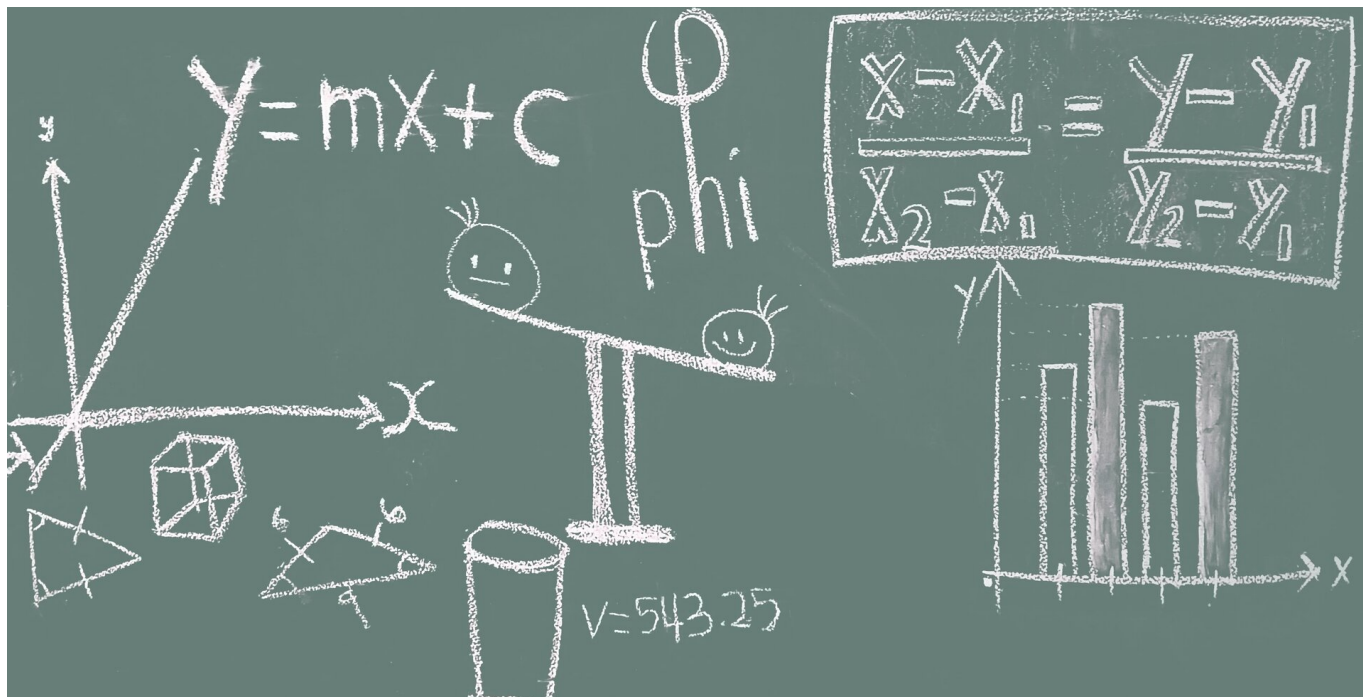




Zbiór liczb wymiernych. Działania na liczbach wymiernych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zbiór liczb wymiernych. Działania na liczbach wymiernych

Źródło: Rebecca Orlov, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W życiu codziennym bardzo często spotykamy się z częściami pewnych całości. Prosimy sprzedawcę o pół kilograma sera, uczniowie cieszą się z 50-procentowej ulgi na bilety komunikacji miejskiej, a jeden kawałek pizzy to zwykle około jednej szóstej całości. Ułamki funkcjonują też w związkach frazeologicznych takich jak “wyglądać jak trzy ćwierci do śmierci”.

Z matematycznego punktu widzenia zbiór ułamków zwykłych to rozszerzenie zbioru liczb całkowitych o wszystkie możliwe ilorazy liczb całkowitych. W tej lekcji omówimy szczegółowo liczby wymierne, bo o nich mowa.

Twoje cele

- Rozpoznasz liczbę wymierną.
- Wykonasz działania na liczbach wymiernych.
- Wyznaczysz liczbę odwrotną i liczbę przeciwną do danej.

Przeczytaj

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę, którą można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi oraz q jest różne od zera.

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy symbolem $\mathbb{Q}$ pochodzącym od pierwszej litery angielskiego słowa *quotient* oznaczającego *iloraz*.

Każda **liczba całkowita** jest liczbą wymierną, bo można ją zapisać jako iloraz jej samej przez 1, ale oczywiście istnieje nieskończenie wiele możliwości. Wystarczy wykonać rozszerzenie ułamka, np. $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \dots$, $-5 = \frac{-5}{1} = \frac{-10}{2} = \frac{-15}{3} = \dots$

Każda liczba o skończonym rozwinięciu dziesiętnym jest **liczbą wymierną**.

Ponadto prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie: Liczba o okresowym rozwinięciu dziesiętnym

Każda liczba o okresowym rozwinięciu dziesiętnym jest liczbą wymierną.

Dowód twierdzenia wymaga użycia pojęcia granicy, więc go pominiemy.

Przykład 1

Aby zamienić ułamek zwykły na formę dziesiętną, wystarczy rozszerzyć ułamek do mianownika, który jest naturalną potęgą liczby 10.

Można też wykonać dzielenie licznika przez mianownik.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

Przykład 2

Przedstawimy podane liczby w postaci ułamków zwykłych:

a) 1,2345

$$1,2345 = \frac{12345}{10000} = \frac{2469}{2000}$$

b) 1,(3)

Oznaczmy rozważaną liczbę przez x , czyli $x = 1,33333\dots$

Wówczas $10x = 13,33333\dots$

Jeśli od lewej strony drugiej równości odejmiemy lewą stronę pierwszej równości oraz od prawej strony drugiej równości odejmiemy prawą stronę pierwszej równości, to otrzymamy:

$$10x - x = 13,33333\ldots - 1,33333\ldots$$

$$9x = 12$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Zatem

$$1,(3) = \frac{4}{3}.$$

Można też udowodnić twierdzenie:

Twierdzenie: Liczba wymierna

Liczba jest wymierna dokładnie wtedy, gdy jej rozwinięcie dziesiętne jest skończone lub okresowe.

Dowód pomijamy.

Przykład 3

Rozważmy liczbę $0,123456789101112131415161718192021222324252627282930\ldots$

Kolejne cyfry jej rozwinięcia powstają przez “doklejanie” kolejnych liczb naturalnych. Oczywiście rozwinięcie to nie jest skończone (bo liczb naturalnych jest nieskończenie wiele) ani okresowe. Zatem liczba ta jest niewymierna.

Zauważmy, że suma, różnica, iloczyn i iloraz (poza dzieleniem przez zero) liczb wymiernych są liczbami wymiernymi. Spostrzeżenie wydaje się oczywiste, jeśli pomyślimy o dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu ułamków zwykłych – wynikiem w każdym z tych przypadków jest również ułamek zwykły. Rzeczywiście dla liczb całkowitych p, q, r, s , gdzie q i s nie są równe zeru, mamy:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}, \text{ dla } r \neq 0$$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-qr}{qs}$$

Ponieważ iloczyn, suma i różnica liczb całkowitych są liczbami całkowitymi, więc otrzymane liczby są ilorazami liczb całkowitych, zatem liczbami wymiernymi.

Przypomnijmy jeszcze najważniejsze własności działań na liczbach wymiernych: dodawanie i mnożenie liczb wymiernych jest łączne i przemienne, ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Zero jest elementem neutralnym dodawania, zaś jedynka – elementem neutralnym mnożenia.

Każda **liczba wymierna** ma **liczbę przeciwną** (suma takich liczb jest równa zero), a jeśli nie jest zerem, to również **liczbę odwrotną** (iloczyn takich liczb jest równy 1).

Przykład 4

Podamy liczby odwrotne i przeciwne do podanych.

Liczba wymierna	Liczba przeciwna	Liczba odwrotna
x	$-x$	$\frac{1}{x}$
2	-2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3
$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
-2, 3	2, 3	$-\frac{1}{2,3} = -\frac{1}{\frac{23}{10}} = -\frac{10}{23}$

Przykład 5

Obliczymy sumę

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{47 \cdot 48} + \frac{1}{48 \cdot 49} + \frac{1}{49 \cdot 50}$$

Zauważmy, że $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3 \cdot 4} - \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{4 \cdot 5} - \frac{4}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 5}$$

...

$$\frac{1}{47} - \frac{1}{48} = \frac{48}{47 \cdot 48} - \frac{47}{47 \cdot 48} = \frac{1}{47 \cdot 48}$$

$$\frac{1}{48} - \frac{1}{49} = \frac{49}{48 \cdot 49} - \frac{48}{48 \cdot 49} = \frac{1}{48 \cdot 49}$$

$$\frac{1}{49} - \frac{1}{50} = \frac{50}{49 \cdot 50} - \frac{49}{49 \cdot 50} = \frac{1}{49 \cdot 50}$$

Ogólnie

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n \cdot (n+1)} - \frac{n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Zatem prawdziwa jest równość:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{47 \cdot 48} + \frac{1}{48 \cdot 49} + \frac{1}{49 \cdot 50} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{47} - \frac{1}{48} + \frac{1}{48} - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = \\ &= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50} \end{aligned}$$

Przykład 6

Obliczmy

$$\frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{51 \cdot 53} + \frac{1}{53 \cdot 55} + \frac{1}{55 \cdot 57}$$

Zuważmy, że $\frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{11}{9 \cdot 11} - \frac{9}{9 \cdot 11} = \frac{2}{9 \cdot 11}$, zatem $\frac{1}{9 \cdot 11} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right)$

$$\frac{1}{11} - \frac{1}{13} = \frac{13}{11 \cdot 13} - \frac{11}{11 \cdot 13} = \frac{2}{11 \cdot 13}, \text{ zatem } \frac{1}{11 \cdot 13} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right)$$

$$\frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{15}{13 \cdot 15} - \frac{13}{13 \cdot 15} = \frac{2}{13 \cdot 15}, \text{ zatem } \frac{1}{13 \cdot 15} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right)$$

...

$$\frac{1}{51} - \frac{1}{53} = \frac{53}{51 \cdot 53} - \frac{51}{51 \cdot 53} = \frac{2}{51 \cdot 53}, \text{ zatem } \frac{1}{51 \cdot 53} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{51} - \frac{1}{53} \right)$$

$$\frac{1}{53} - \frac{1}{55} = \frac{55}{53 \cdot 55} - \frac{53}{53 \cdot 55} = \frac{2}{53 \cdot 55}, \text{ zatem } \frac{1}{53 \cdot 55} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{53} - \frac{1}{55} \right)$$

$$\frac{1}{55} - \frac{1}{57} = \frac{57}{55 \cdot 57} - \frac{55}{55 \cdot 57} = \frac{2}{55 \cdot 57}, \text{ zatem } \frac{1}{55 \cdot 57} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{55} - \frac{1}{57} \right)$$

Wobec powyższego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{51 \cdot 53} + \frac{1}{53 \cdot 55} + \frac{1}{55 \cdot 57} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{51} - \frac{1}{53} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{53} - \frac{1}{55} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{55} - \frac{1}{57} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{51} - \frac{1}{53} + \frac{1}{53} - \frac{1}{55} + \frac{1}{55} - \frac{1}{57} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{57} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{19}{171} - \frac{3}{171} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{171} = \frac{8}{171} \end{aligned}$$

Słownik

liczba wymierna

iloraz dwóch liczb całkowitych, z których dzielnik jest różny od zera

liczba całkowita

liczba naturalna lub liczba przeciwna do naturalnej

liczba przeciwna

mówimy, że b jest liczbą przeciwną do liczby a , jeśli $a + b = 0$

liczba odwrotna

mówimy, że b jest liczbą odwrotną do liczby $a \neq 0$, jeśli $a \cdot b = 1$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie rozwiąż test.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D47zMC8Tg>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego podstawowych pojęć algebraicznych.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz i przyporządkuj rozwinięcia dziesiętne do podanych liczb wymiernych.

$$\frac{5}{8}$$

0,625

$$\frac{33}{40}$$

0,825

$$\frac{17}{20}$$

0,85

$$\frac{11}{16}$$

0,6875

Ćwiczenie 2



Przedstaw ułamek $0,1(2)$ w postaci ułamka zwykłego.

Ćwiczenie 3



Podane rozwinięcia dziesiętne przedstaw w postaci ułamka zwykłego.
Przeciągnij i upuść.

Rozwinięcie dziesiętne liczby 0, (6) można przedstawić w postaci .

Rozwinięcie dziesiętne liczby 0, (7) można przedstawić w postaci .

Rozwinięcie dziesiętne liczby 0, (3) można przedstawić w postaci .

Rozwinięcie dziesiętne liczby 0, (9) można przedstawić w postaci .

Ćwiczenie 4



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Liczbą odwrotną do liczby 0,4 jest:

$2,5$ ☐

$-0,4$ ☐

$\frac{5}{2}$ ☐

Liczbą przeciwną do liczby $\frac{2}{3}$ jest:

$\frac{3}{2}$ ☐

$-\frac{2}{3}$ ☐

$-0,(6)$ ☐

Wskaż zdania prawdziwe:

Liczbą przeciwną do zera jest zero. ☐

Liczbą odwrotną do zera jest zero. ☐

Nie istnieje liczba przeciwna do zera. ☐

Liczbą przeciwną do liczby (-2) jest:

$-(-2)$ ☐

$-(-(-2))$ ☐

$-(-(-(-2)))$ ☐

Liczbą odwrotną do liczby $\frac{1}{2}$ jest:

$\frac{1}{\frac{1}{2}}$ ☐

$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}$ ☐

$\frac{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2}}$ ☐

Ćwiczenie 5



Oblicz $\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{61 \cdot 64} + \frac{1}{64 \cdot 67} + \frac{1}{67 \cdot 70}$

Ćwiczenie 6



Oblicz podane sumy. Połącz w pary.

$$\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{79 \cdot 80}$$

$$\frac{7}{80}$$

$$\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{59 \cdot 60}$$

$$\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{20 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 22} + \frac{1}{22 \cdot 23} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$$

$$\frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{100 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 103} + \dots + \frac{1}{299 \cdot 300}$$

$$\frac{1}{150}$$

$$\frac{1}{50 \cdot 51} + \frac{1}{51 \cdot 52} + \frac{1}{52 \cdot 53} + \dots + \frac{1}{199 \cdot 200}$$

$$\frac{3}{80}$$

$$\frac{1}{20 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 22} + \frac{1}{22 \cdot 23} + \dots + \frac{1}{79 \cdot 80}$$

$$\frac{1}{45}$$

$$\frac{1}{30 \cdot 31} + \frac{1}{31 \cdot 32} + \frac{1}{32 \cdot 33} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 90}$$

$$\frac{3}{200}$$

Ćwiczenie 7



Zapoznaj się z poniższą definicją pewnego pojęcia z algebry abstrakcyjnej.

Ciało to rodzaj struktury algebraicznej. Struktura ta zbudowana jest ze zbioru A , w którym wykonalne są działania dodawania i mnożenia. Ponadto spełnione są następujące warunki:

1. Zbiór A zawiera element neutralny mnożenia (zwany jedynką).
2. Zbiór A zawiera element neutralny dodawania (zwany zerem).
3. Dodawanie jest łączne.
4. Dodawanie jest przemienne.
5. Każdy element zbioru A posiada element przeciwny należący do A .
6. Mnożenie jest łączne.
7. Mnożenie jest przemienne.
8. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.
9. Każdy niezerowy element zbioru A posiada element odwrotny należący do A .

Sprawdź, które z powyższych warunków są spełnione w zbiorach liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych.

	Zbiór liczb naturalnych	Zbiór liczb całkowitych	Zbiór liczb wymiernych
Zbiór zawiera element neutralny mnożenia	tak	tak	tak
Zbiór zawiera element neutralny dodawania	tak	tak	tak
Dodawanie jest łączne	tak	tak	tak
Dodawanie jest przemienne	tak	tak	tak
Mnożenie jest łączne	tak	tak	tak
Mnożenie jest przemienne	tak	tak	tak

	Zbiór liczb naturalnych	Zbiór liczb całkowitych	Zbiór liczb wymiernych
Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania	tak	tak	tak
Każdy element zbioru posiada element przeciwny	nie	tak	tak
Każdy niezerowy element zbioru posiada element odwrotny	nie	nie	tak

Czy któryś z podanych wyżej zbiorów można nazwać ciałem?
Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Zbiór liczb wymiernych.

☐ Zbiór liczb naturalnych.

☐ Zbiór liczb całkowitych.

Ćwiczenie 8



Każdą liczbę rzeczywistą można zapisać w postaci tzw. **ułamka łańcuchowego**, czyli w postaci

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

gdzie:

a_0 – jest liczbą całkowitą,

$a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k$ – są liczbami naturalnymi większymi od zera.

Przy czym liczby wymierne można zapisać jako ułamki łańcuchowe skończone.

Jakie liczby wymierne przedstawiają podane niżej ułamki łańcuchowe.
Przeciągnij i upuść.

Ułamek łańcuchowy	Ułamek zwykły
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$	
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$	
$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$	
$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$	
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$	
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$	

$\frac{11}{7}$

$\frac{7}{5}$

$\frac{8}{5}$

$\frac{7}{4}$

$\frac{5}{3}$

$\frac{10}{7}$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zbiór liczb wymiernych. Działania na liczbach wymiernych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

- Rozpoznasz liczbę wymierną.
- Wykonasz działania na liczbach wymiernych.
- Wyznaczysz liczbę odwrotną i liczbę przeciwną do danej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- mapa myśli;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Zbiór liczb wymiernych. Działania na liczbach wymiernych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązywaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji

„Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- E-podręcznik z matematyki na stronie: www.epodreczniki.pl

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zbiór liczb wymiernych. Działania na liczbach wymiernych”.