



Związek logarytmowania z potęgowaniem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Związek logarytmowania z potęgowaniem

Źródło: [Dimitris Vetsikas](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Odkrycie logarytmów z wielką radością przywitali astronomowie i żeglarze. Tablice logarytmiczne wzbudziły prawdziwy zachwyt siedemnastowiecznych nawigatorów i księgowych, którzy posługiwali się coraz większymi liczbami.

Najpierw kalkulatory, a obecnie komputery usunęły w cień logarytmy, jako instrument obliczeniowy. Jednak matematycy nadal uważają je za istotny element edukacji.



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale rozszerzymy wiadomości na temat logarytmów, a w szczególności ich związku z potęgowaniem.

Twoje cele

- Obliczysz wartości dokładne logarytmów, korzystając z definicji.
- Wykorzystasz podstawowe własności logarytmów w przekształcaniu wyrażeń arytmetycznych.
- Zapiszesz potęgę za pomocą logarytmu.
- Zapiszesz logarytm za pomocą potęgi.

Przeczytaj

W tym materiale bliżej przyjrzymy się związkowi logarytmowania z potęgowaniem.

Na początek przypomnijmy definicję logarytmu.

Definicja: Logarytm

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a ($a > 0$, $a \neq 1$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Każda liczba dodatnia ma dokładnie jeden logarytm przy danej podstawie dodatniej i różnej od 1. Liczby ujemne i zero, nie mają logarytmów, gdyż a^x dla żadnej wartości x nie jest ani liczbą ujemną, ani zerem.

Przykład 1

Obliczymy wartości kilku logarytmów o tej samej podstawie, korzystając bezpośrednio z definicji logarytmu.

$$\log_2 32 = 5, \text{ gdyż } 2^5 = 32$$

$$\log_2 1 = 0, \text{ gdyż } 2^0 = 1$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ gdyż } 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Wniosek:

Logarytm liczby dodatniej może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem.

Przykład 2

Przyjrzyjmy się wartościom logarytmów kolejnych naturalnych potęg liczby a przy podstawie a ($a > 0$, $a \neq 1$).

$$\log_a a^1 = \log_a a = 1, \text{ bo } a^1 = a$$

$$\log_a a^2 = 2, \text{ bo } a^2 = a^2$$

$$\log_a a^3 = 3, \text{ bo } a^3 = a^3$$

$$\log_a a^4 = 4, \text{ bo } a^4 = a^4$$

$$\log_a a^5 = 5, \text{ bo } a^5 = a^5$$

Na podstawie powyższych przykładów, możemy zauważyć, że logarytm przy podstawie a potęgi naturalnej liczby a jest równy wykładnikowi tej potęgi.

Własność tę można uogólnić na potęgę o dowolnym wykładniku.

Wniosek:

Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$, $y \in \mathbb{R}$ to:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^y = y$$

Przykład 3

Korzystając z powyższego wniosku obliczymy wartości logarytmów.

$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$$

$$\log_{49} 7 = \log_{49} \sqrt{49} = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 \frac{1}{9} = \log_9 9^{-1} = -1$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

Bezpośrednio z definicji [logarytmu](#) wynika jeszcze jedna ważna własność, pokazująca kolejny związek logarytmowania z potęgowaniem.

$$a^{\log_a b} = b, \text{ gdy } a > 0, a \neq 1 \text{ i } b > 0$$

Zależność ta jest bardzo pomocna w zapisywaniu w prostszej postaci wyrażeń zawierających logarytmy.

Przykład 4

Zapiszemy każdą z liczb bez użycia logarytmu.

$$2^{\log_2 7} = 7$$

$$3^{\log_3 19} = 19$$

$$-5^{\log_5 6} = -6$$

$$(0,25)^{\log_{0,25} 5} = 5$$

Przykład 5

Obliczymy wartość wyrażenia $W = 49^{1-\log_7 2} + 2 \cdot 5^{-\log_5 8}$.

Rozwiązanie:

Zapiszemy najpierw w prostszej postaci każdy ze składników, korzystając z własności działań na potęgach.

$$49^{1-\log_7 2} = 49 : 49^{\log_7 2} = 49 : 7^{2 \cdot \log_7 2} = 49 : (7^{\log_7 2})^2 = 49 : 2^2 = \frac{49}{4}$$

$$2 \cdot 5^{-\log_5 8} = 2 \cdot (5^{\log_5 8})^{-1} = 2 \cdot 8^{-1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Możemy teraz obliczyć wartość wyrażenia W .

$$W = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{50}{4} = 12\frac{1}{2}$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia W jest równa $12\frac{1}{2}$.

Przykład 6

Wykażemy, że każda z liczb $\log_8 4096^{0,25}$, $\log_{\frac{4}{81}} \sqrt{0, (2)}$, $3^{0,5 \cdot \log_3 36}$ jest wymierna.

$$\log_8 4096^{0,25} = \log_8 64^{2 \cdot 0,25} = \log_8 64^{0,5} = \log_8 8 = 1 = \frac{1}{1}$$

$$\log_{\frac{4}{81}} \sqrt{0, (2)} = \log_{\frac{4}{81}} \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{4}{81}} \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$3^{0,5 \cdot \log_3 36} = 3^{\log_3 \sqrt{36}} = 3^{\log_3 6} = 6 = \frac{6}{1}$$

Każdą z rozpatrywanych liczb zapisaliśmy za pomocą ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p, q to liczby całkowite. Oznacza to, że każda z rozpatrywanych liczb jest liczbą wymierną.

Słownik

logarytm

liczby dodatniej b przy podstawie a ($a > 0, a \neq 1$) to wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D101I2aIN>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący związku logarytmowania z potęgowaniem.

Polecenie 2

Wykaż, że równanie $\log_{x+2} 1 = 2$ nie ma rozwiązania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż wyrażenie, które jest określone dla każdej liczby rzeczywistej x .

☐ $\log_9(x^2 + 9)$

☐ $\log_9(x^2 - 9)$

☐ $\log_9(x - 9)$

☐ $\log_9(x + 9)$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczba $8^{\log_3 3}$ jest równa:

☐ 8

☐ 27

☐ 3

☐ 2

Ćwiczenie 3



Uporządkuj liczby od największej do najmniejszej.

$$\log_5 5^3$$



$$\log_4 0,25$$



$$\log_2 \frac{1}{16}$$



$$\log_3 81$$



Ćwiczenie 4



Wiadomo, że $a = \log_{10} 0,1$, $b = \log_4 64$, $c = \log_5 \sqrt{5}$.
Wskaż każdą równość prawdziwą.

☐ $b - 2c = a$

☐ $a + b = 4c$

☐ $a + 4 = b$

☐ $a + c = b$

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Liczba 9 razy mniejsza od liczby $\log_5 125$ jest równa $\log_5 \frac{1}{125}$.

☐ Liczba $2 \cdot \log_3 27$ jest liczbą całkowitą.

☐ Liczba $\log_4 2 + \log_2 4$ jest większa od 2.

☐ Liczby $\log_5 25$ i $\log_{25} 5$ są równe.

Ćwiczenie 6



Połącz w pary równanie i jego rozwiązanie.

$$\log_2(x - 1) = 3$$

$$x = 9$$

$$\log_3(x - 1) = 2$$

$$x = 7$$

$$\log_3(x - 2) = 2$$

$$x = 10$$

$$\log_2(x + 1) = 3$$

$$x = 11$$

Ćwiczenie 7



Uzupełnij, przeciągając odpowiednie liczby.

$$\log_x 2^6 = 2 \text{ to } x = \boxed{}$$

$$\log_x 10^{-8} = 4 \text{ to } x = \boxed{}$$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \text{ to } x = \boxed{}$$

$$\log_4 2^4 = x \text{ to } x = \boxed{}$$

0,5

2

0,01

8

Ćwiczenie 8



Wiedząc, że $\log_2 5 = t$, zapisz wyrażenie $W = \log_2 125 - \log_2 \sqrt{5} \cdot \log_2 \frac{1}{5}$ bez użycia logarytmów.

Ćwiczenie 9



Czy prawdziwa jest równość $\log_3 9 = 2$?

☐ Nie

☐ Tak

Ćwiczenie 10



Wskaż równanie, które przy odpowiednich założeniach jest równoważne równaniu $\log_x y = z$

☐ $x^y = z$

☐ $z^x = y$

☐ $y^x = z$

☐ $x^z = y$

Ćwiczenie 11



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeśli $\log_2 x = 3$, to

☐ $x = 4$

☐ $x = 9$

☐ $x = 6$

☐ $x = 8$

Ćwiczenie 12



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeśli $\log_x 64 = 2$, to

☐ $x = 32$

☐ $x = 16$

☐ $x = 8$

☐ $x = 4$

Ćwiczenie 13



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeśli $\log_3 27 = x$, to

☐ $x = 4$

☐ $x = 3$

☐ $x = 2$

☐ $x = 9$

Ćwiczenie 14



Wskaż wszystkie prawdziwe równoważności.

☐ $\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 32$

☐ $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$

☐ $\log_3 a = 4 \Leftrightarrow 3^4 = a$

☐ $\log_3 8 = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

Ćwiczenie 15



Połącz w pary równości równoważne.

$\log_r t = s$

$s^r = t$

$\log_t r = s$

$t^r = s$

$\log_s t = r$

$r^s = t$

$\log_t s = r$

$t^s = r$

Ćwiczenie 16



Przenieś podane logarytmy do obszarów odpowiadających ich wartości.

0

$\log_2 4$

$\log_2 8$

$\log_4 16$

$\log_3 9$

$\log_2 1$

$\log_3 1$

$\log_2 16$

$\log_3 27$

2

3

4

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Związek logarytmowania z potęgowaniem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartości dokładne logarytmów, korzystając z definicji
- wykorzystuje podstawowe własności logarytmów w przekształcaniu wyrażeń arytmetycznych
- zapisuje potęgę za pomocą logarytmu
- zapisuje logarytm za pomocą potęgi
- ustala i realizuje strategię najszybszego rozwiązania problemu arytmetycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza w szklance wody
- pytajnik

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą „pytajnika” powtarzają wiadomości na temat logarytmów – uczniowie kolejno zadają pytania wybranym koleżankom bądź kolegom tak, aby uzyskać jak najwięcej wiadomości na temat logarytmów.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach metodą „burza w szklance wody” – zaczątkiem burzy jest pytanie nauczyciela – co mają wspólnego logarytmy z potęgami. Uczniowie najpierw korzystając z definicji logarytmu próbują odpowiedzieć na to pytanie. Następnie analizują przykłady podane w sekcji „Przeczytaj” i „Animacji „.
2. Grupy dzielą się wnioskami i wspólnie zapisują poznane wzory.
3. Następnie uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 3.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 4 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Definicja logarytmu. Własności logarytmu](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać przy okazji wprowadzania tematyki dotyczącej funkcji logarytmicznej.