



Zadania dotyczące kątów oraz wielokątów

Obliczanie miar kątów. Obliczanie sumy miar kątów w opisanych wielokątach. Obliczanie pola powierzchni czworokątów i trójkątów. Zestaw zawiera ćwiczenia interaktywne w tym otwarte. Do zadań podane są wyjaśnienia i rozwiązania.

Zadania dotyczące kątów oraz wielokątów

Pokaż ćwiczenia:   

W poniższym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem zadań z geometrii płaskiej dotyczących różnych rodzajów kątów i ich własności oraz dotyczących wielokątów. W każdej części materiału znajdziesz krótkie przypomnienie, które pomoże Ci w rozwiązywaniu ćwiczeń.

Rodzaje kątów

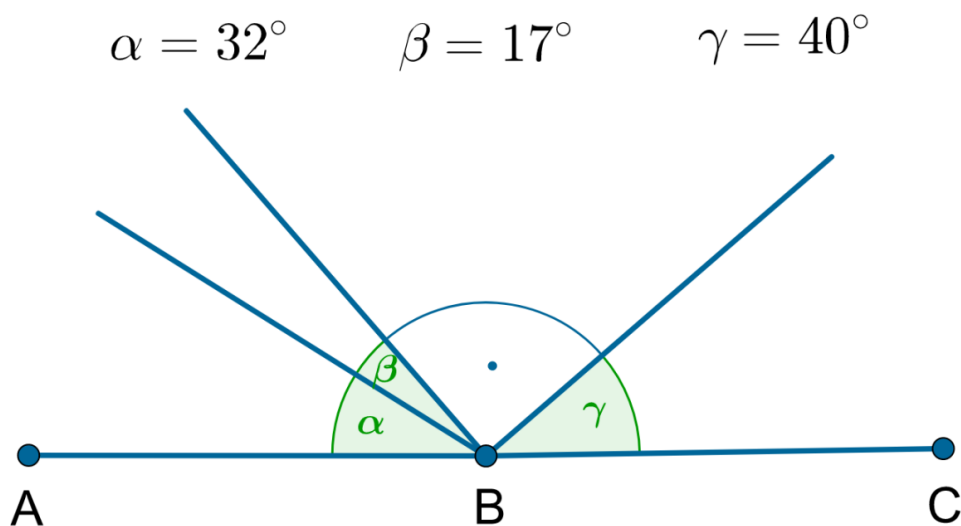
W tabeli poniżej znajduje się krótkie przypomnienie dotyczące różnych rodzajów kątów z uwzględnieniem ich konstrukcji i miar.

kąty wierzchołkowe	kąty przyległe	kąty odpowiadające	kąty naprzemianległe
konstrukcja			
tworzą je dwie przecinające się proste	- tworzą razem kąt półpełny , - mają wspólne ramię	- tworzą je trzy proste: dwie z nich są przecięte trzecią prostą, - leżą po tej samej stronie trzeciej prostej	- tworzą je trzy proste: dwie z nich są przecięte trzecią prostą, - leżą po przeciwnej stronie trzeciej prostej
miara			
mają tę samą miarę	- mają różną miarę (poza przypadkiem, gdy oba kąty są proste), - ich suma wynosi 180°	- jeżeli dwie przecięte proste są równoległe, to kąty odpowiadające są równe , jeżeli dwie przecięte proste nie są równoległe, to kąty odpowiadające są różne	- jeżeli dwie przecięte proste są równoległe, to kąty odpowiadające są równe , jeżeli dwie przecięte proste nie są równoległe, to kąty odpowiadające są różne

Ćwiczenie 1



Na rysunku podane są miary kątów α , β , γ . Czy wynika z tego, że punkty A , B , C są współliniowe?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Punkty A , B , C są współliniowe.

☐ Punkty A , B , C nie są współliniowe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Podaj miary kątów przy prostych równoległych.

$$\beta = 68^\circ.$$



Zapisz miary pozostałych kątów.

miara kąta 1 = °

miara kąta 2 = °

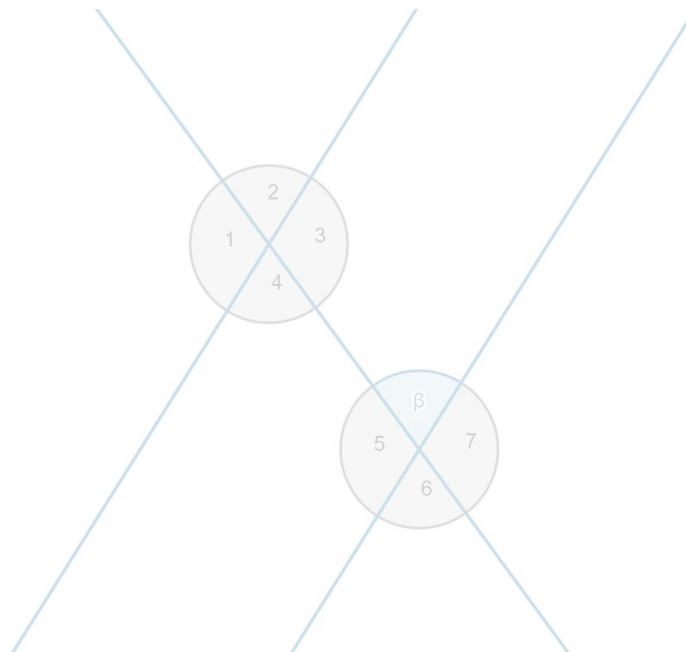
miara kąta 3 = °

miara kąta 4 = °

miara kąta 5 = °

miara kąta 6 = °

miara kąta 7 = °



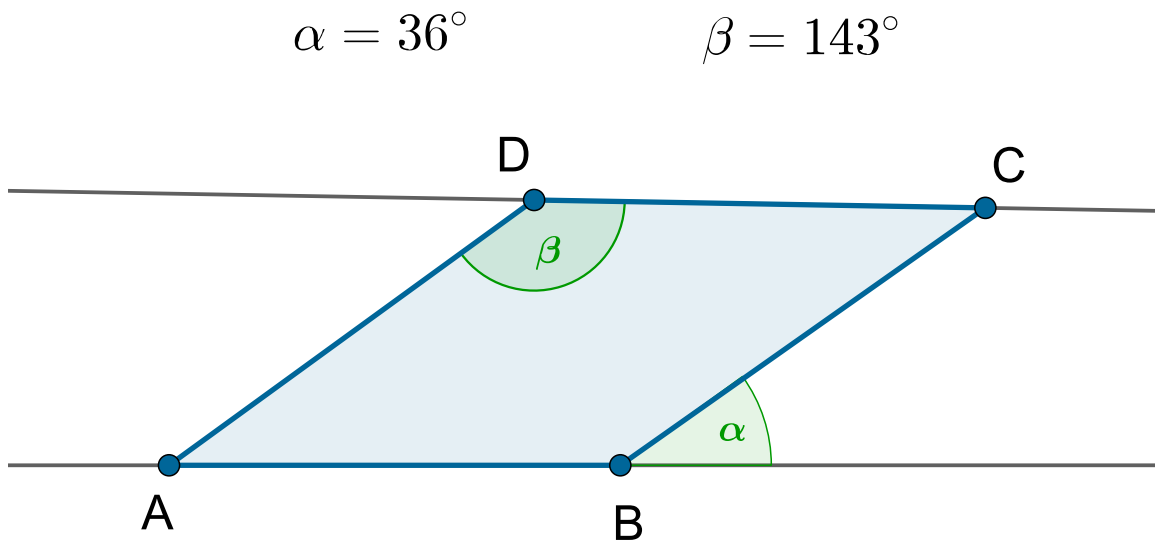
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pgal5hgl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Na rysunku podane są miary kątów α , β . Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Tak. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

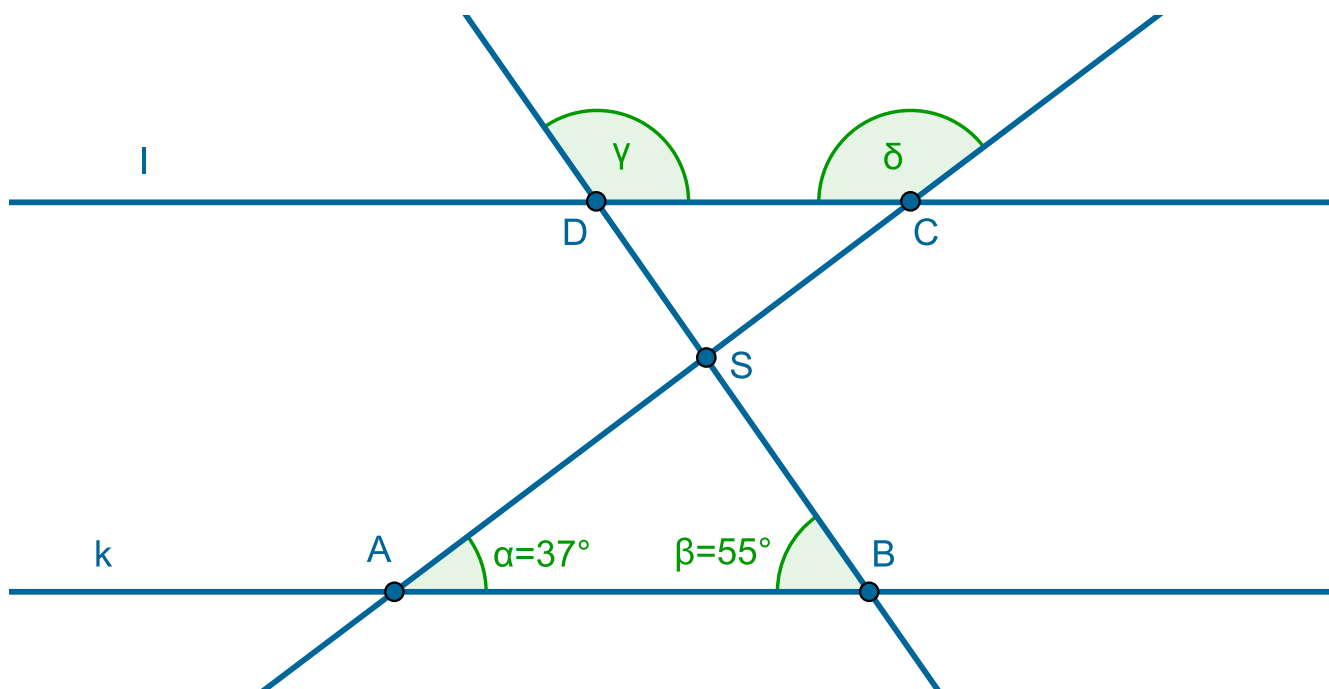
☐ Nie. Czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Proste k i l są równoległe. Miary kątów α , β podano na rysunku. Czy wynika stąd, że $\gamma = 125^\circ$ oraz $\delta = 143^\circ$?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Nie.

☐ Tak.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Poniższe zdania dotyczą kątów wewnętrznych trójkątów. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Miary kątów trójkąta pozostają w stosunku $1 : 2 : 3$. Wtedy najmniejszy kąt ma miarę 20° .

☐

Kąty między jednym z boków trójkąta ostrokątnego i wysokościami opuszczonymi na pozostałe boki mają miary 35° oraz 45° . Kąt leżący naprzeciw tego boku ma miarę 80° .

☐

Jeden z kątów trójkąta ma miarę 50° . Miara kąta między dwusiecznymi pozostałych kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa 115° .

☐

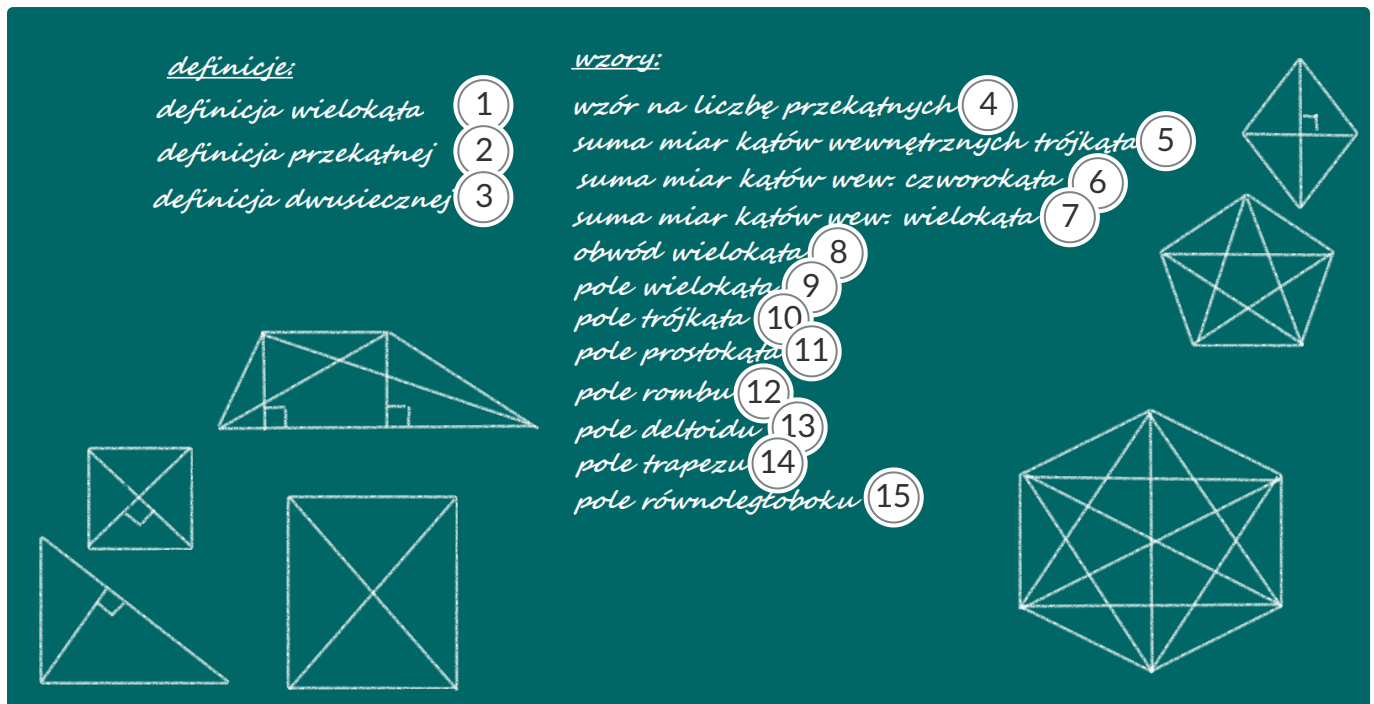
W trójkącie miara jednego kąta jest dwa razy większa od miary drugiego i trzy razy mniejsza od miary trzeciego kąta. Wtedy największy kąt ma miarę 120° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąty w wielokątach

Ile przekątnych ma piętnastokąt? Czy możemy łatwo obliczyć sumę miar jego kątów?

Poniższa infografika zawiera kilka wybranych definicji i wzorów odpowiadających na te pytania. Sprawdź, czy je pamiętasz. Jeśli nie, kliknij w rozwijalne punkty, aby przejść do poszczególnych definicji i wzorów. Przypomnij sobie potrzebne wzory, a następnie wykonaj ćwiczenia w tej części materiału.



1

Wielokąt to figura geometryczna, która jest częścią płaszczyzny ograniczoną pewną łamaną zwyczajną zamkniętą. Sama łamana stanowi brzeg wielokąta. Wierzchołki łamanej to wierzchołki wielokąta, natomiast boki łamanej, która wyznacza ten wielokąt, to boki wielokąta.

Przykłady:

trójkąt, romb, trapez, dziesięciokąt, deltoid, prostokąt

2

Przekątna wielokąta to każdy odcinek, który łączy dwa wierzchołki tego wielokąta i jednocześnie nie jest bokiem figury.

3

Dwusieczna to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca ten kąt na dwa kąty przystające, czyli o takiej samej mierze.

4

$$p = n \cdot \frac{n-3}{2}$$

p - liczba przekątnych,

n - liczba kątów wielokąta

5

$$S = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

gdzie

S - suma kątów wewnętrznych,

$\alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$ - kąty wewnętrzne trójkąta

6

$$S = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ,$$

gdzie

S - suma kątów wewnętrznych,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta < 360^\circ$ - kąty wewnętrzne czworokąta

7

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ,$$

gdzie

S - suma kątów wewnętrznych,

n - liczba kątów wielokąta

8

$$L = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

gdzie

L - obwód,

$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ - długości kolejnych boków n -kąta od pierwszego boku do boku

o numerze n

9

Każdy n -kąt wypukły można podzielić na $(n - 2)$ trójkątów poprzez wykreślenie wszystkich przekątnych.

Zatem suma pól tych trójkątów będzie polem n -kąta.

10

$$P = \frac{ah}{2},$$

gdzie

a - bok, na który opuszczono wysokość,

h - wysokość trójkąta

11

$$P = ab,$$

gdzie

a, b - boki prostokąta,

oczywiście, gdy $a = b$, mamy kwadrat, którego pole wynosi $P = a^2$

12

$$P = ah \text{ oraz } P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

gdzie

a - bok, h - wysokość, d_1, d_2 - przekątne

13

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha \text{ oraz } P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

gdzie

a, b - boki, α - kąt między bokami a i b , d_1, d_2 - przekątne

14

$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2},$$

gdzie

a, b - podstawy, h - wysokość

15

$$P = a \cdot h, P = a \cdot b \cdot \sin \alpha \text{ oraz } P = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \beta}{2},$$

gdzie

a, b - boki, α - kąt między bokami, d_1, d_2 - przekątne, β - kąt ostry między przekątnymi

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ W osiemnastokącie foremnym miara kąta wewnętrznego wynosi 160° .
- ☐ W dziesięciokącie wypukłym suma miar kątów jest równa 1800° .
- ☐ W pewnym wielokącie wypukłym suma miar kątów wynosi 1620° . Liczba boków tego wielokąta jest równa 11.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Które z poniższych zdań dotyczących wielokątów są prawdziwe? Skorzystaj z odpowiednich wzorów. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Pewien wielokąt wypukły ma 35 przekątnych. Liczba boków tego wielokąta jest równa 7.
- ☐ Liczba przekątnych wielokąta wypukłego jest cztery razy większa od liczby jego boków. Wielokątem tym jest jedenastokąt.
- ☐ W siedemnastokącie wypukłym liczba przekątnych jest równa 119.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Korzystając ze znanych Ci własności czworokątów oraz z własności pewnych kątów, zastanów się nad konstrukcjami opisanymi poniżej i oceń, czy są prawdziwe. Zaznacz **prawda** albo **fałsz** przy każdym ze zdań.

1. Różnica miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa 40° .

Wówczas kąt rozwarty tego równoległoboku jest równy 140° .

prawda ☐

fałsz ☐

2. Różnica miar przeciwległych kątów trapezu równoramiennego wynosi 20° . Wówczas miara kąta wewnętrznego przy dłuższej podstawie trapezu jest równa 102° .

prawda ☐

fałsz ☐

3. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie wysokości, które tworzą kąt o mierze 30° . Wtedy miara kąta ostrego tego równoległoboku wynosi 60° .

prawda ☐

fałsz ☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa AB jest dwa razy dłuższa od podstawy CD . Przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB . Pole trapezu jest równe $27\sqrt{3}$. Na podstawie opisu oceń prawdziwość poniższych zdań, zaznaczając **prawda** albo **fałsz**.

1. Ramię trapezu jest dwa razy dłuższe od krótszej podstawy.

prawda ☐

fałsz ☐

2. Długość ramienia trapezu jest równa 6.

prawda ☐

fałsz ☐

3. Przekątna AC dzieli trapez na dwa trójkąty, z których jeden ma pole dwa razy większe od drugiego.

prawda ☐

fałsz ☐

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Które z poniższych zdań dotyczących przekątnych jest prawdziwe? Zaznacz prawidłową odpowiedź.



W pięciokącie foremnym kąt między dwiema przekątnymi poprowadzonymi z tego samego wierzchołka jest równy 36° .



W dowolnym wielokącie foremnym wszystkie przekątne przecinają się w jednym punkcie.



W sześciokącie foremnym o boku długości 3, długość krótszej przekątnej jest równa 6.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Zaznacz poprawne stwierdzenie dotyczące wielokątów.



Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 8. Wtedy obwód trapezu ma długość $20 + 4\sqrt{3}$.



W równoległoboku o obwodzie równym 154, wysokości spełniają warunek $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$. Wtedy krótszy bok ma długość 44.



W deltoidzie przekątne mają długość 10 i 7. Wtedy pole deltoidu wynosi 70.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Dziewięciokąt $ABCDEFGHI$ jest foremny. Zaznacz prawidłowe stwierdzenie dotyczące tego wielokąta.

- ☐ Miara kąta ABC wynosi 150° .
- ☐ Z wierzchołka D można poprowadzić 9 przekątnych.
- ☐ Wielokąt ten ma 27 przekątnych.
- ☐ Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta jest równa 1620° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Jeden z kątów trójkąta ma miarę 72° . Jeden z pozostałych jest 5 razy większy od drugiego. Zaznacz odpowiedź zawierającą miary pozostałych kątów.

- ☐ 28° i 80° .
- ☐ 21° i 105° .
- ☐ 20° i 100° .
- ☐ 18° i 90° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Dwa sąsiednie kąty równoległoboku różnią się o 20° . Wybierz odpowiedź zawierającą miarę kąta ostrego tego równoległoboku.

☐ 40°

☐ 80°

☐ 20°

☐ 60°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów CAB i ABC . Dwusieczne te przecinają się w punkcie P . Jaki jest kąt APB ? Zaznacz prawidłowe stwierdzenie.

☐ Jest mniejszy lub równy 60° .

☐ Jest ostry, ale większy od 60° .

☐ Jest rozwarty.

☐ Jest prosty.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Obwód sześciokąta foremnego jest równy 36. Zaznacz odpowiedź zawierającą wartość pola tego sześciokąta.

☐ $54\sqrt{3}$

☐ $9\sqrt{3}$

☐ $18\sqrt{3}$

☐ $27\sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Stosunek długości boków równoległoboku jest równy 3 : 5, a krótsza z jego wysokości ma długość 6. Zaznacz odpowiedź zawierającą długość drugiej wysokości tego równoległoboku.

☐ 15

☐ 10

☐ 3,6

☐ 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB . Ramię AD jest prostopadłe do podstaw, a długość boku BC jest dwa razy większa od różnicy długości podstaw trapezu. Jaka jest miara kąta ABC ? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 60°

☐ 30°

☐ 75°

☐ 45°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Przekątna BD rombu $ABCD$ ma taką samą długość jak bok rombu. Wybierz prawidłowe stwierdzenie dotyczące tego wielokąta.

☐ Obwód rombu jest równy $2|AC|$.

☐ $|AC| = 2|BD|$

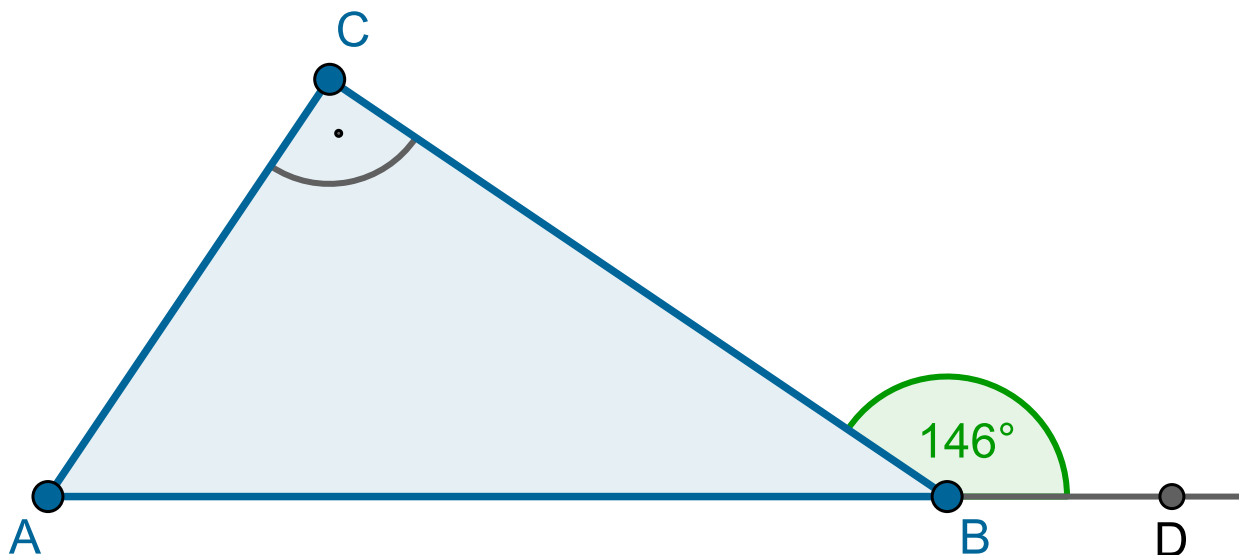
☐ $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$

☐ Pole rombu jest równe $|BD|^2$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC . Jaka będzie miara kąta CAB ?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $|\sphericalangle CAB| = 146^\circ$

☐ $|\sphericalangle CAB| = 68^\circ$

☐ $|\sphericalangle CAB| = 34^\circ$

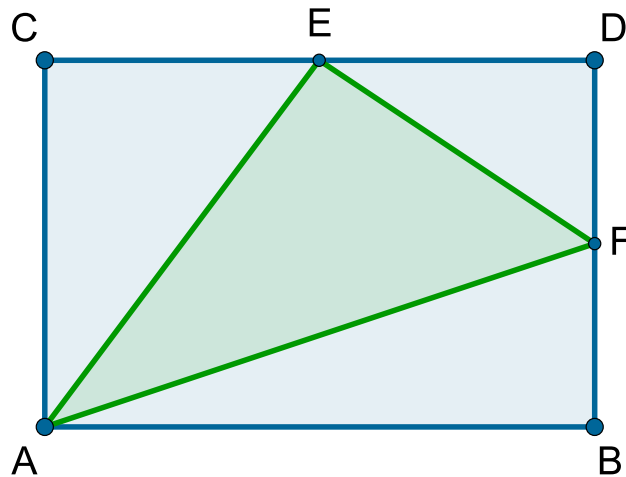
☐ $|\sphericalangle CAB| = 56^\circ$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Punkty E i F są środkami boków prostokąta $ABDC$. Jaką część pola prostokąta jest pole trójkąta AEE ?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\frac{7}{8}$

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{3}{8}$

☐ $\frac{5}{8}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Ile boków ma wielokąt foremny, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 160° ? Odpowiedz na pytanie. Uzupełnij lukę, wpisując odpowiednią liczbę.

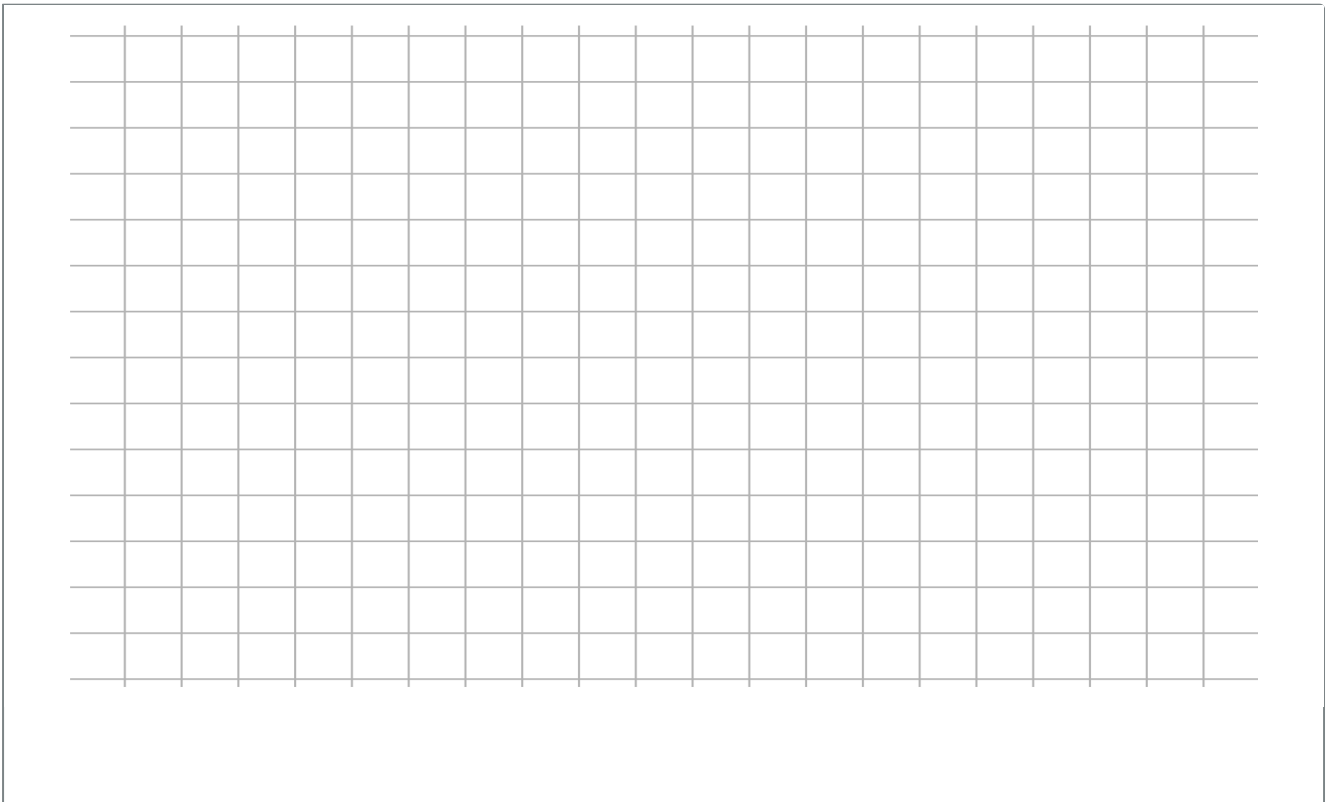
Odpowiedź: Taki wielokąt ma boków.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $|AD| = |DC| = 3$.

- Czy wysokość tego trapezu może być równa 4? Odpowiedź uzasadnij.
- Uzasadnij, że przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

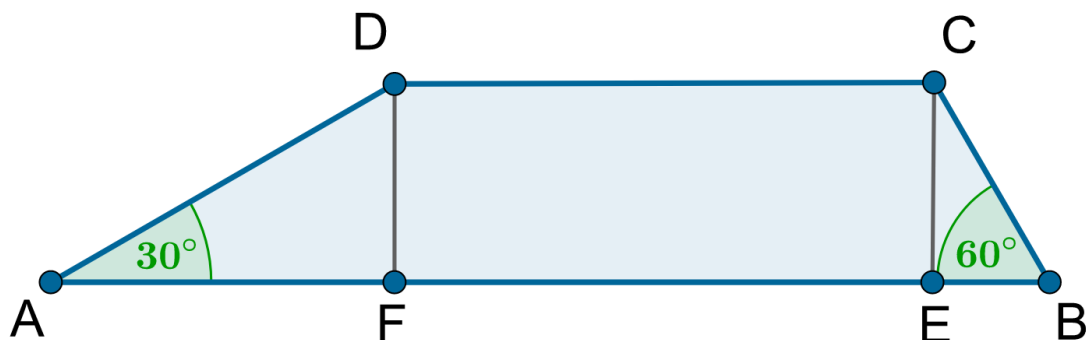
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Podstawy trapezu mają długości 6 i 10. Miary kątów przy dłuższej podstawie są równe 30° i 60° .

Oblicz pole trapezu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $9\sqrt{3}$

☐ $8\sqrt{3}$

☐ $5\sqrt{2}$

☐ $4\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25



W trapezie $ABCD$ poprowadzono krótszą przekątną, która podzieliła go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Oblicz miary kątów tego trapezu. Rozważ wszystkie przypadki. Uzupełnij luki. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę możliwych odpowiedzi. W każdym z rozważanych przypadków uzupełnij luki liczbami w kolejności rosnącej.

• , , ,

lub

• , , ,

120°

30°

60°

90°

50°

60°

120°

90°

80°

45°

160°

150°

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26

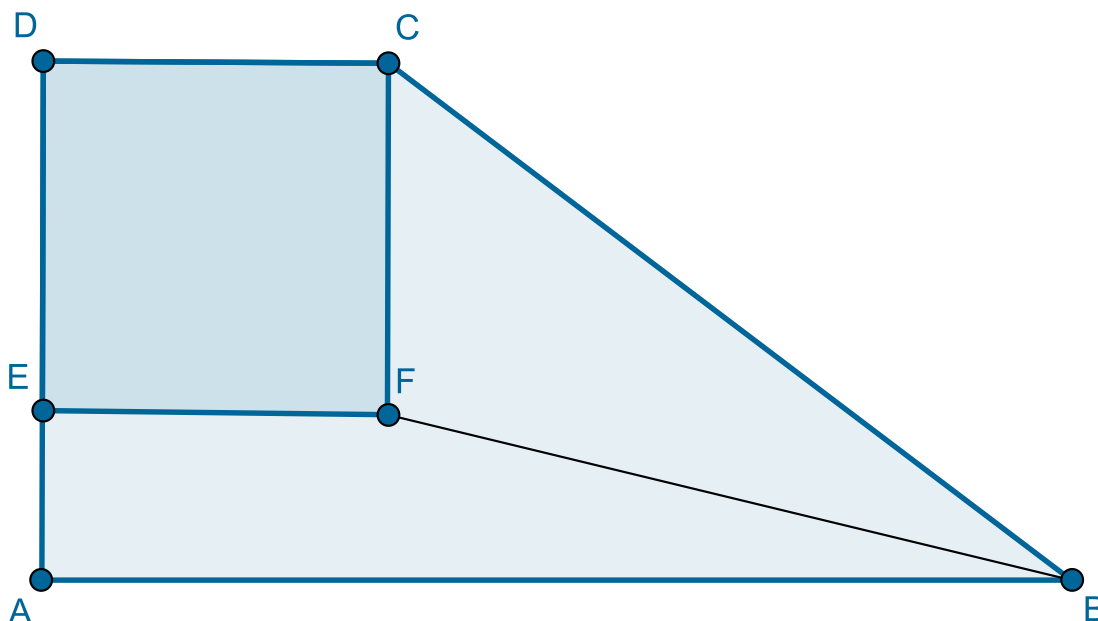


Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45° , a jego pole jest równe $72\sqrt{2}$. Oblicz długość boku tego rombu. Uzupełnij puste pole, wpisując liczbę.

Odpowiedź: Długość boku tego rombu jest równa .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 27



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trapez prostokątny $ABCD$ podzielono na trzy figury o równych polach, tak jak na rysunku. Długość boku kwadratu $CDEF$ jest równa 6. Oblicz obwód i pole trapezu $ABCD$. Uzupełnij puste miejsca, wpisując liczby.

Odpowiedź: Pole tego trapezu wynosi a obwód jest równy

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 28



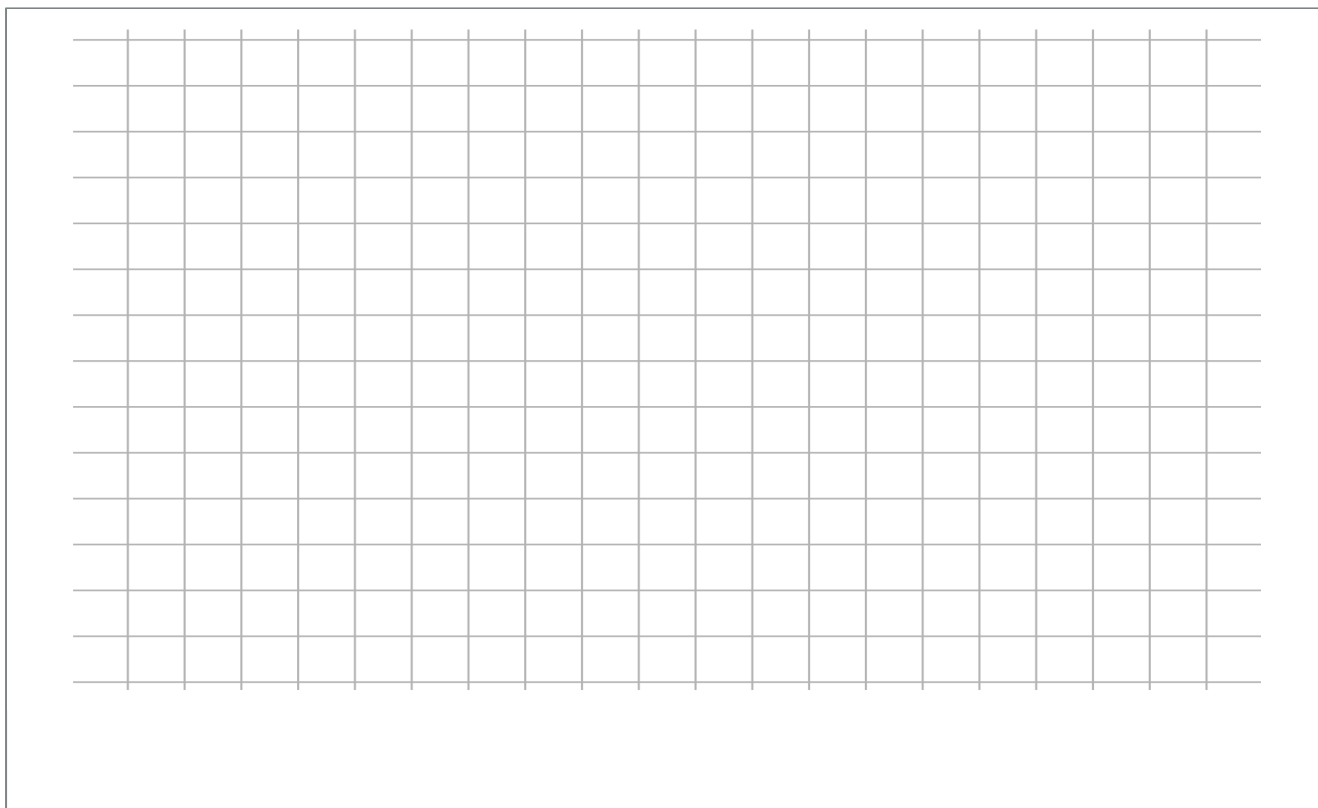
Jaka jest miara kąta pomiędzy dwiema przekątnymi różnej długości poprowadzonymi z tego samego wierzchołka sześciokąta foremnego? Uzupełnij puste pole, wpisując liczbę.

Odpowiedź: Miara kąta wynosi °.

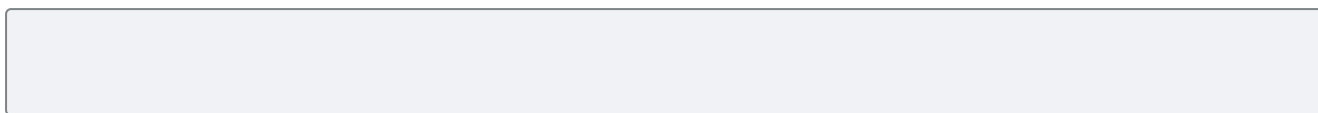
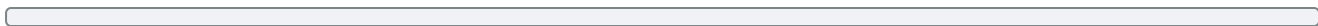
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.