

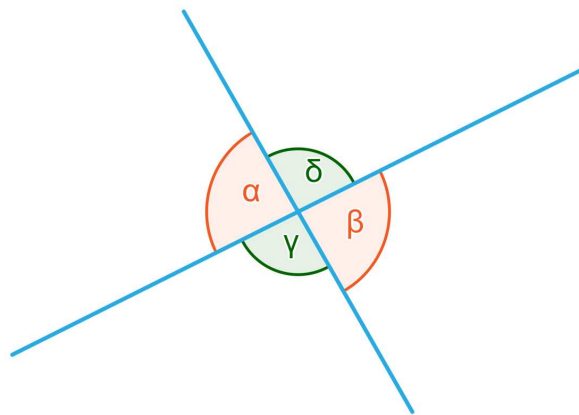


## Kąty przyległe i wierzchołkowe

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

## Kąty przyległe i wierzchołkowe

Źródło: [Joshua Hoehne on Unsplash](#), domena publiczna.



Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty. Podobnie przekątne w czworokącie wypukłym przecinają się i wyznaczają cztery kąty. Na powyższych rysunkach widać dwie przecinające się proste oraz przekątne w prostokącie, równoległoboku i trapezie. Poznasz zależności między tymi czterema kątami.

Twoje cele

- Rozpoznaś kąty przyległe i wierzchołkowe oraz zależność między miarami tych kątów.
- Wykorzystasz własności kątów przyległych i wierzchołkowych w zadaniach i zastosowaniach praktycznych.
- Sprawdzisz czy trzy punkty leżą na jednej prostej.
- Wyznaczysz miary kątów między przekątnymi w czworokącie wypukłym.
- Zaprogramujesz rysowanie trójkąta równobocznego lub dowolnego wielokąta foremnego.

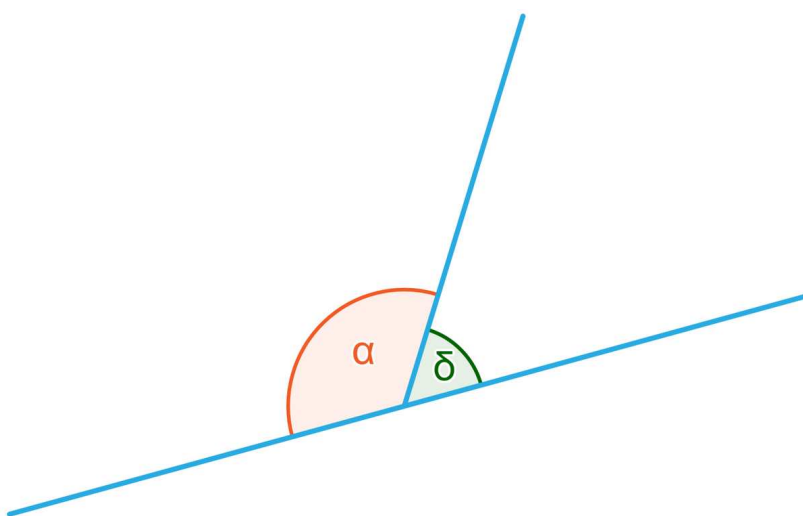
# Przeczytaj

---

## Definicja: kąty przyległe

Dwa kąty wypukłe, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona tworzą prostą, nazywamy **kątami przyległymi**.

Na rysunku [kąty](#)  $\alpha$  i  $\delta$  są kątami przyległymi.



Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery pary kątów przyległych.

Cztery kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  przedstawione na wcześniejszych rysunkach tworzą cztery pary kątów przyległych:  $(\alpha, \gamma)$ ,  $(\gamma, \beta)$ ,  $(\beta, \delta)$ ,  $(\delta, \alpha)$ .

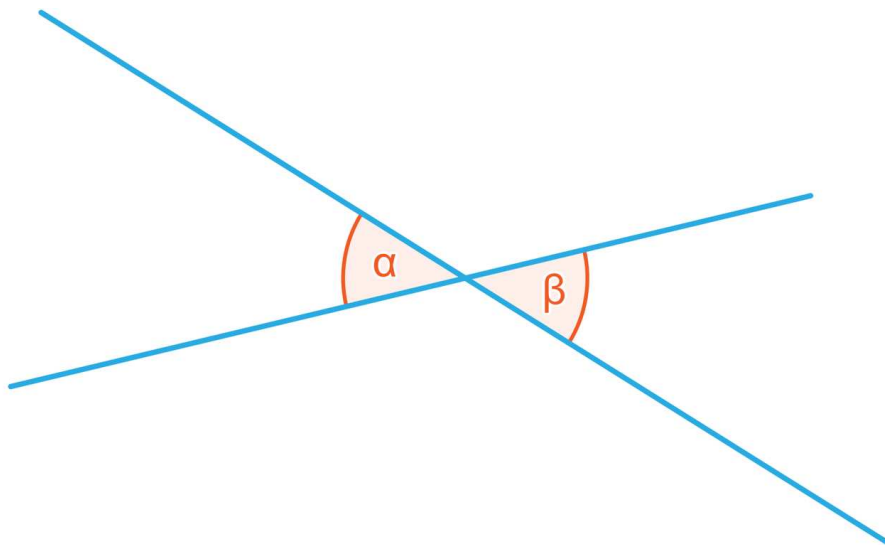
## Własność: suma miar kątów przyległych

Kąty przyległe tworzą [kąta półpełny](#), czyli suma miar kątów przyległych jest równa 180 stopni.

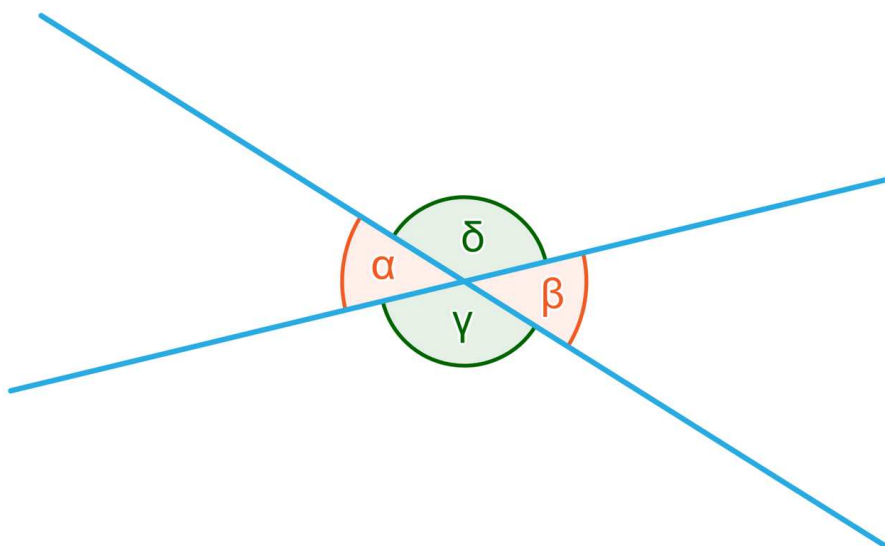
## Definicja: kąty wierzchołkowe

[Kąty wypukłe](#) o wspólnym [wierzchołku](#), w których [ramiona jednego kąta](#) stanowią przedłużenia ramion drugiego, nazywamy **kątami wierzchołkowymi**.

Na rysunku kąty  $\alpha$  i  $\beta$  tworzą parę kątów wierzchołkowych.



Dwie przecinające się proste wyznaczają dwie pary kątów wierzchołkowych.

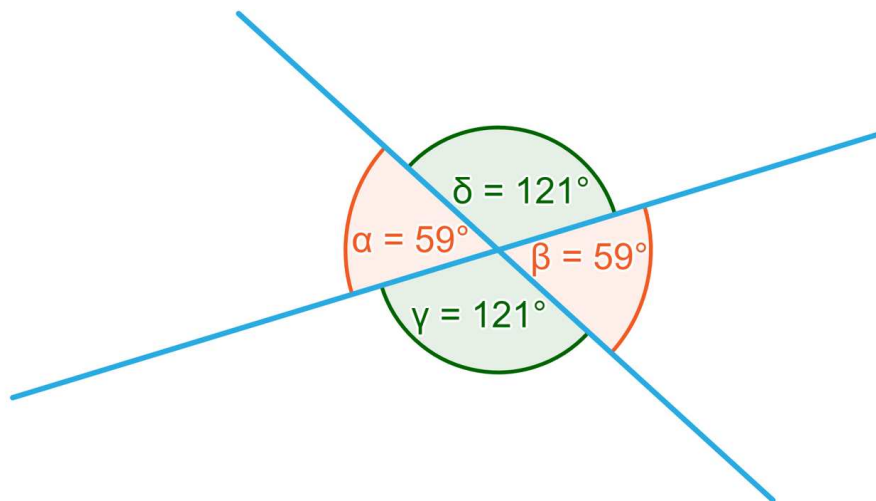


Na rysunku oprócz pary kątów wierzchołkowych ( $\alpha, \beta$ ) widać również drugą parę kątów wierzchołkowych ( $\gamma, \delta$ ).

**Własność: równość miar kątów wierzchołkowych**

Kąty wierzchołkowe mają równe miary.

Z powyższej własności wynika, że  $\alpha = \beta$  oraz  $\gamma = \delta$ .



### Dowód własności: równość miar kątów wierzchołkowych

Korzystając z własności kątów przyległych, mamy  $\delta + \alpha = \delta + \beta = 180^\circ$ . Odejmując  $\delta$  stronami dostajemy równość kątów wierzchołkowych  $\alpha = \beta$  oraz  $\alpha = 180^\circ - \delta$ . Teraz korzystamy z powyższej równości oraz własności kątów przyległych  $\gamma + \alpha = \gamma + (180^\circ - \delta) = 180^\circ$ . Rozwiązując ostatnią równość dostajemy  $\gamma = \delta$ .

### Sprawdź to sam:

**Uwaga!** Eksperymentalne sprawdzenie własności nie jest jej dowodem, ale pozwala utrwalić tę własność.

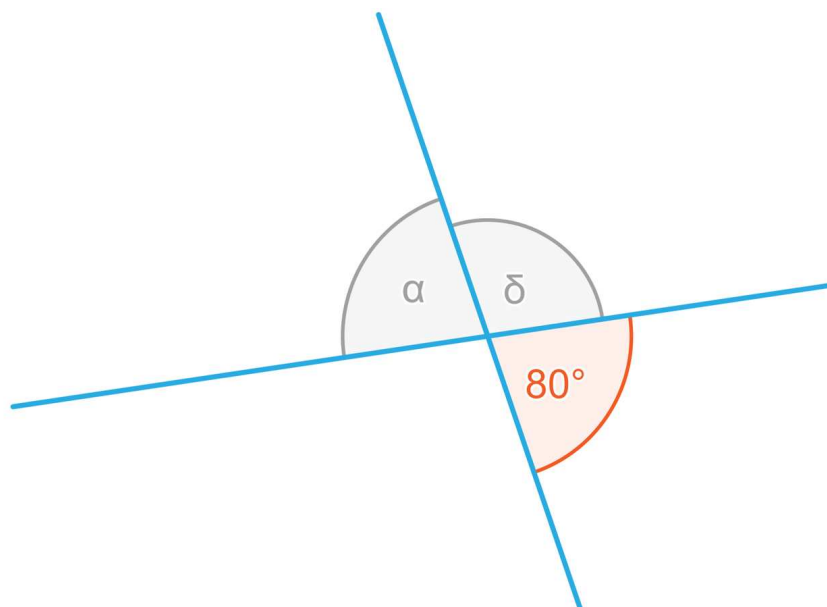
To ćwiczenie możesz zrobić sam lub w parze. Na kartce papieru narysuj dwa przecinające się odcinki. Wpisz nazwy kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  w taki sam sposób jak na wcześniejszych rysunkach. Wytnij kąty nożyczkami.

Jeśli wykonałeś to ćwiczenie starannie, to:

1. Nakładając na siebie powstałe wycinki sprawdź, które kąty są równe.
2. Przykładając pary wyciętych kątów do odcinka, na przykład do linijki lub brzegu ławki, sprawdź, które kąty są przyległe.

### Przykład 1

Na rysunku przedstawione są dwie przecinające się proste oraz miara jednego z utworzonych kątów. Wyznaczymy miary pozostałych kątów.

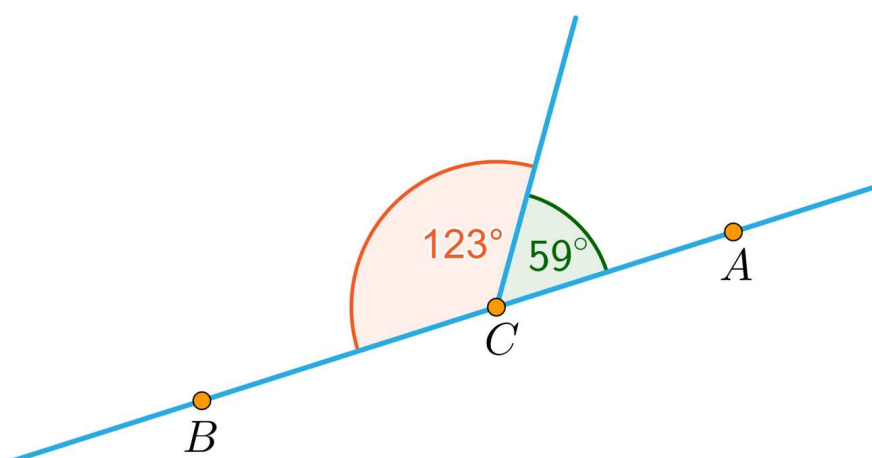


Kąt  $\alpha$  ma miarę  $80^\circ$ , bo jest kątem wierzchołkowym kąta  $80^\circ$ .

Kąt  $\delta$  ma miarę  $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ , bo jest kątem przyległym do kąta  $80^\circ$ .

### Przykład 2

Sprawdzimy, czy punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na przedstawionym rysunku leżą na jednej prostej.

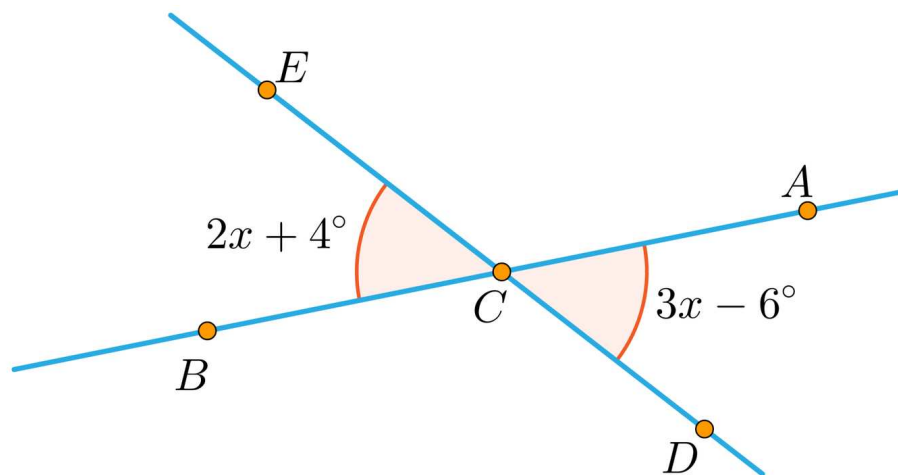


Sprawdzamy, czy kąty  $123^\circ$  i  $59^\circ$  są przyległe:  $123^\circ + 59^\circ = 182^\circ \neq 180^\circ$

Ponieważ suma miar kątów  $123^\circ$  i  $59^\circ$  jest różna od  $180^\circ$ , to kąty te nie są przyległe, i stąd wnioskujemy, że punkty  $A, B, C$  nie leżą na jednej prostej.

### Przykład 3

Na rysunku przedstawione są dwie przecinające się proste oraz wyrażenia algebraiczne ze zmienną  $x$  opisujące miarę kątów w stopniach. Wyznamy miary kątów wypukłych  $\sphericalangle ACD$ ,  $\sphericalangle ACE$ ,  $\sphericalangle BCD$ ,  $\sphericalangle BCE$ .



Wyznamy najpierw wartość zmiennej  $x$ .

Kąty  $\sphericalangle ACD$  i  $\sphericalangle BCE$  są kątami wierzchołkowymi, więc  $2x + 4^\circ = 3x - 6^\circ$ .

Stąd  $x = 10^\circ$ .

Ostatecznie:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE = 20^\circ + 4^\circ = 24^\circ$$

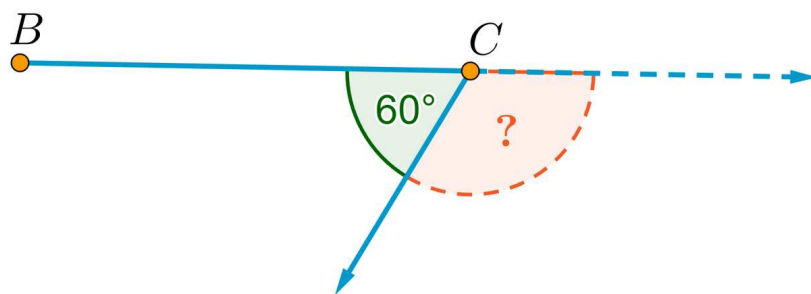
$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$$

### Przykład 4

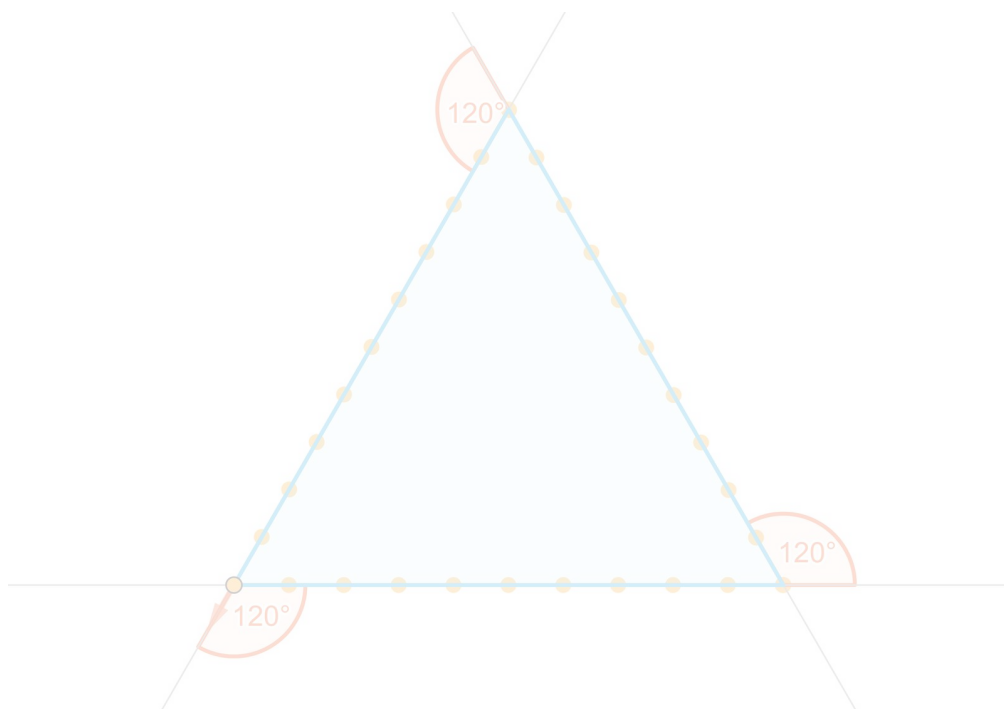
Zaprogramuj trójkąt równoboczny.

Zadaniem robota jest namalowanie na podłodze trójkąta równobocznego. Robot potrafi wykonać dwie operacje: „idź do przodu określoną liczbę kroków i maluj linię” oraz „obróć się o określony kąt”. Jak zaprogramować robota, by namalował trójkąt równoboczny o boku równym 10 kroków?

Aby wykonać to zadanie, zauważamy, że wszystkie trzy kąty w trójkącie równobocznym mają miarę  $60^\circ$ . Zauważmy, że robot zatrzymując się po wykonaniu 10 kroków, odpowiadających długości boku trójkąta, musi obrócić się tak, by po wykonaniu kolejnych 10 kroków namalować drugi bok trójkąta.



Popatrz na rysunek powyżej. Robot rusza z punktu  $B$  i zatrzymuje się po 10 krokach w punkcie  $C$ . Gdyby robot kontynuował ruch, to poruszałby się wzdłuż prostej  $BC$ . Zatem robot musi obrócić się w prawo o kąt przyległy do kąta  $60^\circ$ , czyli o kąt  $120^\circ$ . Uruchom aplet i sprawdź jak porusza się robot.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DzzaZGjXq>

Takie programy można napisać np. w scratchu. Jak to zrobić? Przeczytaj [instrukcję](#).

## Słownik

### kąt

część płaszczyzny zawarta między dwiema półprostymi (wraz z tymi półprostymi) wychodzącymi z tego samego punktu

### ramiona kąta

półproste wyznaczające kąt

### wierzchołek kąta

punkt wspólny ramion kąta

### kąt wypukły

kąt, którego miara wynosi od  $0^\circ$  do  $180^\circ$

### kąt półpełny

kąt, którego miara wynosi  $180^\circ$

# Aplet

---

## Polecenie 1

Otwórz aplet. Chwyć myszką punkt  $P$  i poruszaj nim po ekranie. Obserwuj jak zmieniają się miary kątów




## Polecenie 2

## Polecenie 3

Na rysunkach przedstawiono przecinające się proste i półprostą. Dopasuj odpowiedzi zawierające miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , do rysunków.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1

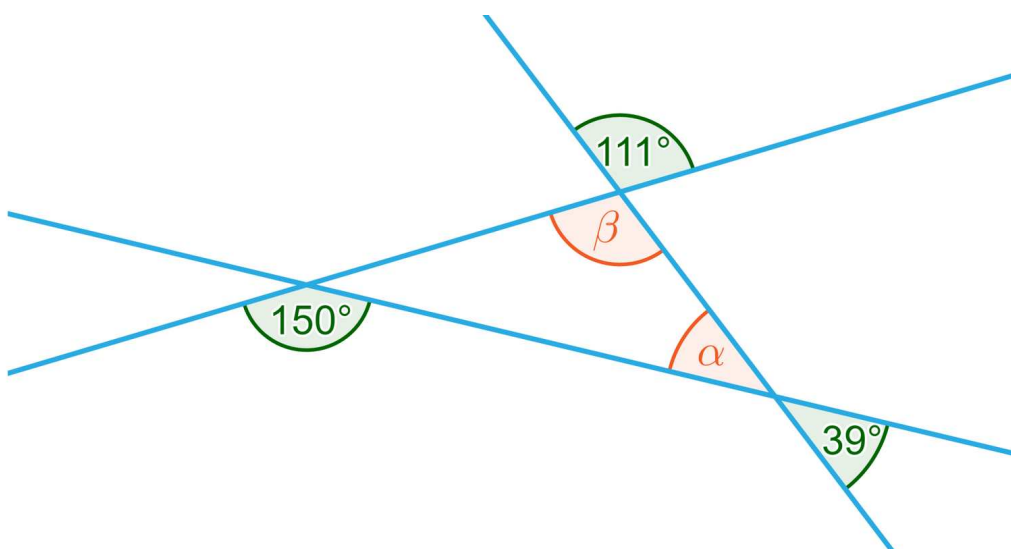
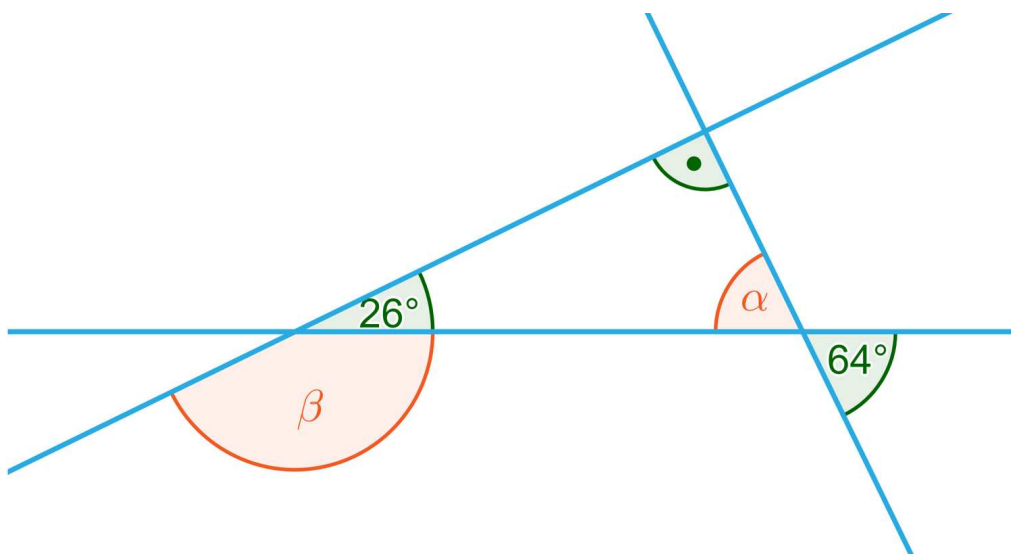


Korzystając z informacji opisujących zależność między  $\alpha$  i  $\beta$ , wybierz poprawną odpowiedź.

## Ćwiczenie 2



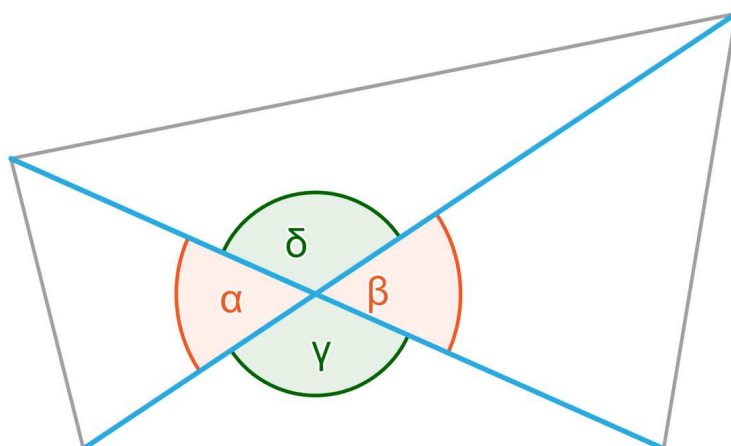
Na rysunkach przecinające się proste tworzą trójkąt. Jakie miary mają kąty  $\alpha$  i  $\beta$ ? Ile wynosi suma miar kątów w utworzonym trójkącie?



### Ćwiczenie 3



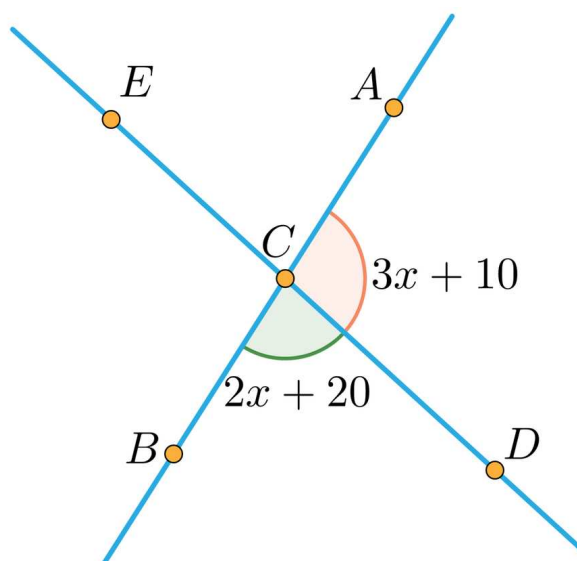
Wyznacz kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  przedstawione na rysunku



### Ćwiczenie 4



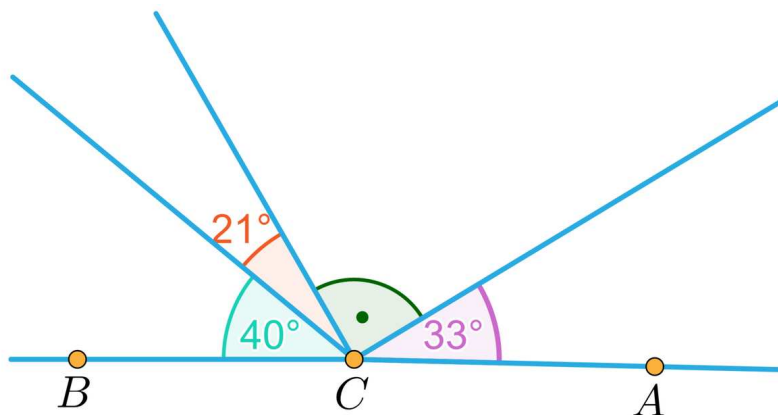
Na rysunku przedstawione są dwie przecinające się proste oraz wyrażenia algebraiczne ze zmienną  $x$  opisujące miarę kątów w stopniach. Wyznacz miary kątów wypukłych  $\sphericalangle ACE$  i  $\sphericalangle BCE$ .



### Ćwiczenie 5



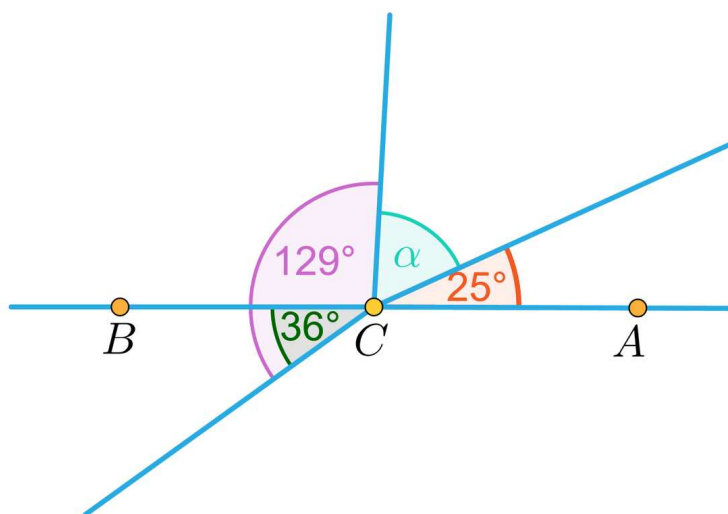
Na rysunku przedstawiono 5 półprostych. Czy punkty  $A, B, C$  są współliniowe? Uzasadnij odpowiedź.



### Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono 5 półprostych. Jaka powinna być miara kąta  $\alpha$ , żeby punkty  $A, B, C$  były współliniowe?



## Ćwiczenie 7



Jak podzielić pół okrągłej pizzy na dwie części tak, aby Kasia dostała dwa razy mniej pizzy niż Bartek?



Jak praktycznie wyznaczyć linię cięcia pizzy?

## Ćwiczenie 8



Pizza ma zostać podzielona na trzech braci proporcjonalnie do ich wagi. Najstarszy brat dostanie połowę pizzy, a druga połowa zostanie podzielona na dwóch młodszych braci, z których jeden waży 42 kg, drugi 30 kg. Ile waży najstarszy brat? Jak podzielić połowę pizzy na młodszych braci?

Jak praktycznie wyznaczyć linię cięcia pizzy?

## Ćwiczenie 9



**Dla zainteresowanych**

Napisz program rysowania dowolnego wielokąta foremnego. Działanie programu możesz sprawdzić w Scratch.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Bożena Staruch

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Kąty przyległe i wierzchołkowe

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje wielokąt foremny i korzysta z ich podstawowych własności;

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje i poprawnie nazywa kąty wierzchołkowe i przyległe, także w sytuacjach praktycznych,
- korzystając z własności kątów przyległych i wierzchołkowych układa i rozwiązuje równania liniowe,
- sprawdza metodą eksperymentalną własności kątów przyległych i wierzchołkowych,
- wykorzystuje wiedzę o kątach przyległych oraz o sumie miar kątów w wielokącie do napisania pseudo-kodu programu rysującego wielokąt foremny,
- korzysta z wiedzy z innych działów matematyki, np. stosuje twierdzenie, że pole wycinka kołowego jest proporcjonalne do kąta tego wycinka w celu rozwiązania zadań praktycznych,
- na podstawie częściowych informacji wyznacza kąty między przekątnymi czworokąta.

## **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm,
- konektywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- pogadanka,
- interaktywna aplikacja,
- analiza pomysłów,
- weryfikacja eksperymentalna,
- wykład informacyjny.

## **Formy zajęć:**

- praca indywidualna
- praca w parach

## **Środki dydaktyczne:**

- Komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.
- Papier i nożyczki

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wprowadzająca:**

1. Przedstawienie na rysunkach dwóch przecinających się prostych oraz przecinających się przekątnych w różnych czworokątach. Pytanie o zależności między powstałymi kątami.
2. Przedstawienie celów.

### **Faza realizacyjna:**

1. Definicja i sformułowanie własności kątów przyległych i wierzchołkowych.
2. Sprawdzenie eksperymentalne danych własności poprzez wycinanie kątów i porównywanie ich.
3. Przedstawienie przykładów, szczególnie przykładów, w których wprowadzona jest niewiadoma.
4. Zastosowanie własności w sformułowaniu pseudo-kodu programu rysującego trójkąt równoboczny.
5. Wprowadzenie na zasadzie pogadanki o tym jak podzielić pizzę, przypomnienie proporcji oraz twierdzenia, że pole wycinka koła jest proporcjonalne do miary kąta tego wycinka.

6. Wykorzystanie Apletu GeoGebry, gdzie uczeń zmieniając położenie prostych obserwuje wartości miar powstałych kątów.

### **Faza podsumowująca:**

1. Weryfikacja w ramach ćwiczeń sprawdzających nabytych przez ucznia umiejętności i wiedzy.
2. Rozwiązywanie przez ucznia zadań trudniejszych wykorzystujących wiedzę przedstawioną na lekcji w szerszym kontekście praktycznym.

### **Praca domowa:**

Uczniowie dostają zadanie: mają zaobserwować i sfotografować przynajmniej 3 obiekty otoczenia, w których można zaobserwować kąty przyległe i wierzchołkowe. Praca powinna być wykonana w postaci prezentacji wraz z komentarzem i uzasadnieniem wyboru, zmierzeniem i wyznaczeniem miar kątów itp.

### **Materiały pomocnicze:**

- [Kąty przyległe](#)

**Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimediu:** Może być wykorzystane:

- przez nauczyciela do pracy indywidualnej lub w parach
- przez uczniów podczas przygotowywania się do zajęć
- przez uczniów do utrwalania wiedzy
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji