Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Źródło: Jametlene Reskp, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W ilu różnych postaciach można zapisać wzór funkcji wielomianowej drugiego stopnia? Okazuje się, że wzór dowolnej funkcji kwadratowej można zapisywać na wiele różnych sposobów, jednak warto przedstawiać funkcję możliwie jak najprościej i do tego służy właśnie postać kanoniczna.

W materiale wprowadzimy wzory, które pozwolą Ci obliczać współczynniki potrzebne do zapisania wzoru funkcji w postaci kanonicznej. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Obliczysz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej.
- Zapiszesz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, mając dany wzór w postaci ogólnej.
- Zastosujesz pojęcie wektora do wyznaczenia postaci kanonicznej wzoru funkcji kwadratowej.
- Wykorzystasz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Wzór funkcji kwadratowej

Postać ogólna wzoru funkcji kwadratowej

Postać

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ oraz $x \in \mathbb{R}$ nazywamy postacią ogólną wzoru funkcji kwadratowej.

Wzór funkcji kwadratowej może też być zapisany za pomocą wzoru w postaci kanonicznej.

Parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej g określonej wzorem $g(x) = a(x-p)^2 + q$, otrzymujemy przez przekształcenie paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, poprzez:

- przesunięcie wykresu o p jednostek w lewo $(p < 0)$ lub p jednostek w prawo $(p > 0)$ wzdłuż osi X oraz o q jednostek w górę $(q > 0)$ lub q jednostek w dół $(q < 0)$ wzdłuż osi Y,
- przesunięcie wykresu o wektor $\overrightarrow{u} = [p, q]$.

Przykład 1

Parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej f, określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ przesunięto o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi X oraz o 3 jednostki w dół wzdłuż osi Y i otrzymano parabolę, będącą wykresem funkcji g. Podamy wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $a = \frac{1}{3}$, $p = 2$, $q = -3$, zatem:

$g(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$.

Postać kanoniczna wzoru funkcji kwadratowej

Wprowadźmy definicję wyróżnika trójmianu kwadratowego.

Definicja: wyróżnik trójmianu kwadratowego

Dany jest trójmian kwadratowy postaci $ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy wyrażenie $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ i zapisujemy jako:

$\Delta = b^2 - 4ac$

Na podstawie przesunięcia paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f\left(x\right) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$ wzdłuż osi układu współrzędnych, możemy zdefiniować postać kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej.

Twierdzenie: o postaci kanonicznej wzoru funkcji kwadratowej

Wzór funkcji kwadratowej zapisany w postaci ogólnej $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ można zapisać za pomocą wzoru

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

gdzie:

$p = \frac{-b}{2a}$,

$q = \frac{-\Delta}{4a}$,

$\Delta = b^2 - 4ac$.

Dowód:

$f\left(x\right) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c =$

$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$

$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

Otrzymujemy wzór $f\left(x\right) = a \cdot (x-p)^2 + q$, gdzie:

$p = \frac{-b}{2a}$,

$q = \frac{-\Delta}{4a}$

Liczby p i q są kolejnymi współrzędnymi wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zauważmy, że jeżeli w postaci ogólnej wzoru funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ wartość współczynnika $b = 0$, to funkcja opisana wzorem $f(x) = ax^2 + c$ jest zapisana za pomocą wzoru zarówno w postaci ogólnej, jak i kanonicznej.

Przykłady wzorów funkcji kwadratowej, zapisanych w postaci zarazem ogólnej i kanonicznej to:

$f(x) = x^2 - 3$,

$g(x) = -3x^2 + 5,$

$h(x) = \sqrt{5}x^2 - 1.$

Zauważmy, że jeżeli postać ogólną wzoru funkcji kwadratowej możemy przedstawić w postaci kwadratu sumy lub różnicy wyrażeń, to taka postać jest także postacią kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej. Na przykład:

$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$

$g(x) = -x^2 + 10x - 25 = -\left(x^2 - 10x + 25\right) = -(x - 5)^2,$

$h(x) = x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2.$

> **Przykład 2**
>
> Zapiszemy wzór funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 6x$ w postaci kanonicznej.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Zauważmy, że jeżeli wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy, to wzór funkcji f możemy zapisać w ten sposób:
>
> $f(x) = x^2 + 6x = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x + 3)^2 - 9.$

> **Przykład 3**
>
> Wyznaczymy postać kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej, jeżeli:
>
> a) $f(x) = -4x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{9},$
>
> b) $g(x) = \sqrt{2}x^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}.$
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Wykorzystując wzory skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz kwadrat różnicy, mamy:
>
> a) $f(x) = -4x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{9} = -4\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = -4\left(x + \frac{1}{3}\right)^2,$
>
> b) $g(x) = \sqrt{2}x^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x^2 - 8x + 16\right) = \sqrt{2}(x - 4)^2.$

Postać kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej możemy znajdować za pomocą podanych wcześniej wzorów.

> **Przykład 4**
>
> Zapiszemy wzór funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 - x - 1$ w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie:

Wypisujemy wartości współczynników: $a = 2, b = -1, c = -1$, a następnie obliczamy:

$p = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$,

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$,

$q = \frac{-9}{4 \cdot 2} = -\frac{9}{8}$.

Obliczone wartości podstawiamy do wzoru na postać kanoniczną funkcji:

$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$.

Przykład 5

Wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f\left(x\right) = -3x^2$ przesunięto o wektor $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (-2, 4)$ i $B = (1, 5)$. Otrzymano w ten sposób wykres pewnej funkcji kwadratowej g, której postać kanoniczną wyznaczymy.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$g(x) = a(x - p)^2 + q$ - wzór funkcji g w postaci kanonicznej (wykresem tej funkcji jest parabola uzyskana w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f jest o wektor $\overrightarrow{AB}$).

Wówczas $\overrightarrow{AB} = [p, q]$ oraz $a = -3$.

Wyznaczymy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

Zatem:

$\overrightarrow{AB} = [1 - (-2), 5 - 4] = [3, 1]$

Wobec tego funkcja g jest określona wzorem $g(x) = -3(x - 3)^2 + 1$.

Przykład 6

Wyznaczymy współrzędne wektora, o jaki należy przesunąć parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f\left(x\right) = x^2$ tak, aby otrzymać parabolę, do której należą punkty o współrzędnych $(-3, 0)$ oraz $(0, 3)$.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$[p, q]$ - współrzędne wektora, o jaki należy przesunąć wykres funkcji f

$g(x) = (x - p)^2 + q$ - wzór funkcji powstałej po przesunięciu paraboli, będącej wykresem funkcji f o wektor o współrzędnych $[p, q]$

Ponieważ punkty o współrzędnych $(-3, 0)$ oraz $(0, 3)$ należą do paraboli, będącej wykresem funkcji g, zatem do wyznaczenia wartości p i q rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = (-3 - p)^2 + q \\ 3 = (0 - p)^2 + q \end{cases}$$

$(-3 - p)^2 + q = (0 - p)^2 + q - 3$

$\left(-3 - p\right)^2 = p^2 - 3$

$9 + 6p + p^2 = p^2 - 3$

$9 + 6p = -3$

$p = -2$

Wobec tego $q = -(-3 + 2)^2 = -1$.

Szukany wektor ma współrzędne $[-2, -1]$.

Słownik

wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

gdzie:

$p = \frac{-b}{2a}$,

$q = \frac{-\Delta}{4a}$,

$\Delta = b^2 - 4ac$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Przedstaw wzory podanych funkcji kwadratowych w postaci kanonicznej.

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^2 + x - 1$

c) $f(x) = 2x^2 - x - 6$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza współrzędne punktu, który jest wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- zapisuje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, mając dany wzór w postaci ogólnej;
- stosuje pojęcie wektora do wyznaczenia postaci kanonicznej wzoru funkcji kwadratowej;
- wykorzystuje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- drzewo pomysłów;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Postać kanoniczna funkcji kwadratowej” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego przykładu, a następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają sposoby wyznaczania postaci kanonicznej funkcji kwadratowej. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał z sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują samodzielnie ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap, to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Zależność między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i kanonicznej

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby rozwiązać samodzielnie zadania dotyczące wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

- „Galerię zdjęć interaktywnych” można wykorzystać do utrwalenia wiadomości dotyczących zastosowania wzorów skróconego mnożenia.