



Badanie energii ruchu bryły sztywnej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Badanie energii ruchu bryły sztywnej

Czy to nie ciekawe?

Znasz zabawkę jojo? Ciężarek połączony ze szpulą porusza się w górę i w dół, w miarę jak nie rozwija się ze szpuli i nawija się na nią ponownie. Wiesz, że fizycy też się zajmują taką zabawką? Tylko nazywają ją „kołem Maxwella” i służy im do badania zmian energii potencjalnej grawitacji w energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej. Jaka fizyka kryje się za tą niepozorną zabawką?



Rys. a. Zabawka jojo

Twoje cele

W tym materiale:

- Dowiesz się, jakie przemiany energii zachodzą w trakcie ruchu bryły sztywnej,
- Zrozumiesz działanie koła Maxwella i zabawki jojo,
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań oraz zagadnień z zakresu badania energii ruchu bryły sztywnej.

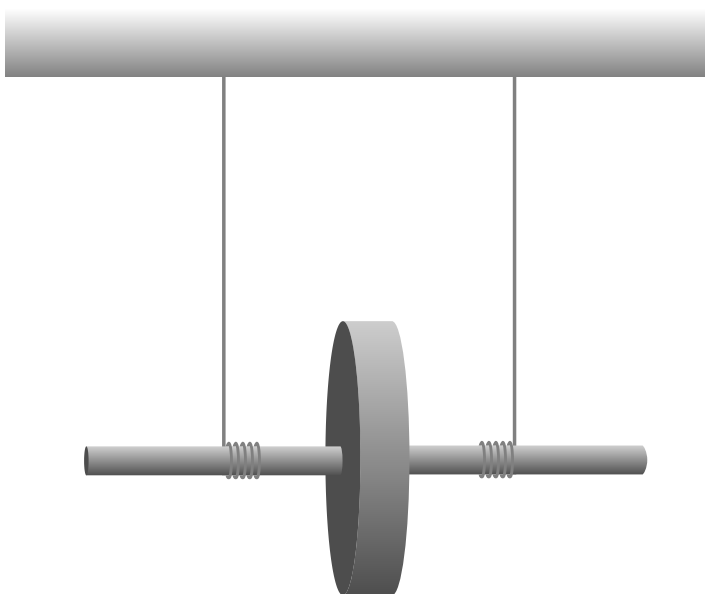
Przeczytaj

Warto przeczytać

[Jojo](#) bynajmniej nie jest nową zabawką w naszej kulturze, o czym świadczy Rys. 1.



Rys. 1. Starożytny odpowiednik jojo. [Źródło: [Altes Museum](#) / Public domain]

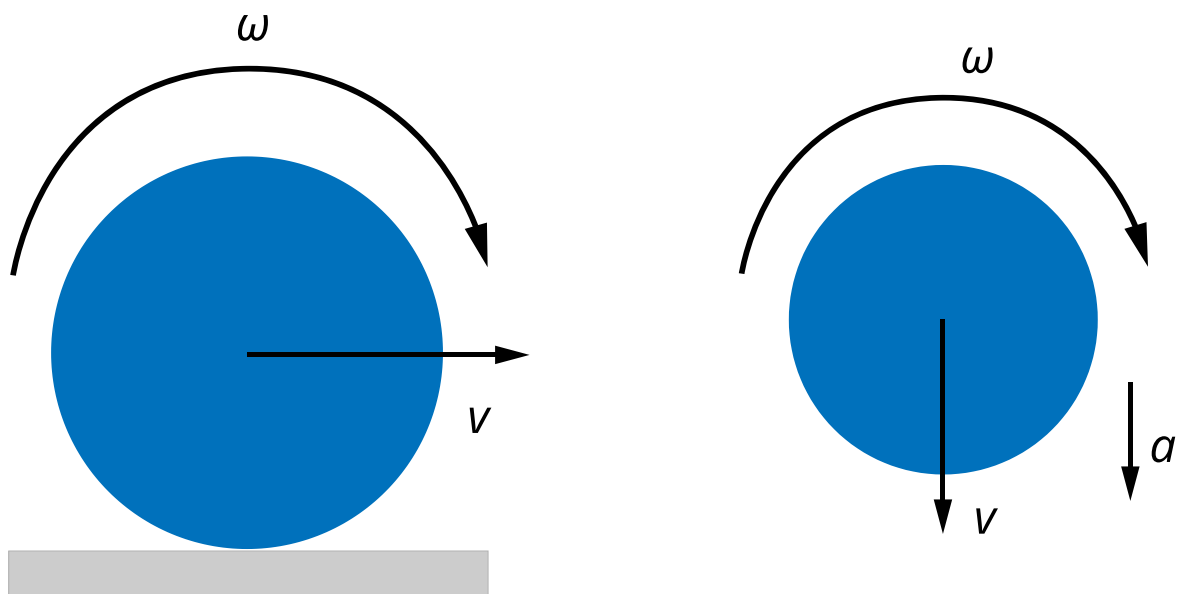


Rys. 1a. Koło Maxwella

Rys. 1a. prezentuje urządzenie wykorzystujące tę samą zasadę fizyczną co wspomniane jojo – **koło Maxwella**. Ciężki obiekt, **bryła sztywna** o dużym momencie bezwładności, nawijany jest na sznurek i puszczany swobodnie – siła grawitacji sprawia, że koło zaczyna opadać, jednocześnie obracając się coraz szybciej. W efekcie widzimy demonstrację zamiany energii potencjalnej grawitacji na energię kinetyczną.

Warto tu zwrócić uwagę na sposób zamontowania sznurka na osi koła lub jojo. Montaż możliwy jest zarówno w sposób umożliwiający bryle dalsze obracanie się po rozwinięciu sznurka – poprzez zastosowanie łożyska kulkowego – lub „na sztywno”, przez co po rozwinięciu się całej nici, zaczyna się ona ponownie nawijać, podciągając bryłę do góry. Możemy zatem zarówno zamienić całą energię potencjalną na energię kinetyczną ruchu obrotowego, jak i otrzymać ruch okresowy, w którym okresowo następują przemiany energii.

W życiu codziennym częściej będziemy spotykać obracające się bryły sztywne nie umocowane na sznurku. Będą to na przykład obiekty swobodnie toczące się po powierzchni (lewa część Rys. 2.) lub staczające z pochyłości (Rys. 3.) czy pojazdy (kiedy mamy do czynienia z toczeniem się ciał, przeciwieństwie do ruchu obrotowego względem nieruchomej osi obrotu, występuje zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy, jak na prawej części Rys. 2.). We wszystkich tych przypadkach równania związane z przemianami energii są bardzo podobne. Na początek zwróćmy uwagę, że na energię kinetyczną bryły sztywnej składa się zarówno energia kinetyczna ruchu postępowego, jak i obrotowego. Spójrzmy ponownie na Rys. 2.



Rys. 2. Ruch bryły sztywnej - złożenie ruchu postępowego i obrotowego

Przyjrzyjmy się bryle sztywnej o masie m i momencie bezwładności I , toczącej się po płaszczyźnie. Środek masy tej bryły przemieszcza się z prędkością $\vec{v}$ względem podłoża, a sama bryła obraca się wokół swojego środka masy z prędkością kątową ω . Na energię ruchu tej bryły sztywnej składa się jej energia ruchu postępowego $E_{post} = \frac{mv^2}{2}$ oraz jej energia ruchu obrotowego $E_{obr} = \frac{I\omega^2}{2}$. Możemy zatem zapisać, że całkowita energia kinetyczna ruchu bryły sztywnej to:

$$E_k = E_{post} + E_{obr} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Założmy teraz, że toczenie odbywa się bez poślizgu. Znaczy to, że prędkość v środka masy i prędkość kątowa ω powiązane są relacją $v = \omega R$. Wstawiając tę zależność do poprzedniego wzoru otrzymamy:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2 + I\omega^2}{2} = \frac{\omega^2(mR^2 + I)}{2}$$

Jak widać z tego wzoru, różne bryły o tej samej masie, toczące się z tą samą prędkością, będą posiadały różną energię kinetyczną. Porównajmy kulę, walec i obręcz, wszystkie o tej samej masie m i promieniu R :

$$E_{k-kula} = \frac{\omega^2(mR^2 + I_k)}{2} = \frac{\omega^2(mR^2 + \frac{2}{5}mR^2)}{2} = \frac{\frac{7}{5}\omega^2mR^2}{2} = \frac{7}{10}\omega^2mR^2$$

$$E_{k-walec} = \frac{\omega^2(mR^2 + I_w)}{2} = \frac{\omega^2(mR^2 + \frac{1}{2}mR^2)}{2} = \frac{\frac{3}{2}\omega^2mR^2}{2} = \frac{3}{4}\omega^2mR^2$$

$$E_{k-obręcz} = \frac{\omega^2(mR^2 + I_o)}{2} = \frac{\omega^2(mR^2 + mR^2)}{2} = \frac{2\omega^2mR^2}{2} = \omega^2mR^2$$

Widzimy, że przy tej samej masie, promieniu i prędkości, całkowita energia kinetyczna obręczy jest większa niż walca, a walca jest większa niż kuli. Zastanówmy się, jaką część całkowitej energii tych brył stanowi ich energia ruchu postępowego, a jaką obrotowego:

$$\frac{E_p}{E_o} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{\frac{I\omega^2}{2}} = \frac{mv^2}{I\omega^2} = \frac{mR^2\omega^2}{I\omega^2} = \frac{mR^2}{I}$$

Ponownie wynik zależy od momentu bezwładności bryły, przyjrzyjmy się zatem raz jeszcze kuli, walcowi i obręczy:

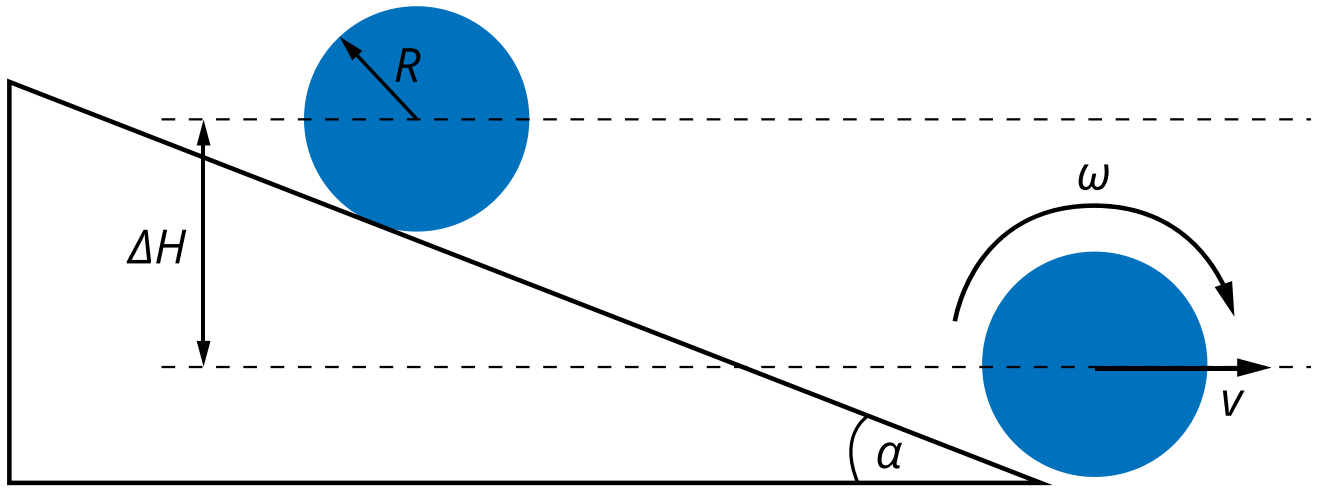
$$\frac{E_{p-kula}}{E_{o-kula}} = \frac{mR^2}{I_k} = \frac{mR^2}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2} = 3,5$$

$$\frac{E_{p-walec}}{E_{o-walec}} = \frac{mR^2}{I_w} = \frac{mR^2}{\frac{1}{2}mR^2} = 2$$

$$\frac{E_{p-obręcz}}{E_{o-obręcz}} = \frac{mR^2}{I_o} = \frac{mR^2}{mR^2} = 1$$

Widzimy, że w przypadku toczącej się bez poślizgu obręczy jej całkowita energia kinetyczna składa się po połowie z energii ruchu postępowego i energii ruchu obrotowego. Ale już w przypadku walca, energia ruchu postępowego jest dwa razy większa

niż obrotowego, a w przypadku kuli, energia ruchu postępowego jest 3,5 razy większa niż jej energia ruchu obrotowego. Jak te bryły będą się staczały z równi pochyłej? Czy wszystkie stoczą się z tej samej wysokości w tym samym czasie? Przyjrzyjmy się Rys. 3.



Rys. 3. Bryła sztywna staczająca się po równi pochyłej

Odpowiedzi można udzielić bardzo łatwo, przeprowadzając proste rozumowanie: całkowita energia kinetyczna bryły sztywnej będącej na końcu równi równa jest energii potencjalnej tej bryły w momencie, gdy zaczęła się toczyć:

$$E_{pot} = E_{post} + E_{obr}$$

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Skoro zatem energia początkowa każdej z brył jest taka sama (ta sama masa i ten sam promień), to ich energia końcowa też będzie taka sama. Jednakże, jak ustaliliśmy wcześniej, całkowita energia kinetyczna składa się z energii ruchu postępowego i obrotowego – w różnych proporcjach, w zależności od momentu bezwładności tej bryły. Intuicyjnie możemy zatem powiedzieć, że bryła o większym momencie bezwładności stoczy się wolniej i będzie miała mniejszą końcową prędkość ruchu postępowego – ponieważ większa część jej energii będzie stanowiła energia ruchu obrotowego. Poniżej uzasadnimy te wnioski liczbowo.

Porównajmy staczanie się kuli i walca. Jaka jest ich energia końcowa?

$$E_{walca} = \frac{3\omega^2 m R^2}{4}$$

$$E_{kuli} = \frac{7\omega^2 m R^2}{10}$$

Energia początkowa (energia potencjalna grawitacji) dla obu była taka sama $E_{pot} = mgH$.
Zatem, które ciało będzie miało większą prędkość kątową po stoczeniu się z równi?
Korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej, otrzymujemy:

$$\frac{3\omega_w^2 m R^2}{4} = mgH \rightarrow \omega_w^2 = \frac{4}{3} \frac{gH}{R^2} \approx 1,33 \frac{gH}{R^2}$$

$$\frac{7\omega_k^2 m R^2}{10} = mgH \rightarrow \omega_k^2 = \frac{10}{7} \frac{gH}{R^2} \approx 1,43 \frac{gH}{R^2}$$

$$\omega_k > \omega_w$$

Otrzymany wynik zgadza się z naszymi przewidywaniami – kula, jako obiekt o mniejszym momencie bezwładności niż omawiany walec, porusza się z większą prędkością po stoczeniu się z równi.

Słowniczek

jojo

(*ang. yo-yo*) inaczej zwane kołem Maxwella to rodzaj zabawki w postaci ciężarka-szpulki zawieszonego na sznurku. Ciężarek, opuszczony na sznurku trzymanym za nieumocowany koniec, rozwija go wpadając w ruch obrotowy. Po pełnym rozwinięciu sznurka ciężarek zachowuje moment pędu ruchu obrotowego i nawijając sznurek wędruje w górę. Istnieje wiele teorii o pochodzeniu jojo, lecz prawdopodobnie wywodzi się ono z Chin.

koło Maxwella

(*ang. Maxwell's wheel*) to krążek, bryła sztywna o dużym momencie bezwładności, zawieszony na linkach nawiniętych na oś, wokół której może się on obracać. Konstrukcja przypomina zabawkę jojo.

bryła sztywna

(*ang. rigid body*) inaczej ciało sztywne lub ciało rozciągłe, to pojęcie używane w fizyce oznaczające ciało fizyczne, którego elementy (części, punkty materialne) nie mogą się względem siebie przemieszczać.

Symulacja interaktywna

Badanie energii ruchu bryły sztywnej

W symulacji znajdziesz do wyboru dwie różne bryły sztywne: kulę i walec, które mogą być widoczne razem lub osobno, w zależności od tego jaką opcję wybierzesz. Możesz obserwować pojedynczą bryłę lub kilka, przenikających się wzajemnie, brył na raz.

Bryły mają rozmiary regulowane suwakami:

- kula: promień R
- walec: promień r i wysokość H

Bryły obracają się wokół osi pionowej z ustawianą suwakiem prędkością kątową.

Dynamiczny tekst wyświetla: moment bezwładności obliczony dla każdej bryły oraz aktualnie ustawioną prędkość obrotową wraz z obliczoną na tej podstawie energią kinetyczną każdej z brył.

Zaleca się, aby symulację uruchamiać w trybie pełnoekranowym.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 1

Zastanów się czy jesteś w stanie znaleźć taką wysokość walca, dla której jego moment bezwładności jest taki sam jak kuli, gdy obie bryły mają ten sam promień?

Sprawdź się

W poniższych zadaniach użyteczne mogą być poniższe wartości momentów bezwładności różnych brył sztywnych względem osi przechodzących przez ich środek masy:

Opis bryły	Moment bezwładności
Walec o promieniu R i masie m	$\frac{1}{2}mR^2$
Kula o promieniu R i masie m	$\frac{2}{5}mR^2$
Obręcz cienkościenna o promieniu R i masie m	mR^2

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż, który wzór poprawnie opisuje całkowitą energię kinetyczną bryły sztywnej o masie m i momencie bezwładności I , toczącej się z prędkością v i obracającą się z prędkością kątową ω z równi pochyłej z wysokości H :

☐ $E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgH$

☐ $E_k = \frac{mv^2}{2} + mgH$

☐ $E_k = mgH + \frac{I\omega^2}{2}$

☐ $E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

Ćwiczenie 2



Trzy bryły sztywne o tej samej masie i promieniu – kula, walec i obręcz – staczają się bez poślizgu z równi pochyłej, z tej samej wysokości. Uporządkuj poniższą tabelę tak, aby na górze umieścić bryłę, która stoczy się najszybciej, a na dole tę, która stoczy się najwolniej:

Walec



Obręcz



Kula



Ćwiczenie 3



Kula o promieniu 1m stoczyła się z równi pochyłej z wysokości 2,8 metrów, tocząc się bez poślizgu. Z jaką częstotliwością porusza się ta kula u podnóża równi?

☐ Około 1 obrót/sekundę

☐ Około 2 obroty/sekundę

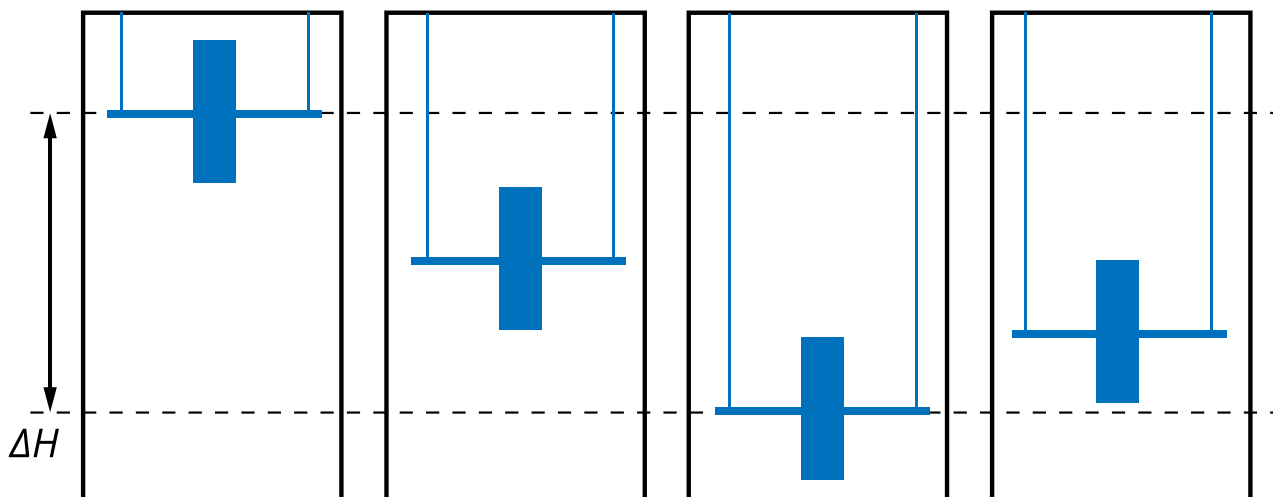
☐ Około 0,5 obrotu/sekundę

Ćwiczenie 4



Obraz poniżej przedstawia koło Maxwella w kolejnych fazach ruchu. Kolejno od lewej strony: koło jest w spoczynku, koło porusza się w dół, koło znajduje się w najniższej pozycji (sznurek rozwinął się całkowicie), koło porusza się do góry.

Koło wykonane jest z mosiądzu (gęstość 8600 kg/m^3), ma grubość $2,5 \text{ cm}$ i masę $3,8 \text{ kg}$. Opuszcza się ono z wysokości $1,5 \text{ m}$. Jaka jest jego prędkość kątowa na trzecim obrazku? Nić i oś mają masę zanedbywalną w porównaniu do masy koła.



☐ Mamy za mało danych, aby odpowiedzieć na to pytanie

☐ Około 20 rad/s

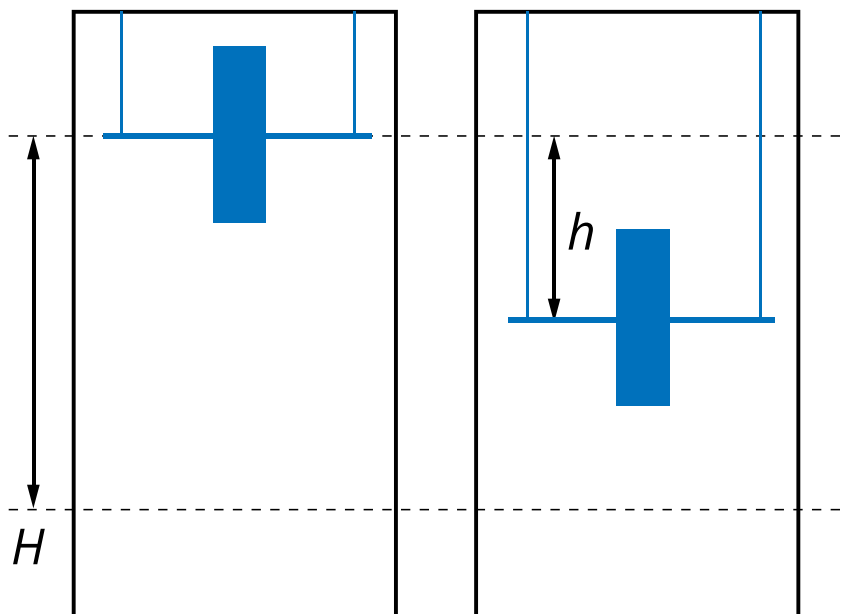
☐ Około 60 rad/s

☐ Około 100 rad/s

Ćwiczenie 5



Obraz poniżej przedstawia koło Maxwella w kolejnych fazach ruchu. Kolejno od lewej strony: koło jest w spoczynku na wysokości H , koło porusza się w dół, pokonując wysokość h . Na jakiej wysokości h energia potencjalna koła będzie równa jego energii kinetycznej? Odpowiedź podaj jako ułamek dziesiętny ($h = xH$, gdzie x to ułamek z zakresu od 1 (koło na samym dole) do 0 (koło na samej górze)).

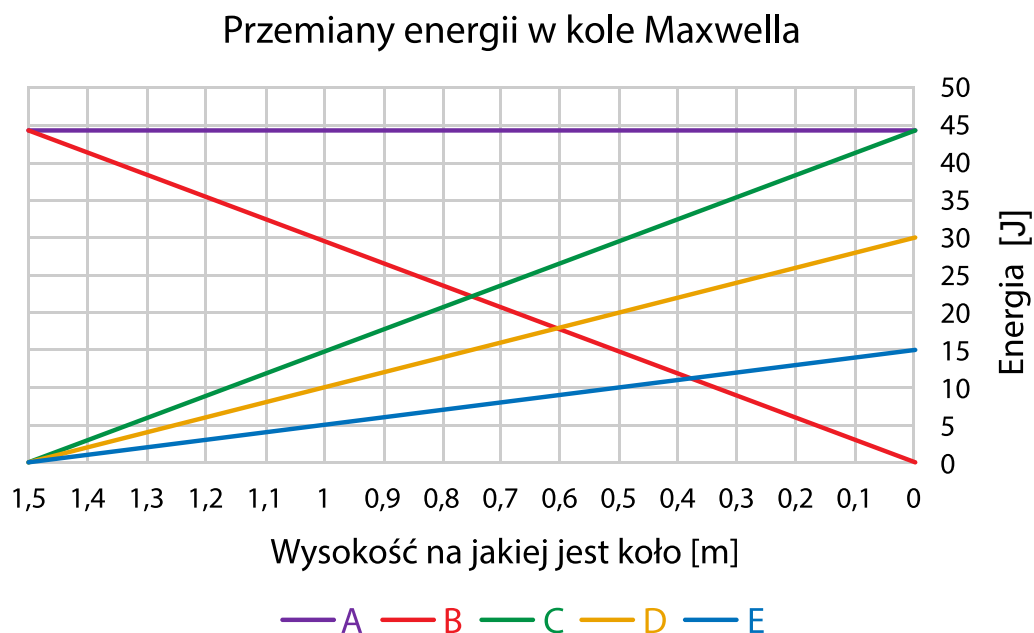


Odpowiedź: $h =$ H .

Ćwiczenie 6



Koło Maxwella o masie 3 kg i promieniu 7,5 cm opuszcza się z wysokości 1,5 m. Poniższy wykres prezentuje przemiany energii zachodzące podczas opadania tego koła. Przyporządkuj legendzie opisy:



C

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

B

Energia kinetyczna ruchu postępowego

E

Całkowita energia kinetyczna

D

Energia potencjalna

A

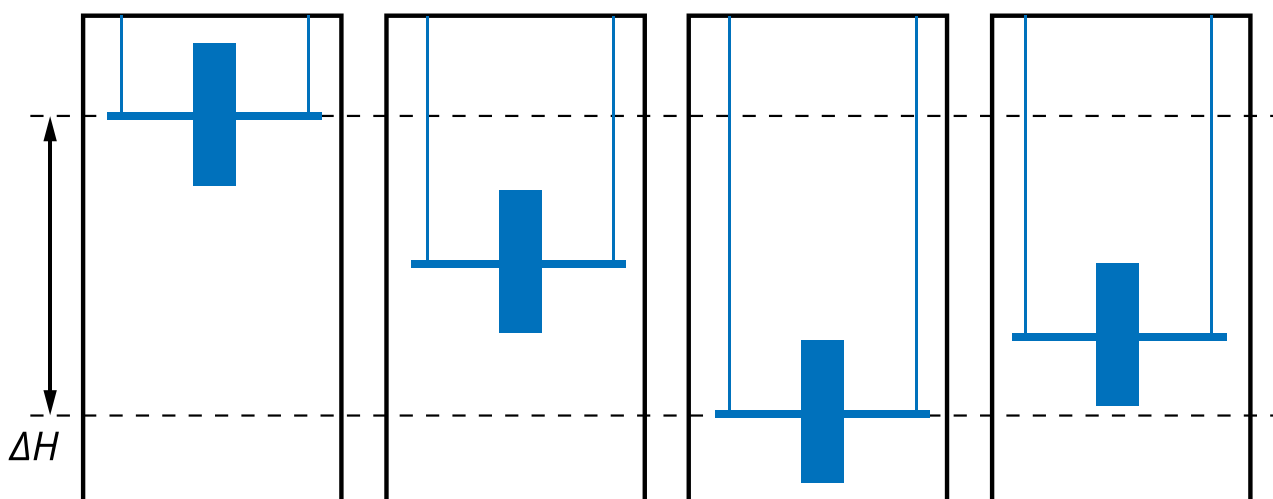
Całkowita energia mechaniczna

Ćwiczenie 7



Obraz poniżej przedstawia koło Maxwella w kolejnych fazach ruchu. Kolejno od lewej strony: koło jest w spoczynku, koło porusza się w dół, koło znajduje się w najniższej pozycji (sznurek rozwinął się całkowicie), koło porusza się do góry.

Na którym obrazku całkowita energia mechaniczna tego koła jest największa?



☐ Trzecim

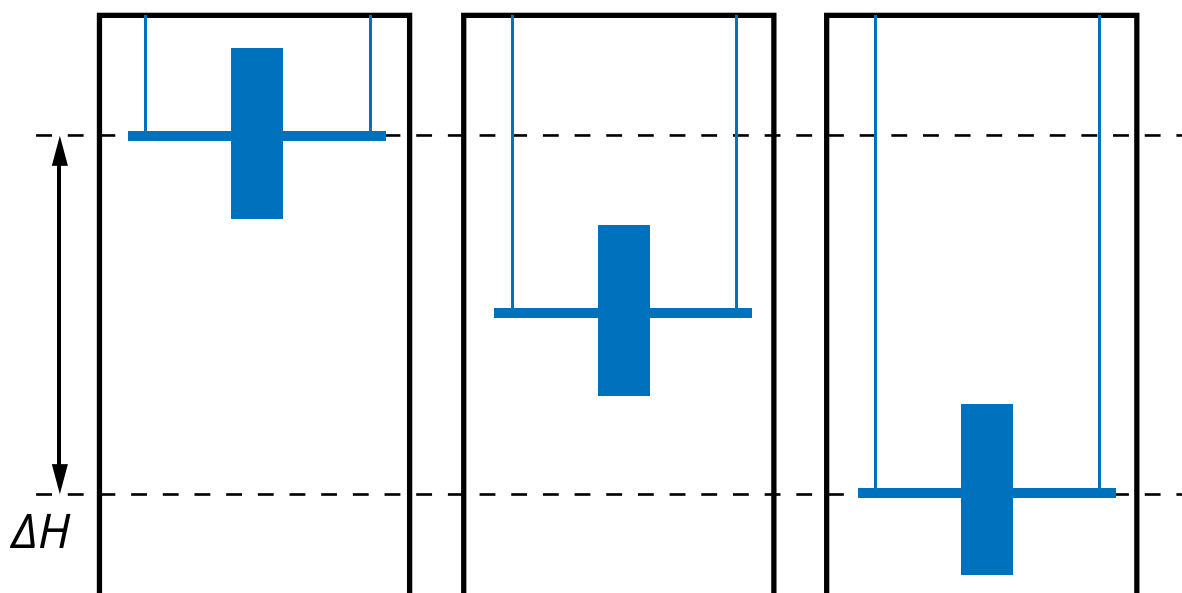
☐ Żadne z wymienionych

☐ Drugim i czwartym (kierunek ruchu nie ma znaczenia dla wartości energii)

☐ Pierwszym



Obraz poniżej przedstawia koło Maxwella w kolejnych fazach ruchu. Kolejno od lewej strony: (1) koło jest w spoczynku, (2) koło porusza się w dół, (3) koło znajduje się w najniższej pozycji (sznurek rozwinął się całkowicie).



W trakcie ruchu zachowana jest całkowita energia mechaniczna, jednakże następują jej przemiany. Energia potencjalna grawitacji zmienia się w energię kinetyczną i na odwrót. W różnych fazach ruchu zmienia się wartość poszczególnych składowych. Przyjrzyj się kolejnym fazom ruchu 1, 2, 3 i zastanów nad tymi przemianami energii. Przyporządkuj poniższe opisy związane ze składowymi energii mechanicznej do poszczególnych faz ruchu koła:

(3)

Energia mechaniczna ma składowe: energia kinetyczna ruchu postępowego, ruchu obrotowego i energia potencjalna grawitacji

(1)

Dominuje energia kinetyczna ruchu obrotowego

(2)

Dominuje energia potencjalna grawitacji

Dla nauczyciela

Konspekt (scenariusz) lekcji

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Badanie energii ruchu bryły sztywnej
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; 10) przeprowadza wybrane obserwacje, pomiary i doświadczenia korzystając z ich opisów; planuje i modyfikuje ich przebieg; formułuje hipotezę i prezentuje kroki niezbędne do jej weryfikacji. III. Mechanika bryły sztywnej. Uczeń: 5) oblicza energię ruchu bryły sztywnej jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. określa jakie przemiany energii zachodzą w trakcie ruchu bryły sztywnej, 2. omawia działanie koła Maxwella i zabawki jojo, 3. umiejętnie wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań oraz zagadnień z zakresu badania energii ruchu bryły sztywnej.
Strategie i metody nauczania:	eksperymentalno-obszerwacyjna
Formy zajęć:	praca grupowa
Środki dydaktyczne:	komputer z dostępem do Internetu i projektorem multimedialnym, koło Maxwella
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel prezentuje koło Maxwella – przeprowadza pokaz, w którym nawija nić na oś i puszcza koło, które następnie okresowo porusza się w dół, rozkręcając się, po czym po osiągnięciu minimum porusza się do góry, a nić nawija się na jego oś. Nauczyciel wyświetla następnie wykres z zadania 6 i poleca w podgrupach przeanalizowanie go.	
Faza realizacyjna:	

Nauczyciel pyta przedstawiciela kolejnych grup o zidentyfikowanie kolejnych prostych (grupa pierwsza – linia A, etc). Po prawidłowym opisanu wszystkich funkcji nauczyciel wyjaśnia ewentualne uwagi, podsumowując temat przemian energii mechanicznej w ruchu obrotowym – ze szczególnym uwzględnieniem, że na energię kinetyczną ruchu bryły sztywnej składa się zarówno energia ruchu postępowego, jak i obrotowego. Następnie nauczyciel zwraca uwagę, że na dynamikę ruchu (np. osiąganą prędkość podczas staczania się bryły z równi) istotnie wpływa moment bezwładności tej bryły – nauczyciel prezentuje symulację, w której pokazuje, jak zmienia się moment bezwładności oraz energia bryły w zależności od jej rozmiarów.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel prosi ochotnika o wyprowadzenie wzoru, który umożliwi obliczenie wysokości walca, który ma taki sam moment bezwładności, jak kula o tym samym promieniu (przy tej samej masie). Nauczyciel zadaje pracę domową – po pierwsze skorzystanie z powyższego wzoru i przeprowadzenie własnych symulacji z tym medium, wraz z wykonaniem polecenia aktywizującego.

Praca domowa:

Jak w fazie podsumowującej plus zadania 1,2,3 z zestawu ćwiczeń.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Jeśli na wyposażeniu pracowni brak jest koła Maxwella, scenariusz można przeprowadzić w formie projektu – uczniowie dostają za zadanie skonstruowanie własnego modelu koła.