



Prostopadłość wykresów funkcji liniowych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Prostopadłość wykresów funkcji liniowych

Źródło: Daniel Clay, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W materiale szczególną uwagę zwrócimy na to, w jakim przypadku proste, będące wykresami funkcji liniowych są prostopadłe. Określimy zależność pomiędzy współczynnikami występującymi we wzorach tych funkcji. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz warunek, jaki muszą spełniać wzory funkcji liniowych, aby proste, będące wykresami tych funkcji były prostopadłe.
- Wskażesz na podstawie wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są prostymi prostopadłymi.
- Zastosujesz warunek prostopadłości prostych, będących wykresami funkcji liniowych, do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcją liniową.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

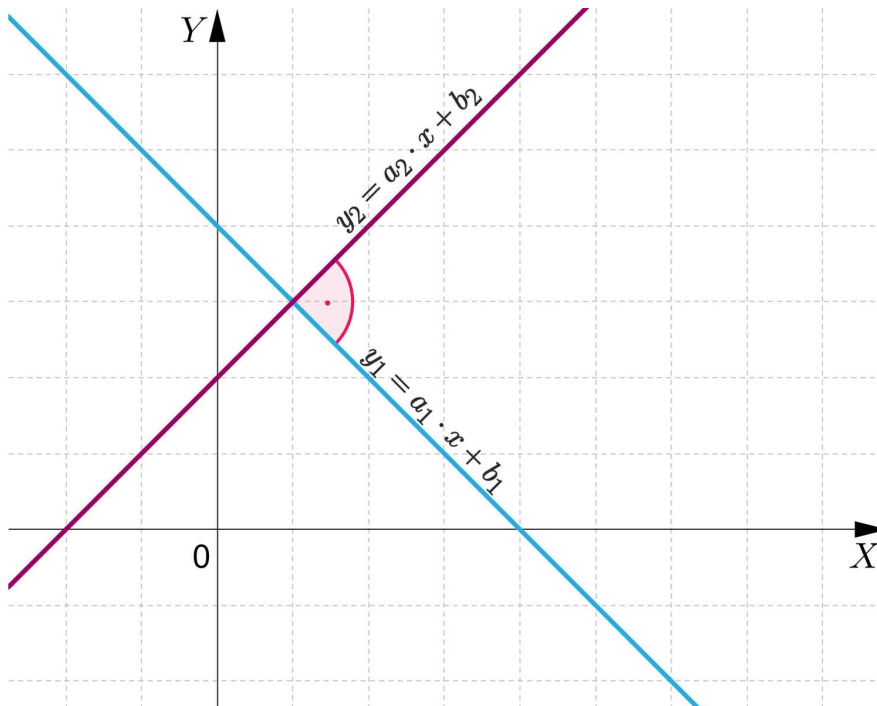
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej nazywamy współczynnikiem kierunkowym.

Twierdzenie: prostopadłość wykresów funkcji liniowych

Proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy zachodzi warunek:

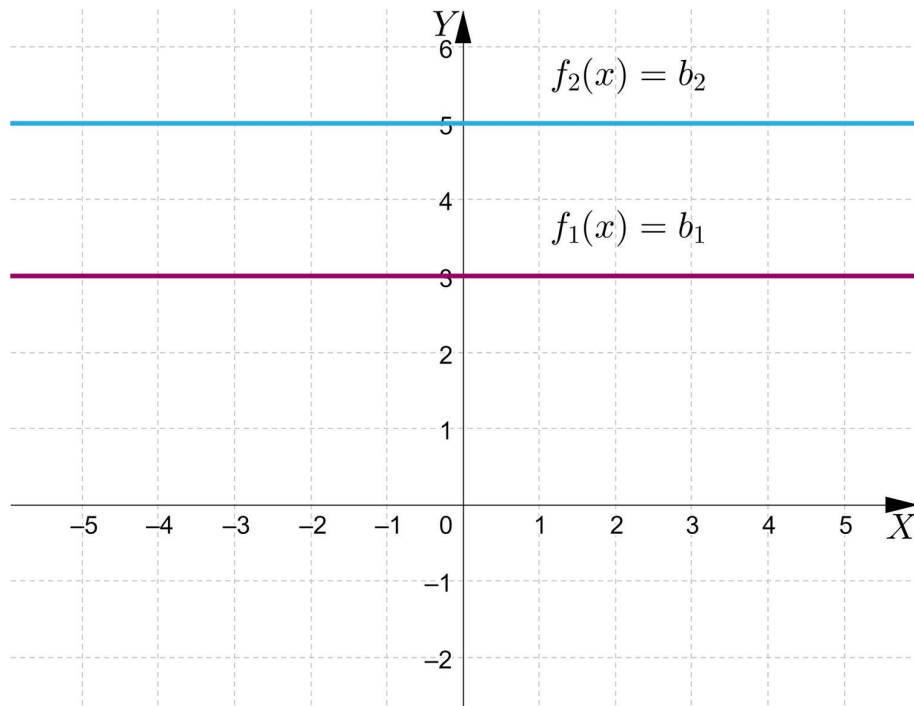
$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Powyższe twierdzenie jest równoważne temu, że proste opisane równaniami $y = a_1 \cdot x + b_1$ oraz $y = a_2 \cdot x + b_2$, które są wykresami funkcji liniowych, są prostopadłe, gdy ich współczynniki kierunkowe są liczbami przeciwnymi i odwrotnymi.



Ważne!

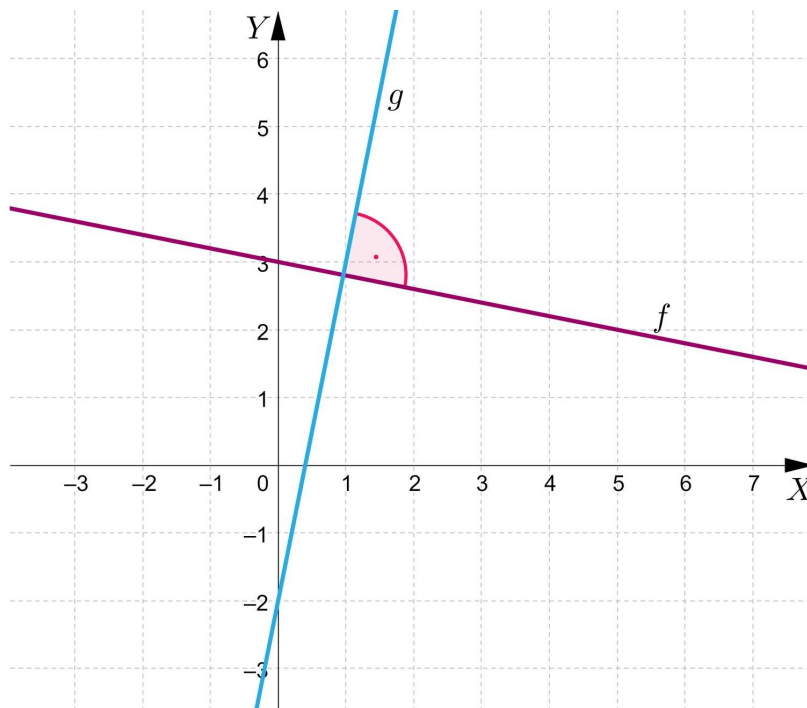
Proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f_1(x) = b_1$ oraz $f_2(x) = b_2$, gdzie $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, są zawsze prostopadłe do osi Y układu współrzędnych.



Nie istnieje funkcja liniowa, której wykres jest prostą prostopadłą do prostej, będącej wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$.

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono proste, będące wykresem funkcji liniowych, które są prostopadłe. Wyznaczymy wzory tych funkcji.



Rozwiązanie:

Do prostej, będącej wykresem funkcji liniowej f należą punkty o współrzędnych $(0, 3)$ oraz $(5, 2)$.

Jeżeli $f(x) = ax + b$, to do wyznaczenia wartości a i b rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 2 = a \cdot 5 + b \end{cases}$$

Wobec tego $a = -\frac{1}{5}$ oraz $b = 3$.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{5}x + 3$.

Proste, będące wykresami funkcji f i g są prostopadłe, zatem funkcję g zapisujemy wzorem $g(x) = 5x + b$.

Ponieważ prosta, będąca wykresem tej funkcji przecina oś rzędnych w punkcie $(0, -2)$, zatem $b = -2$.

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = 5x - 2$.

Przykład 2

Dane są funkcje liniowe określone wzorami: $f_1(x) = \frac{3}{5}x - 2$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + 1$, $f_3(x) = \frac{2}{9}x - 3$, $f_4(x) = -4, 5x + 1$, $f_5(x) = -3x + 1$, $f_6(x) = -\frac{5}{3}x + 2$.

Wypiszemy pary funkcji liniowych, których wykresy są prostymi prostopadłymi.

Rozwiązanie:

Funkcje liniowe, których wykresy są prostymi prostopadłymi: f_1 i f_6 , f_2 i f_5 , f_3 i f_4 .

Przykład 3

Wyznamy wzór funkcji liniowej g , której wykres jest prostą prostopadłą do prostej, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = -3x - 1$, a do wykresu funkcji g należy punkt o współrzędnych $(1, -3)$.

Rozwiązanie:

Określmy funkcję g wzorem $g(x) = ax + b$.

Ponieważ prosta, będąca wykresem funkcji g jest prostopadła do prostej, będącej wykresem funkcji f , to $a = \frac{1}{3}$.

Wzór funkcji g zapisujemy w postaci $g(x) = \frac{1}{3}x + b$.

Ponieważ punkt o współrzędnych $(1, -3)$ należy do wykresu tej funkcji, zatem do wyznaczenia wartości b rozwiążemy równanie:

$$-3 = \frac{1}{3} \cdot 1 + b, \text{ wobec tego } b = -\frac{10}{3}.$$

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$.

Przykład 4

Określmy, dla jakiej wartości parametru m proste, będące wykresami funkcji określonych wzorami $f(x) = -2x + 4$ oraz $g(x) = (\frac{1}{2}m + 3)x - 1$ są prostopadłe.

Rozwiązanie:

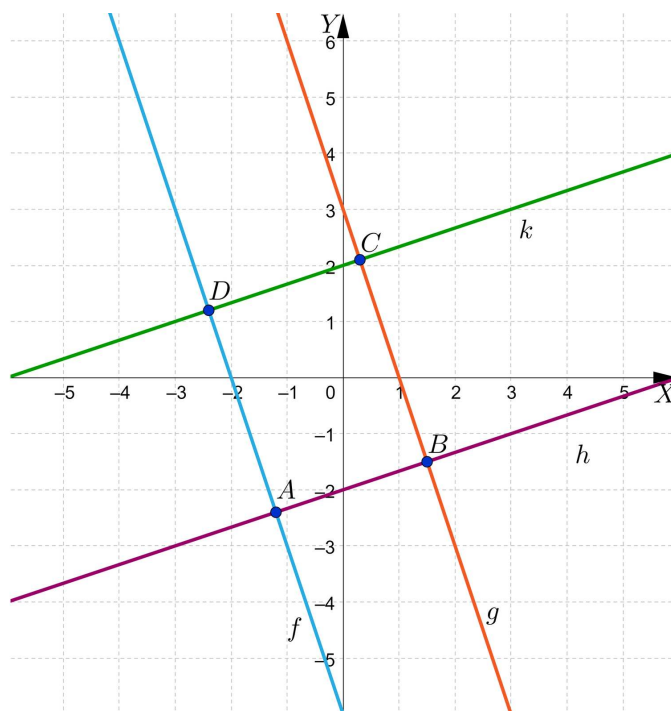
Wiadomo, że proste, będące wykresami funkcji liniowych to **proste prostopadłe**, gdy współczynniki a w ich wzorach są liczbami przeciwnymi i odwrotnymi:

Zatem do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{2}m + 3 = \frac{1}{2}, \text{ wobec tego } m = -5.$$

Przykład 5

Proste, będące wykresami funkcji f, g, h, k na poniższym rysunku przecięły się w punktach A, B, C i D i utworzyły prostokąt $ABCD$.



Wyznaczymy wzory tych funkcji.

Rozwiązanie:

Wyznaczymy wzór funkcji f .

Niech $f(x) = ax + b$.

Z wykresu tej funkcji możemy odczytać, że należą do niego punkty o współrzędnych $(-1, -3)$ oraz $(0, -6)$.

Zatem do wyznaczenia wartości a i b rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -6 = a \cdot 0 + b \\ -3 = a \cdot (-1) + b \end{cases}$$

Zatem $a = -3$ oraz $b = -6$.

Funkcja f wyraża się wzorem $f(x) = -3x - 6$.

Wyznamy wzór funkcji h .

Niech $h(x) = ax + b$.

Proste, będące wykresami funkcji f i h są prostopadłe, zatem $a = \frac{1}{3}$.

Wobec tego $h(x) = \frac{1}{3}x + b$.

Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(3, -1)$, zatem do wyznaczenia b rozwiązujemy równanie:

$$-1 = \frac{1}{3} \cdot 3 + b, \text{ wobec tego } b = -2.$$

Funkcja h wyraża się wzorem $h(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

Wyznamy wzór funkcji g .

Niech $g(x) = ax + b$.

Proste, będące wykresami funkcji g i h są prostopadłe, zatem $a = -3$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $g(x) = -3x + b$.

Ponieważ do wykresu funkcji g należy punkt o współrzędnych $(2, -3)$, zatem do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$-3 = -3 \cdot 2 + b, \text{ wobec tego } b = 3.$$

Funkcja g wyraża się wzorem $g(x) = -3x + 3$.

Wyznamy wzór funkcji k .

Niech $k(x) = ax + b$.

Proste, będące wykresami funkcji g i k są prostopadłe, zatem $a = \frac{1}{3}$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $k(x) = \frac{1}{3}x + b$.

Ponieważ do wykresu funkcji g należy punkt o współrzędnych $(3, 3)$, zatem do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$3 = \frac{1}{3} \cdot 3 + b, \text{ wobec tego } b = 2.$$

Funkcja k wyraża się wzorem $k(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

Przykład 6

Wykażemy, że jeśli proste, będące wykresami funkcji liniowych f i g określonych wzorami $f(x) = ax$ oraz $g(x) = -ax$ są prostymi prostopadłymi, to $a = 1$ lub $a = -1$.

Rozwiązanie:

Wiadomo, że proste, które są wykresami funkcji liniowych, są prostopadłe, gdy ich współczynniki kierunkowe są liczbami przeciwnymi i odwrotnymi.

Zauważmy, że współczynniki liniowe prostych będących wykresami funkcji liniowych f i g wynoszą odpowiednio: a oraz $-a$.

Z warunku prostopadłości tych prostych układamy i rozwiązujemy równanie:

$$a \cdot (-a) = -1$$

$$a^2 = 1$$

Zatem $a = 1$ lub $a = -1$.

Słownik

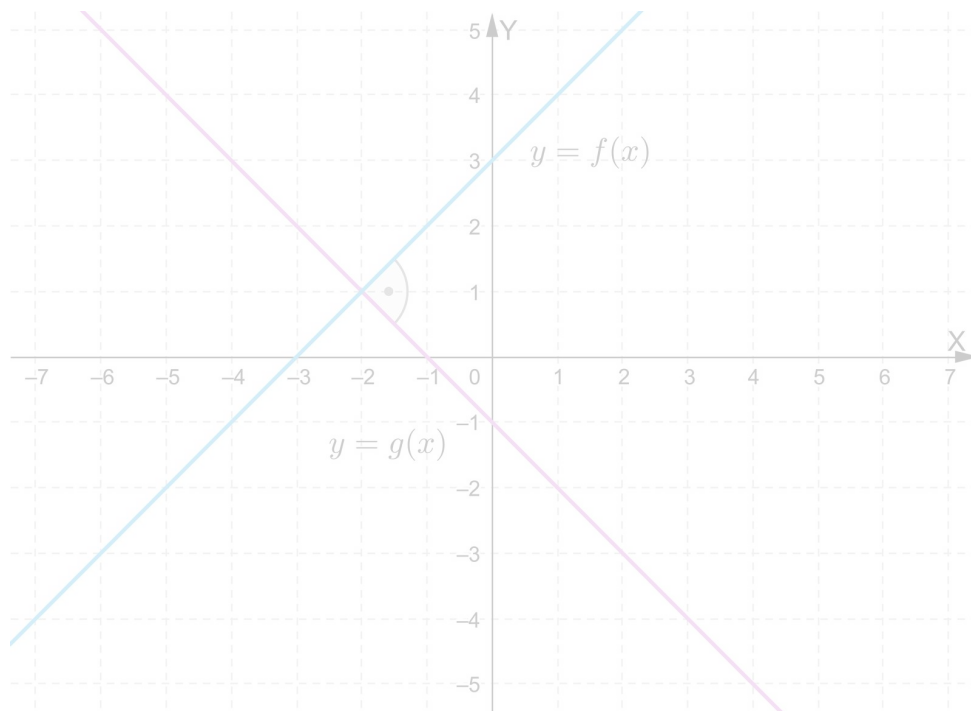
proste prostopadłe

wykresy funkcji liniowych, określonych wzorami, w których współczynniki kierunkowe są liczbami przeciwnymi i odwrotnymi

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną, a następnie zwróć uwagę na wartości współczynników kierunkowych we wzorach funkcji f i g oraz położenie prostych, które są wykresami tych funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DrpLa28If>

Polecenie 2

Dane są wzory funkcji liniowych f i g . Wstaw takie liczby, aby proste, które są wykresami tych funkcji były prostopadłe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

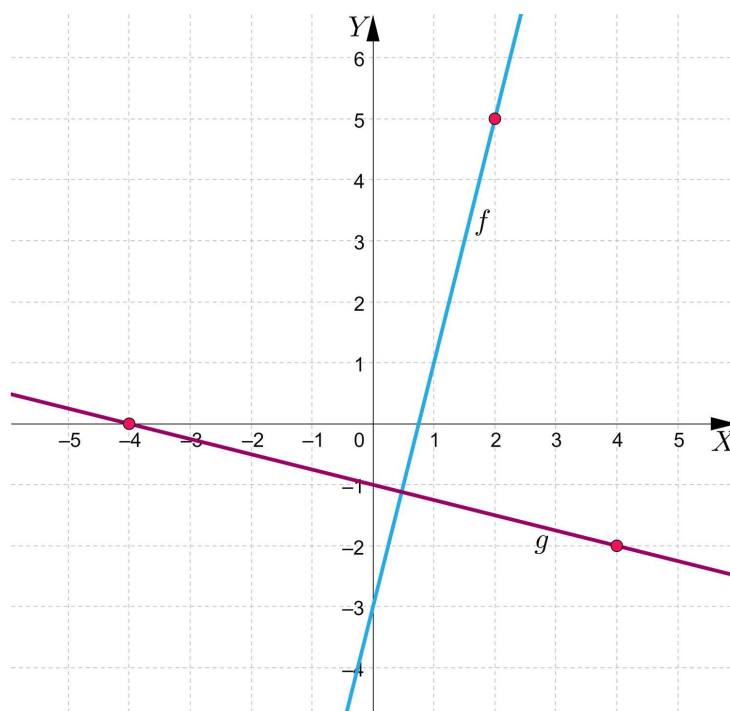


Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Zaznacz prawidłową odpowiedź.



Ćwiczenie 4



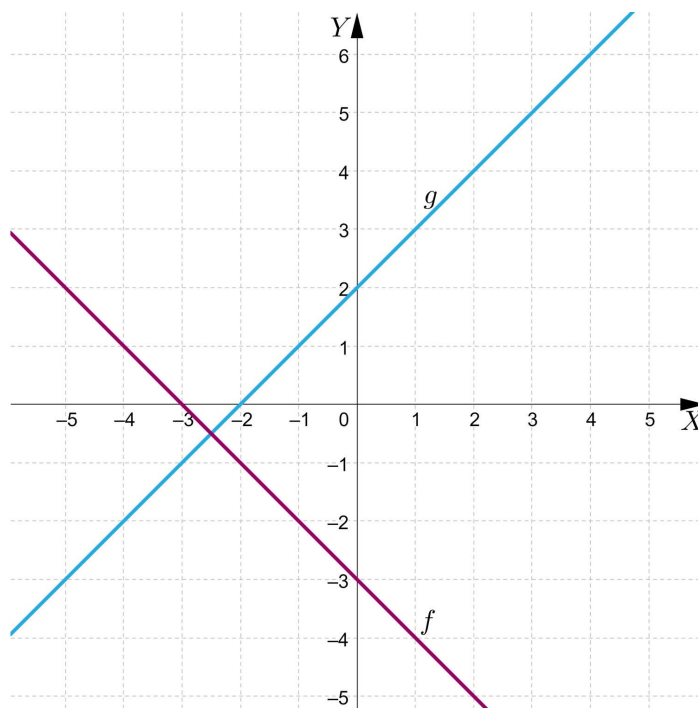
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono proste prostopadłe, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$. Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.



Ćwiczenie 7



Wyznacz wzór funkcji liniowej g , jeżeli wiadomo, że do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, -1)$ oraz prosta, będąca wykresem tej funkcji jest prostopadła do prostej będącej wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -5x + 4$.

Ćwiczenie 8



Określ, dla jakiej wartości parametru m proste, będące wykresami funkcji liniowych zadanych wzorami $f(x) = \left(-\frac{1}{5}m + 2\right)x + 1$ oraz $g(x) = -5x + 1$ są prostopadłe.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prostopadłość wykresów funkcji liniowych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa warunek, jaki muszą spełniać wzory funkcji liniowych, aby proste, będące wykresami tych funkcji były prostopadłe;
- wskazuje na podstawie wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są prostymi prostopadłymi;
- wyznacza wartości parametrów we wzorach funkcji liniowych, dla których proste, będące wykresami tych funkcji są prostopadłe;
- wykorzystuje warunek prostopadłości prostych, będących wykresami funkcji liniowych do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- metoda kota i myszy;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Prostopadłość wykresów funkcji liniowych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Symulacja interaktywna” i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść, wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się” metodą kota i myszy. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3, 4 i 5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają właściwe rozwiązanie.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i omawiają rozwiązania z całą klasą.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Proste równoległe, proste prostopadłe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Symulacja interaktywna” można wykorzystać jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie badania prostopadłości prostych, będących wykresami funkcji liniowych.
- „Symulację interaktywną” można wykorzystać do określania wzajemnego położenia prostych, będących wykresami funkcji liniowych.