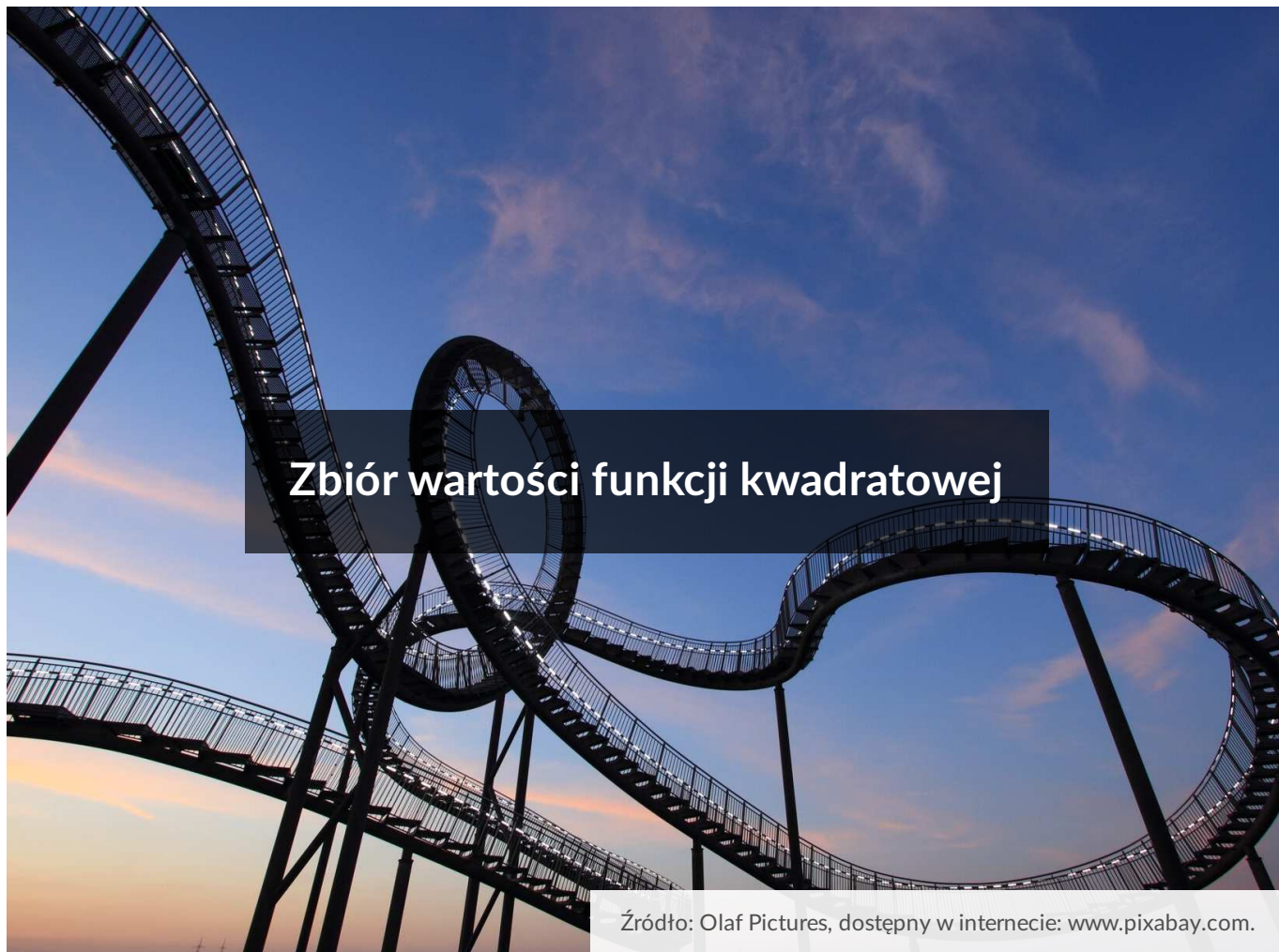




Zbiór wartości funkcji kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Każda funkcja, w tym dowolna funkcja kwadratowa, posiada dziedzinę i zbiór wartości, które pozwalają określić jej własności. Wyznaczanie zbioru wartości funkcji kwadratowej znajduje szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu różnych problemów matematycznych.

Twoje cele

- Określisz zbiór wartości dowolnej funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru lub wykresu.
- Ustalisz, od czego zależy zbiór wartości funkcji kwadratowej.
- Wyznaczysz wzór funkcji kwadratowej mając informacje o jej zbiorze wartości.

Przeczytaj

Zbiorem wartości dowolnej funkcji liczbowej jest zbiór wszystkich tych liczb, które są wartościami funkcji dla wszystkich jej argumentów.

Ważne!

Intuicyjnie zbiór wartości funkcji określamy jako zbiór tych liczb, które otrzymujemy poprzez podstawienie do wzoru funkcji wszystkich elementów z dziedziny tej funkcji.

Znając współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$ paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej oraz wartość współczynnika a możemy wyznaczyć **zbiór wartości funkcji** kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- dla $a > 0$ (ramiona paraboli skierowane są w górę) oraz $q = \frac{-\Delta}{4a}$, zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest przedział $\langle q, \infty$, funkcja osiąga wówczas wartość najmniejszą w wierzchołku $W = (p, q)$;
- dla $a < 0$ (ramiona paraboli skierowane są w dół) oraz $q = \frac{-\Delta}{4a}$, zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest przedział $(-\infty, q]$, funkcja osiąga wówczas wartość największą w wierzchołku $W = (p, q)$.

Przykład 1

Wyznamy **zbiór wartości funkcji** $f(x) = -3x^2 + x + 4$.

W tym celu odczytujemy wartość współczynnika a , obliczamy Δ oraz q .

Otrzymujemy, że $a = -3$ oraz $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 1 + 48 = 49$.

Zatem $q = \frac{-49}{4 \cdot (-3)} = \frac{-49}{-12} = \frac{49}{12}$.

Ponieważ $a < 0$ oraz $q = \frac{49}{12}$, zatem zbiorem wartości funkcji $f(x)$ jest przedział $(-\infty, \frac{49}{12}]$.

Ważne!

Jeżeli funkcja kwadratowa jest przedstawiona w postaci kanonicznej tj.

$f(x) = a(x - p)^2 + q$, wówczas jej **zbiór wartości** możemy wyznaczyć bez wykonywania obliczeń.

Przykład 2

Wyznamy **zbiór wartości funkcji** kwadratowej $f(x) = 2(x - 1)^2 - 12$.

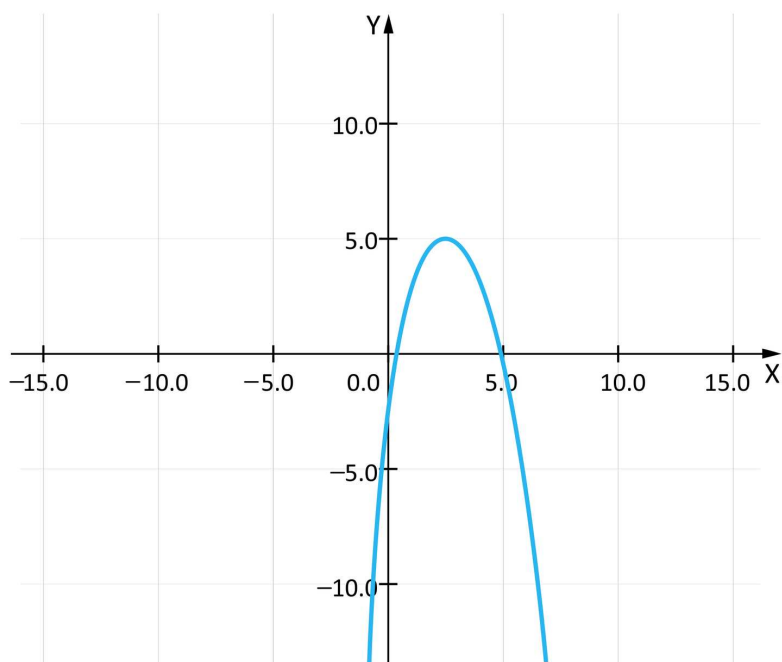
Ponieważ $a = 2$ i $q = -12$, zatem zbiorem wartości funkcji $f(x)$ jest przedział $\langle -12, \infty \rangle$.

Ważne!

Jeżeli pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli jest p , to wartość drugiej współrzędnej q można obliczyć z zależności $f(p) = q$.

Przykład 3

Wyznamy zbiór wartości funkcji, której wykres przedstawiono poniżej.



Odczytujemy, że zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, 5)$.

Przykład 4

Wyznamy zbiór wartości funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

Obliczamy $p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$ oraz $q = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 0$.

Ponieważ $a < 0$ oraz $q = 0$, zatem zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, 0)$.

Przykład 5

Wyznamy zbiór wartości funkcji $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$, jeżeli jej dziedziną jest przedział $\langle -1, 4 \rangle$.

W tym celu obliczamy wartości funkcji na końcach podanego przedziału. Otrzymujemy

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 3 + 6 + 5 = 14,$$

$$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = 48 - 24 + 5 = 29.$$

Następnie obliczamy współrzędną p wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji. Otrzymujemy

$$p = \frac{6}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1.$$

Ponieważ $p = 1 \in \langle -1, 4 \rangle$, więc wyznaczamy wartość

$$q = f(p) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 3 - 6 + 5 = 2.$$

Najmniejszą wartością tej funkcji w podanym przedziale jest 2, a największą 29, zatem zbiorem wartości jest przedział $\langle 2, 29 \rangle$.

Wyznaczenie **zbioru wartości funkcji** kwadratowej pozwala na rozwiązywanie bardziej złożonych problemów matematycznych.

Przykład 6

Wyznamy, dla jakiej wartości parametru a zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + a$ jest przedział $\langle 3, \infty \rangle$.

Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest większy od zera, zatem zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle a, \infty \rangle$.

Stąd otrzymujemy, że $a = 3$.

Przykład 7

Ile liczb całkowitych ujemnych należy do zbioru wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$?

$$\text{Obliczamy wartość } q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2))}{4 \cdot 2} = \frac{-32}{8} = -4.$$

Ponieważ $a > 0$ oraz $q = -4$, więc zbiorem wartości funkcji $f(x)$ jest przedział $\langle -4, \infty \rangle$.

Do przedziału $\langle -4, \infty \rangle$ należą 4 liczby całkowite ujemne $(-4), (-3), (-2), (-1)$.

Przykład 8

Wyznamy wzór funkcji kwadratowej f , jeżeli wiadomo, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty, -3)$, osią symetrii paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest prosta o równaniu $x = -2$ i do wykresu należy punkt o współrzędnych $(0, -7)$.

Ponieważ osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji jest prosta $x = -2$, zatem $p = -2$.

Jeżeli zbiorem wartości funkcji kwadratowej jest przedział $(-\infty, -3)$, to $q = -3$.

Wzór funkcji możemy zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = a(x + 2)^2 - 3$.

Ponieważ punkt o współrzędnych $(0, -7)$ należy do wykresu tej funkcji, zatem do wyznaczenia wartości współczynnika a rozwiązujemy równanie

$$-7 = a \cdot (0 + 2)^2 - 3, \text{ czyli } a = -1.$$

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = -(x + 2)^2 - 3$.

Słownik

zbiór wartości funkcji

zbiór wszystkich tych liczb, które można otrzymać w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj animację, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfthFqXtK>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego zbioru wartości funkcji kwadratowej.

Polecenie 2

Na podstawie animacji wyznacz zbiór wartości funkcji kwadratowej opisanej wzorem:

a) $f(x) = 3 \cdot (x + 3)(x - 2)$

b) $f(x) = -2 \cdot (x - 2)^2 + 3$

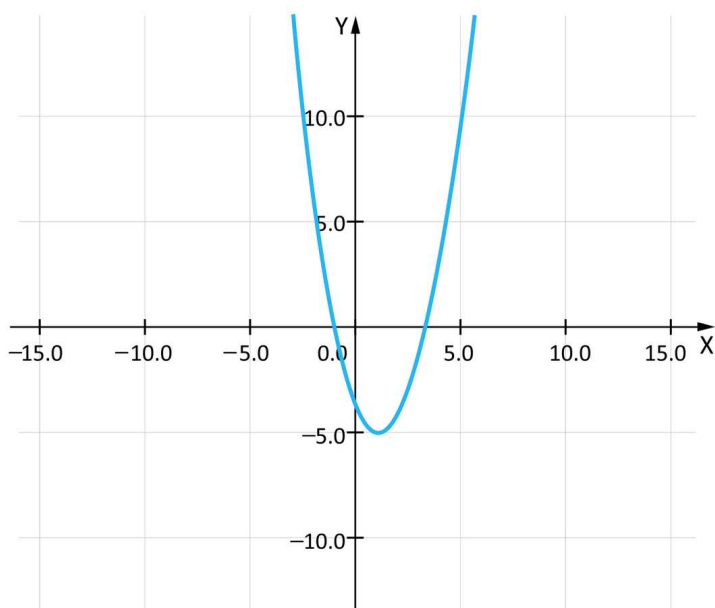
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na poniższym rysunku przedstawiono parabolę.



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zbiór wartości funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje od czego zależy zbiór wartości funkcji kwadratowej;
- wyznacza zbiór wartości dowolnej funkcji kwadratowej na podstawie wzoru lub wykresu;
- analizuje i sprawdza, ile liczb spełniających podany warunek należy do zbioru wartości funkcji kwadratowej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie przypominają znane im wiadomości o funkcji kwadratowej. Rysują na tablicy kilka wykresów funkcji kwadratowej i omawiają jej własności.

Nauczyciel podaje temat i cele lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z treścią z sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zbiór wartości funkcji kwadratowej” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze

- [Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej](#)
- [Współrzędne wierzchołka paraboli](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu związanego ze zbiorem wartości funkcji kwadratowej.
- Animację można wykorzystać na lekcji poświęconej odczytywaniu własności funkcji kwadratowej z wykresu.