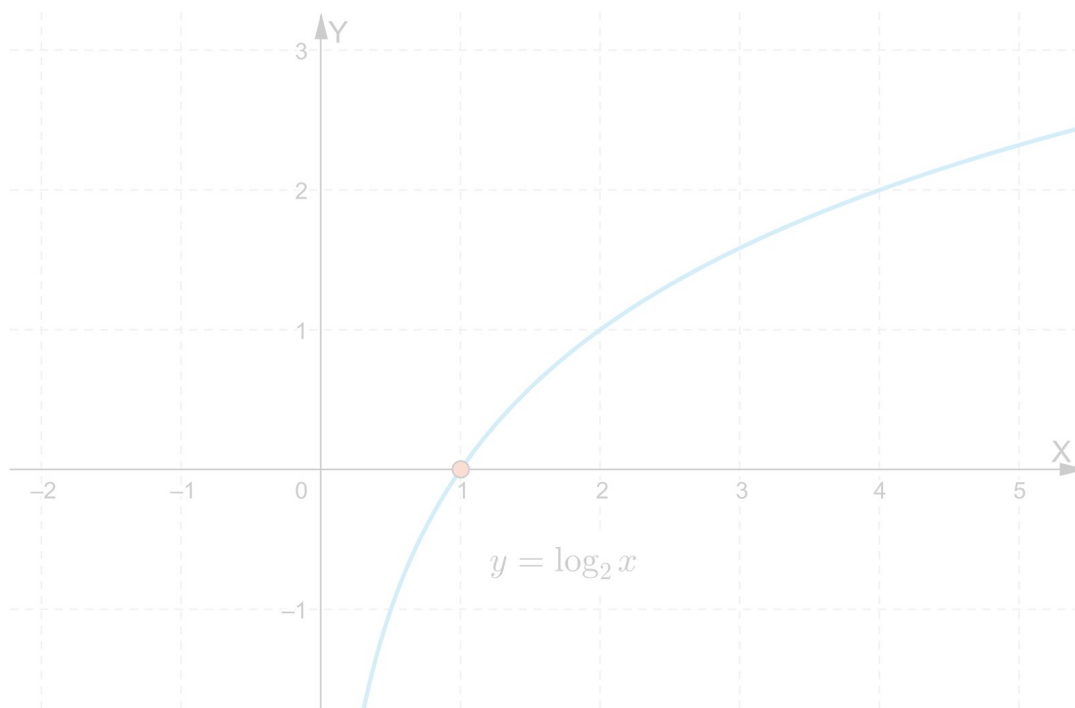
wykres funkcji

zbiór punktów (x, y) płaszczyzny, które spełniają zależność $y = f(x)$

Aplet

Polecenie 1

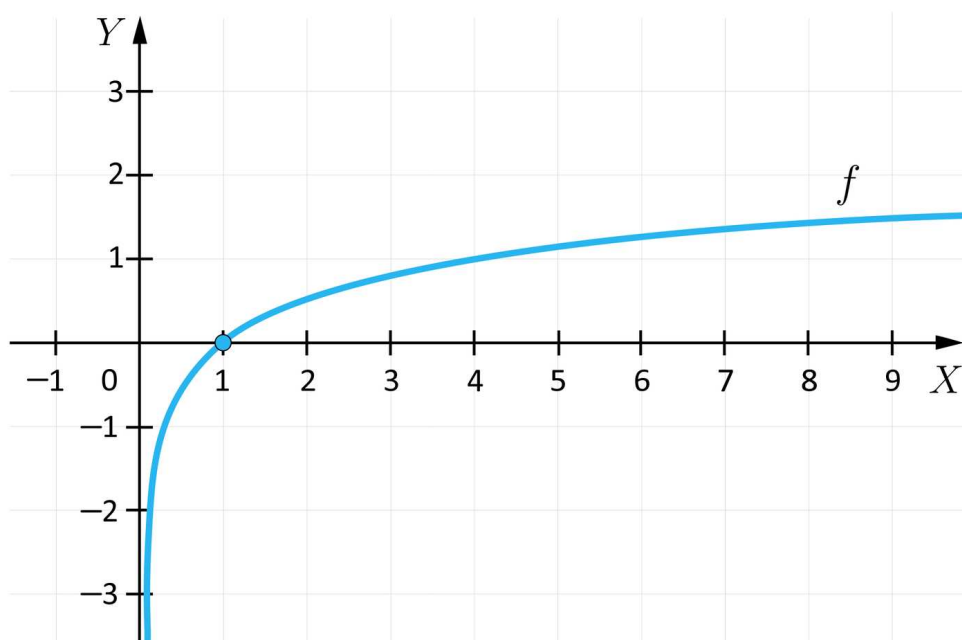
Uruchom aplet. Odczytaj jak najwięcej własności wykresów przedstawionych funkcji logarytmicznych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRoC4KriK>

Polecenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_{3\sqrt{2}} x$.
Wymień kilka własności wykresu tej funkcji.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary wzór funkcji ze współzrędnymi punktu, który należy do wykresu funkcji określonej tym wzorem.

$$f(x) = \log_2 x$$

$$(3, 2)$$

$$f(x) = \log_4 x$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$$

$$(2, 2)$$

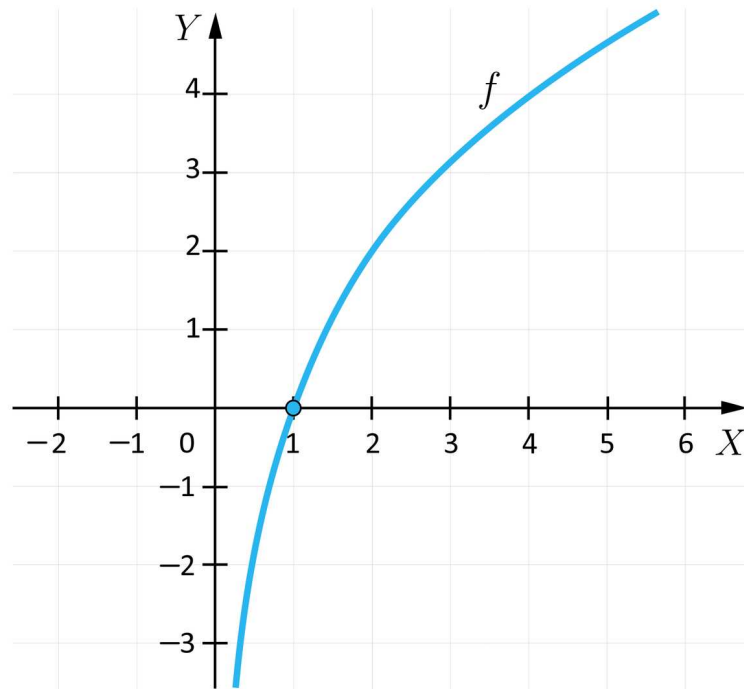
$$f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$$

$$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$.



Co można odczytać wykresu? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- ☐ Funkcja jest malejąca.
- ☐ Dla argumentów mniejszych od 2 funkcja przyjmuje wartości większe od 2.
- ☐ Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, 2)$.

Ćwiczenie 3



Pogrupuj elementy zgodnie z opisem.

Punkty, które należą do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{2\sqrt{2}} x$:

$(9, 4)$

$(3\sqrt{3}, 3)$

$(4, \frac{4}{3})$

$(2, \frac{2}{3})$

$(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$

$(\frac{1}{3}, -2)$

Punkty, które należą do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$:

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdania.

Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_4 x$ przecina oś odciętych w punkcie o współrzędnych (, 0).

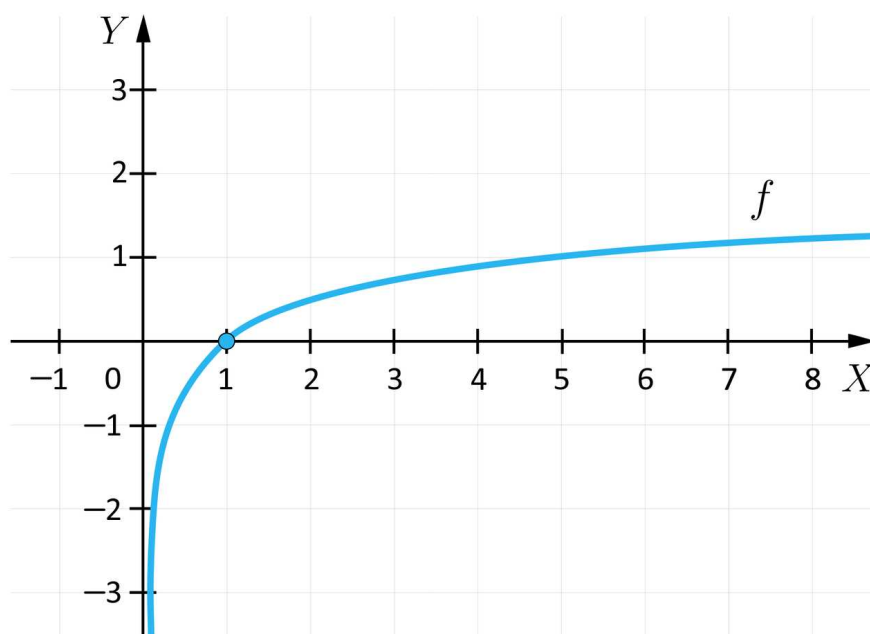
Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(\frac{1}{4}, \text{})$.

Funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu .

Ćwiczenie 5



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_5 x$.



Co można odczytać z wykresu tej funkcji? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

- ☐ Dla argumentów mniejszych od 5 funkcja przyjmuje wartości większe od 1.
- ☐ Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.
- ☐ Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(\frac{1}{5}, -1)$.
- ☐ Funkcja jest rosnąca.

Ćwiczenie 6



Do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_5 x$ nie należy punkt o współrzędnych:

☐ $(5\sqrt{5}, \frac{3}{2})$

☐ $(\frac{1}{125}, -3)$

☐ $(\frac{1}{125}, 3)$

Ćwiczenie 7



Czy do wykresu tej samej funkcji logarytmicznej mogą należeć punkty o współrzędnych $(9, 2)$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$?

☐ TAK

☐ NIE

Ćwiczenie 8



Naszkiuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a x$, jeżeli spełnione są następujące warunki:

- funkcja jest rosnąca,
- do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(16, 2)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje i określa własności wykresu funkcji logarytmicznej;
- odczytuje własności funkcji logarytmicznej na podstawie podanego wykresu;
- rysuje wykresy funkcji logarytmicznych o podanych własnościach;
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- drzewo decyzyjne;
- burza mózgów;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$ „, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach szkicują wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw i tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają własności tych wykresów. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów zawierające własności wykresu funkcji logarytmicznej. Następnie uczniowie zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego przykładu, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania z pozostałymi grupami.
2. W kolejnym kroku uczniowie będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie rozwiązują zadania indywidualnie wykonując ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy funkcji specjalnych i ich własności.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Polecenia z części „Aplet” można wykorzystać jako zadanie do samodzielnego wykonania dla uczniów, którzy wykonują zadania przed wyznaczonym czasem.