Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Źródło: dostępny w internecie: Obraz emememy z Pixabay.

Po raz pierwszy sinus w znanej dziś formie zdefiniował hinduski matematyk i astronom Aryabhata (476 – 550 r. n. e.). W jego pracach nazywany był „połową cięciwy”. Nazwa sinus pojawiła się w XII wieku w wyniku błędnego tłumaczenia i w języku łacińskim oznacza „zatokę”.

W tym materiale wykorzystamy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do rozwiązywania zadań. W szczególności zajmiemy się tożsamościami trygonometrycznymi.

Twoje cele

- poznasz różne zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;
- wykorzystasz poznane wzory do przekształcania wyrażeń i dowodzenia tożsamości;
- przeanalizujesz zadania oraz wybierzesz najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania.

Przeczytaj

Tożsamością trygonometryczną nazywamy pewną określoną zależność między funkcjami trygonometrycznymi. Dodajmy, że każde użyte w tożsamości wyrażenie musi mieć sens.

Tożsamości wykorzystujemy przy przekształcaniu równań lub wzorów do innej równoważnej postaci, która jest prostsza lub lepiej nadaje się do wyciągania interesujących nas wniosków.

Aby udowodnić tożsamość, przekształcamy jedną stronę tożsamości, starając się sprowadzić ją do postaci, którą ma druga strona. Można również przekształcać obie strony, doprowadzając je do tej samej postaci.

W naszych rozważaniach przyjmiemy oznaczenia:

L – lewa strona równości

P – prawa strona równości

Przykład 1

Wykażemy, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + \left(\sin\alpha - \cos\alpha^2\right) = 2.$

Rozwiązanie

$L = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

$P = 2$

Skorzystamy z następujących wzorów skróconego mnożenia:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ oraz $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Podstawiamy wartości do powyższych wzorów.

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Teraz przekształcamy lewą stronę równości:

$L = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 =$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Po redukcji wyrażeń podobnych otrzymujemy stronę prawą równania.

$$L = 2 \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \cos^2 \alpha = 2 \cdot \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} = 2 \cdot 1 = 2 = \mathrm{P}.$$

To kończy dowód.

W przykładach 2, 3 i 4 wprowadzamy dodatkowo założenie, że mianowniki wyrażeń są różne od zera. W ten sposób gwarantujemy, że nie wykonamy dzielenia przez 0, które jest działaniem niedozwolonym.

Przykład 2

Doprowadzimy do najprostszej postaci wyrażenie:

$\frac{\sin^2 \alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1+\cos\alpha}$.

Rozwiązanie

Wyrażenie $\frac{\sin^2 \alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1+\cos\alpha}$, przy założeniach: $1 - \cos \alpha \neq 0$ oraz $1 + \cos \alpha \neq 0$, sprowadzamy do wspólnego mianownika. Następnie wykorzystamy wzór skróconego mnożenia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Mamy zatem:

$(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) mamy, że

$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

Ostatecznie:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} + \frac{\sin^2 \alpha(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha(1+\cos \alpha)}{1-\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha(1-\cos \alpha)}{1-\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha(1+\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha(1-\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha(1+\cos \alpha+1-\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2$$

Odp.: $\frac{\sin^2 \alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1+\cos\alpha} = 2$.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy równość $\frac{1-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha}$ jest prawdziwa.

Rozwiązanie

Zakładamy, że: $\cos\alpha \neq 0$ i $1+\sin\alpha \neq 0$.

Teraz oznaczamy strony równania.

$L = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$P = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

Jeżeli równość jest prawdziwa, to $L = P$, więc $L - P = 0$, czyli: $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = 0$.

Będziemy teraz przekształcać lewą stronę wyrażenia celem sprawdzenia, czy otrzymamy wartość zero.

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, który przygotuje nam oba ułamki do sprowadzenia ich do wspólnego mianownika.

Ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy następującą równość:

$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha$.

Równość tę podstawiamy do równania wyjściowego.

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} - \frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$\frac{1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{1-\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{1-1}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{0}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = 0$$

Ponieważ $L - P = 0$, to wykazaliśmy, że $L = P$, więc równość $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ jest prawdziwa.

Przykład 4

Wiedząc, że: $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (0,\ 90^\circ)$, obliczymy wartość wyrażenia: $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$.

Rozwiązanie

Rozwiążemy to zadanie dwoma sposobami.

I sposób:

Znając wartość funkcji sinus, wyznaczymy wartość funkcji cosinus.

Aby wyznaczyć wartość $\cos\alpha$, przekształcamy wzór $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ do postaci $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Po podstawieniu $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, otrzymujemy:

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

Istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy $\frac{5}{9}$. To $\frac{\sqrt{5}}{3}$ i $\frac{-\sqrt{5}}{3}$.

Ponieważ $\alpha \in (0,\ 90^\circ)$, to $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Podstawiamy do wzoru wyliczoną wartość cosinusa i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, otrzymujemy:

$(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$

$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

II sposób:

Przekształcamy wyrażenie do prostszej postaci, wykorzystując wzór skróconego mnożenia: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Wzór $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ zapisujemy w postaci: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

Stąd

$(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Odp.: Gdy $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, wartość wyrażenia $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$ wynosi $\frac{4}{9}$.

Przykład 5

Udowodnimy, że dla każdego kąta ostrego $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$.

Rozwiązanie

Będziemy przekształcać prawą stronę równości tak długo, aż otrzymamy lewą stronę.

$P = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$

$L = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Przekształcając prawą stronę wyrażenia, wykorzystamy wzory: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$P = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} =$

$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{1} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha = L$

To kończy dowód.

Ciekawostka

Po raz pierwszy sinus i cosinus w znanej dziś formie zdefiniował Indyjski matematyk i astronom Aryabhata ($476 - 550$ r. n. e.). Inny hinduski uczony Varahamihira już w VI wieku n.e. używał wzorów, z których do dzisiaj korzystamy. Są to m.in. wzory redukcyjne oraz tzw. jedynka trygonometryczna. Osiągnięcia Hindusów zostały później przetłumaczone, przejęte i rozszerzone przez arabskich i perskich matematyków. W X wieku islamscy matematycy używali wszystkich funkcji trygonometrycznych. Abu al-Wafa stworzył tablice sinusa i dokładne tablice tangensa. Zauważył również tożsamość, która jest używana do dziś: $\sin 2x = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$ (Jagielloński MatBlog).

Słownik

tożsamość trygonometryczna

pewna określona zależność między funkcjami trygonometrycznymi; każde użyte w tożsamości wyrażenie musi mieć sens

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem prezentującym zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do dowodzenia tożsamości. Udowodnij przykładowe tożsamości i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DX6dbJ8QY

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

Polecenie 2

Udowodnij tożsamości:

a) $\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$,

b) $\frac{\cos\alpha - \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha - \sin\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wyrażenie $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ jest równe:

- $\sin 2\alpha$
- $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$
- $\cos 2\alpha$
- $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

Ćwiczenie 2

Wybierz wszystkie porpawne odpowiedzi. Wyrażenie $(1 + \cos\alpha)(\cos\alpha - 1)$ możemy zapisać jako:

- $-\sin^2\alpha$
- $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- $\cos 2\alpha - \cos^2\alpha$
- $\sin^2\alpha$

Ćwiczenie 3

Uzupełnij pola:

Wyrażenie $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$ można sprowadzić do liczby całkowitej równej ____.

Wyrażenie $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ można sprowadzić do liczby całkowitej równej ____.

Wyrażenie $\frac{3}{\sin^2 x}(1 - \cos^2 x)$ można sprowadzić do liczby całkowitej równej ____.

Ćwiczenie 4

Wyrażenie $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ można zapisać w postaci:

- [ ] $1 - 2\cos^2\alpha$
- [ ] $\cos 2\alpha$
- [ ] $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
- [ ] $-\cos 2\alpha$

Ćwiczenie 5

Wyrażenie $\cos^2\alpha - \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \cos^2\alpha$ można przekształcić do postaci:

- ○ $1 + 2\sin^2\alpha$
- ○ $\cos\alpha$
- ○ 1
- ○ $\cos 2\alpha$

Ćwiczenie 6

Połącz w pary wyrażenia równoważne.

$\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin\alpha$
$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin^3\alpha$	$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Ćwiczenie 7

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\alpha \in (0^\circ;\ 90^\circ)$, uporządkuj poniższe wyrażenia w kolejności malejącej.

- $\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$
- $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$

Ćwiczenie 8

Wybierz równości, które są tożsamościami trygonometrycznymi:

- [ ] $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$
- [ ] $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}$
- [ ] $\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$
- [ ] $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) korzysta ze wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- poznaje różne zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- wykorzystuje poznane wzory do przekształcania wyrażeń i dowodzenia tożsamości
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi oraz wzory na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych (zapisują je na tablicy).
2. Uczniowie podają wzory skróconego mnożenia i zapisują je na tablicy.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3–osobowe.
2. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie dyskutują na forum klasy rozwiązania przykładów zawartych w sekcji „Przeczytaj”.
4. Nauczyciel prezentuje film samouczek z metodami rozwiązywania zadań.

5. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 6 z sekcji „Sprawdź się”.
6. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych 1 – 6.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 7, 8 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego
- Tożsamości trygonometryczne

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel podaje, że materiały zawarte w filmie samouczku uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.