



Równanie prostej równoległej do prostej $Ax + By + C = 0$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie prostej równoległej do prostej

$$Ax + By + C = 0$$

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Euklides twierdził, że dwie proste są równoległe, gdy nie przecinają się w żadnym punkcie lub mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, tzn. pokrywają się. W życiu codziennym możemy spotkać wiele przykładów prostych równoległych, m.in. w układzie torów kolejowych, czy na skrzyżowaniach. Podczas lekcji omówimy warunek równoległości dla prostych zadanych równaniami w postaci ogólnej.

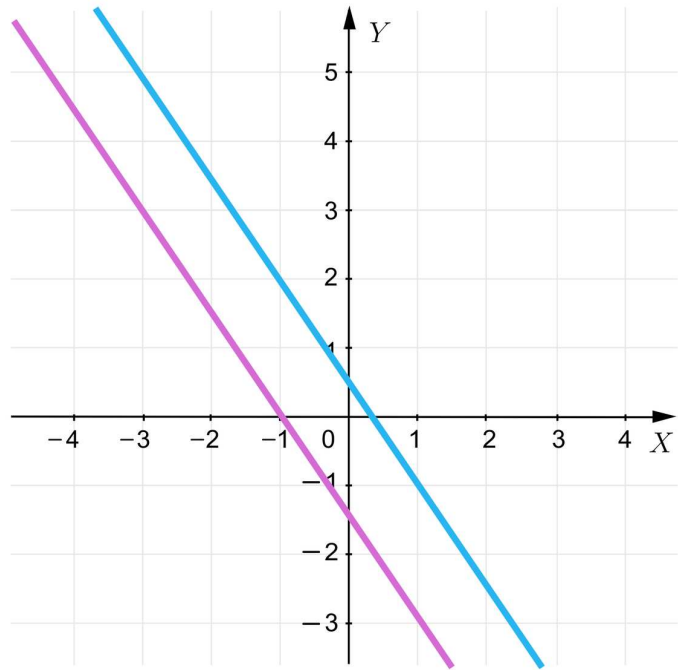
Twoje cele

- Dowiesz się, jaki jest warunek równoległości prostych na płaszczyźnie, jeżeli zadane są równaniami w postaci ogólnej.
- Przypomnisz sobie, kiedy proste o równaniach w postaci kierunkowej są równoległe.
- Wykorzystasz warunek równoległości prostych do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Już wiesz

Proste o równaniach w postaci kierunkowej $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe, gdy zachodzi warunek $a_1 = a_2$ (czyli, gdy mają ten sam współczynnik kierunkowy).



Definicja: równanie ogólne prostej

Równanie $Ax + By + C = 0$ nazywamy równaniem ogólnym prostej, gdy A i B nie są jednocześnie równe 0.

Twierdzenie: warunek równoległości prostych

Proste o równaniach w postaci ogólnej $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe, gdy zachodzi warunek:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

Dowód

Sprowadzimy równania ogólne prostych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ do postaci kierunkowej.

Otrzymujemy następujące równania kierunkowe prostych : $y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$ oraz $y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$.

Wiemy, że proste w postaci kierunkowej są równoległe, gdy mają ten sam współczynnik kierunkowy.

Wykorzystując ten warunek otrzymujemy równanie $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$, a dalej $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, co po przekształceniu daje $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Ważne!

Proste o równaniach ogólnych:

- $A_1x + C_1 = 0$ i $A_2x + C_2 = 0$ są zawsze równoległe, gdy $A_1 \neq 0$ i $A_2 \neq 0$,
- $B_1y + C_1 = 0$ i $B_2y + C_2 = 0$ są zawsze równoległe, gdy $B_1 \neq 0$ i $B_2 \neq 0$.

Przykład 1

Sprawdźmy, czy proste o równaniach $2x - 3y + 5 = 0$ oraz $-3x + 2y - 1 = 0$ są równoległe.

Otrzymujemy dane: $A_1 = 2$, $A_2 = -3$, $B_1 = -3$ oraz $B_2 = 2$.

Podstawiamy dane do równania $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Otrzymujemy w ten sposób $2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) = 4 - 9 = -5 \neq 0$.

Warunek nie jest spełniony, zatem proste o podanych równaniach nie są równoległe.

Przykład 2

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m , proste o równaniach $3x + (2 - m)y + 1 = 0$ oraz $(2 + m)x - 4y - 3 = 0$ są **równoległe**.

Otrzymujemy dane: $A_1 = 3$, $A_2 = 2 + m$, $B_1 = 2 - m$, $B_2 = -4$.

Podstawiamy dane do warunku $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Otrzymujemy równanie $(-4) \cdot 3 - (2 - m)(2 + m) = 0$, które sprowadzamy do postaci $m^2 = 16$.

Równanie jest spełnione dla $m = 4$ lub $m = -4$.

Przykład 3

Wyznamy, dla jakich wartości parametru a proste o równaniach $-4x + y - 3 = 0$ oraz $y = ax + 1$ są równoległe.

Przekształcimy równanie drugiej prostej do postaci ogólnej: $ax - y + 1 = 0$.

Otrzymujemy dane: $A_1 = -4$, $B_1 = 1$, $A_2 = a$, $B_2 = -1$.

Podstawiając do równania $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, otrzymujemy, że $(-4) \cdot (-1) - a = 0$, zatem $a = 4$.

Przykład 4

Wyznamy równanie ogólne prostej równoległej do prostej o równaniu $2x - y + 5 = 0$, przechodzącej przez punkt $A = (1, 2)$.

Prostą daną równaniem w postaci ogólnej oznaczmy jako $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Wykorzystamy warunek równoległości $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Otrzymujemy dane: $A_1 = 2$ i $B_1 = -1$.

Po podstawieniu do warunku równoległości otrzymujemy, że $2B_2 + A_2 = 0$.

Przekształcając równanie otrzymujemy $-\frac{A_2}{B_2} = 2$.

Zauważmy, że jest to wartość współczynnika kierunkowego a (na podstawie dowodu twierdzenia) dla prostej $y = ax + b$.

Zatem prosta równoległa jest postaci $y = 2x + b$.

Jeżeli do równania podstawimy punkt $A = (1, 2)$, to otrzymujemy, że $b = 0$.

Szukana prosta ma zatem postać ogólną $2x - y = 0$.

Przykład 5

Wyznamy równanie prostej, której miejscem zerowym jest liczba 2, równoległej do prostej $x - 3y + 1 = 0$.

Prosta równoległa ma równanie $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Wykorzystamy warunek $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Z treści zadania wiemy, że $A_1 = 1$, $B_1 = -3$.

Po podstawieniu do równania otrzymujemy, że $B_2 + 3A_2 = 0$, stąd obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $-\frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{3}$.

Korzystając z postaci kierunkowej, możemy zapisać, że $y = \frac{1}{3}x + b$.

Wiemy, że liczba 2 jest miejscem zerowym, a zatem współczynnik $b = -\frac{2}{3}$.

Po przekształceniu do postaci ogólnej, szukana prosta równoległa to $x - 3y - 2 = 0$.

Słownik

warunek równoległości prostych

proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe, gdy
 $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6bbx59U>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej równania opisującego prostą równoległą do prostej zadanej wzorem ogólnym.

Polecenie 2

Wyznacz, dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $2x - 5y + 1 = 0$ oraz $(3m - 1)x - (m + 4)y + 2 = 0$ są równoległe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Proste o równaniach $3x - 4y + 1 = 0$ oraz $-3x + 4y + 5 = 0$:

☐ są prostopadłe.

☐ są równoległe.

☐ przecinają się w jednym punkcie.

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równania prostych, które są równoległe:

$$-x + y + 1 = 0$$

$$y = 2x - 5$$

$$-3x - 3y - 2 = 0$$

$$y = -x + 2$$

$$-4x - 2y + 3 = 0$$

$$y = x - 6$$

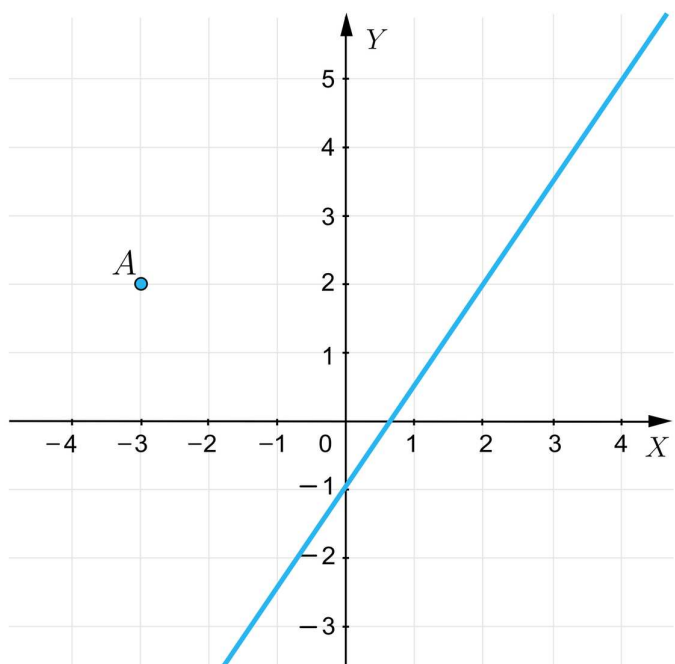
$$-2x + y - 6 = 0$$

$$y = -2x + 1$$

Ćwiczenie 3



Przeciągnij i upuść.



Równanie prostej równoległej do prostej z rysunku, przechodzącej przez punkt A , jest postaci

☐ $3x - 2y + 5 = 0$

☐ $3x - 2y - 1 = 0$

☐ $3x - 2y + 13 = 0$

Ćwiczenie 4



Prosta przechodząca przez punkty $A = (0, -2)$ i $B = (2, 2)$ oraz prosta przechodząca przez punkty $C = (0, 3)$ i $D = (2, 7)$, są równoległe.

☐ NIE

☐ TAK

Ćwiczenie 5



Proste o równaniach $x - 2y = 0$ oraz $mx + 2y = 0$ są równoległe, gdy:

☐ $m = 0$

☐ $m = -1$

☐ $m = 1$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

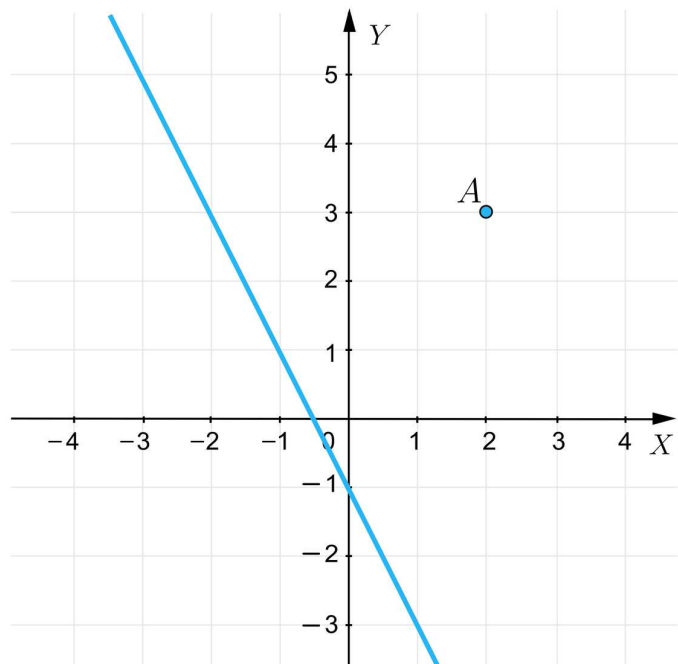
Proste o równaniach $mx + y + 3 = 0$ oraz $-4x - my + 5 = 0$ są równoległe, gdy $m =$

lub $m =$.

Ćwiczenie 7



Zapoznaj się z rysunkiem przedstawiającym ukośną prostą oraz punkt.



Wybierz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Prosta równoległa do prostej z rysunku, przechodząca przez punkt A :

☐ przechodzi przez punkt $(1, 5)$.

☐ ma równanie $2x + y - 7 = 0$.

☐ ma równanie $2x + y - 5 = 0$.

☐ przechodzi przez punkt $(0, 5)$.

Ćwiczenie 8



Wyznacz równanie prostej w postaci ogólnej równoległej do prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$, przecinającej oś Y w punkcie $(0, -3)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie prostej równoległej do prostej $Ax + By + C = 0$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostotałość do innej prostej, styczność do okręgu);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- wykorzystuje zależność równoległości prostych zapisanych w postaci ogólnej;
- znajduje wartości parametrów w równaniu ogólnym prostej;
- rozwiązuje problemy matematyczne z zastosowaniem poznanej zależności.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Równanie prostej równoległej do prostej $Ax + By + C = 0$ ” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 – „Obejrzyj animację” z sekcji „Film samouczek”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Równanie prostej równoległej do prostej $Ax + By + C = 0$ ” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Proste równoległe, proste prostopadłe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Równanie prostej równoległej do prostej $Ax + By + C = 0$ ”.