



Graficzne rozwiązywanie równań kwadratowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Graficzne rozwiązywanie równań kwadratowych

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Znasz już interpretację graficzną równania kwadratowego zupełnego. Wiesz, że położenie paraboli $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla $a \neq 0$ w układzie współrzędnych jest uzależnione od współczynnika a oraz znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego.

W tym materiale będziemy rozwiązywać równania kwadratowe metodą graficzną. Wykorzystamy wykresy funkcji liniowych i kwadratowych do odczytywania liczby rozwiązań równania oraz współrzędnych punktów wspólnych wykresów funkcji.

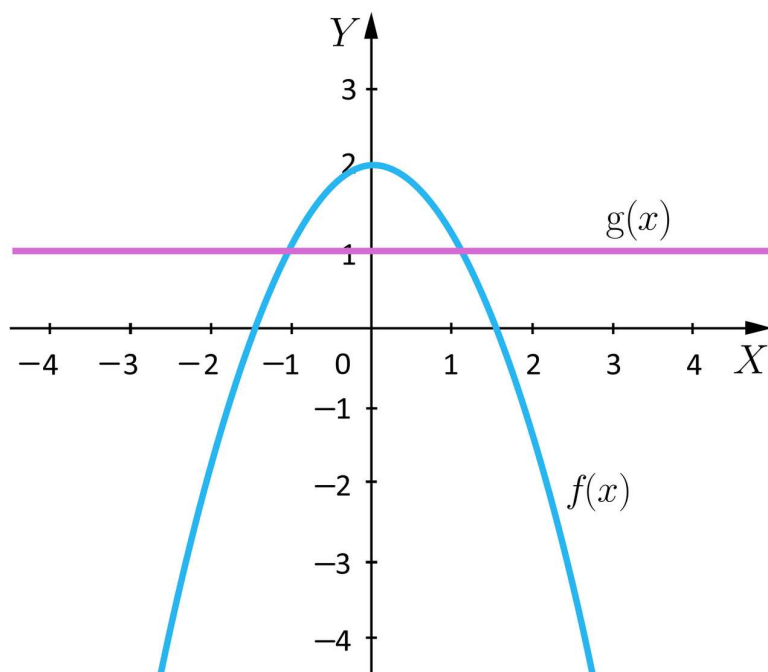
Twoje cele

- Wykorzystasz wykresy funkcji liniowych i kwadratowych do graficznego rozwiązywania równań.
- Odczytasz z wykresu liczbę punktów wspólnych prostej i paraboli.
- Odczytasz z wykresu współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli, paraboli i paraboli.

Przeczytaj

Przykład 1

Korzystając z interpretacji graficznej, rozwiążemy równanie $-x^2 + 2 = 1$.



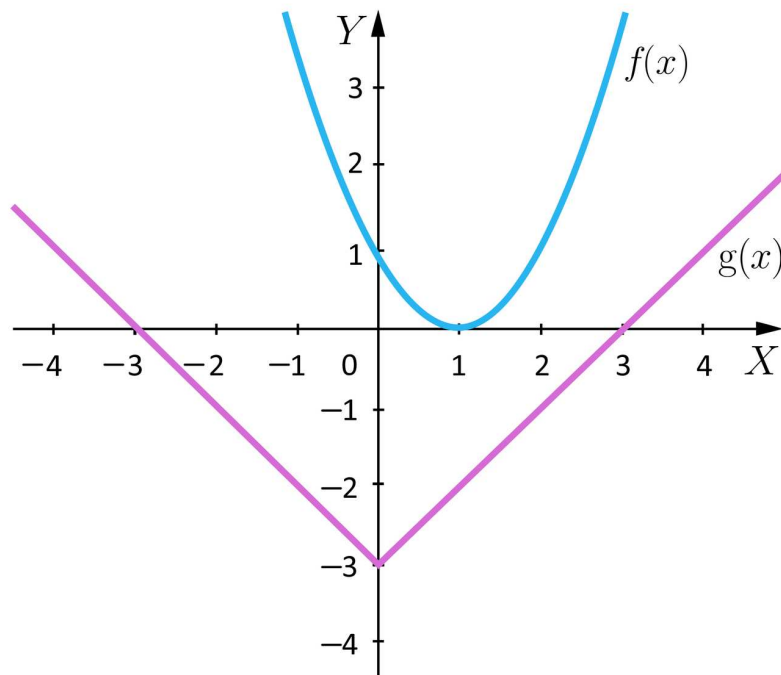
W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ oraz $g(x) = 1$.

[Parabola](#) i prosta przecinają się w punktach o współrzędnych $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

Rozwiązaniem równania $-x^2 + 2 = 1$ są liczby $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Przykład 2

Korzystając z interpretacji graficznej, określimy liczbę rozwiązań równania $(x - 1)^2 = |x| - 3$.



W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji $f(x) = (x - 1)^2$ oraz $g(x) = |x| - 3$. Wykresy tych funkcji nie mają punktów wspólnych, zatem równanie $(x - 1)^2 = |x| - 3$ jest sprzeczne. Nie posiada rozwiązania.

Przykład 3

Rozwiążemy graficznie równanie $(x - 2)^2 - 2 = -x^2 + 2$.

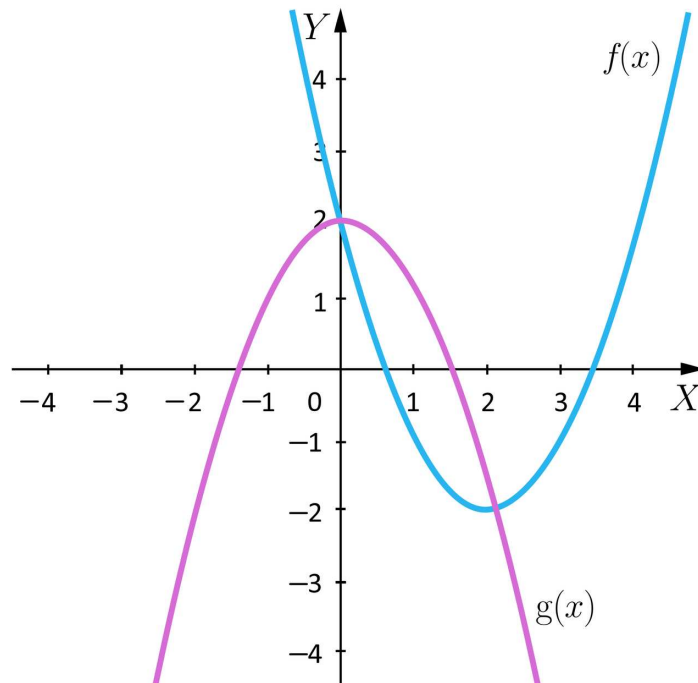
W układzie współrzędnych narysujemy wykres funkcji $f(x) = (x - 2)^2 - 2$ oraz wykres funkcji $g(x) = -x^2 + 2$.

Wykres funkcji $f(x)$ otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $h(x) = x^2$ o wektor $[2, -2]$.

Współczynnik $a = 1 > 0$ zatem ramiona paraboli skierowane są „do góry”, a wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie $(2, -2)$.

Wykres funkcji $g(x)$ otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $h(x) = -x^2$ o wektor $[0, 2]$.

Współczynnik $a = -1 < 0$ zatem ramiona paraboli skierowane są „do dołu”, a wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie $(0, 2)$.

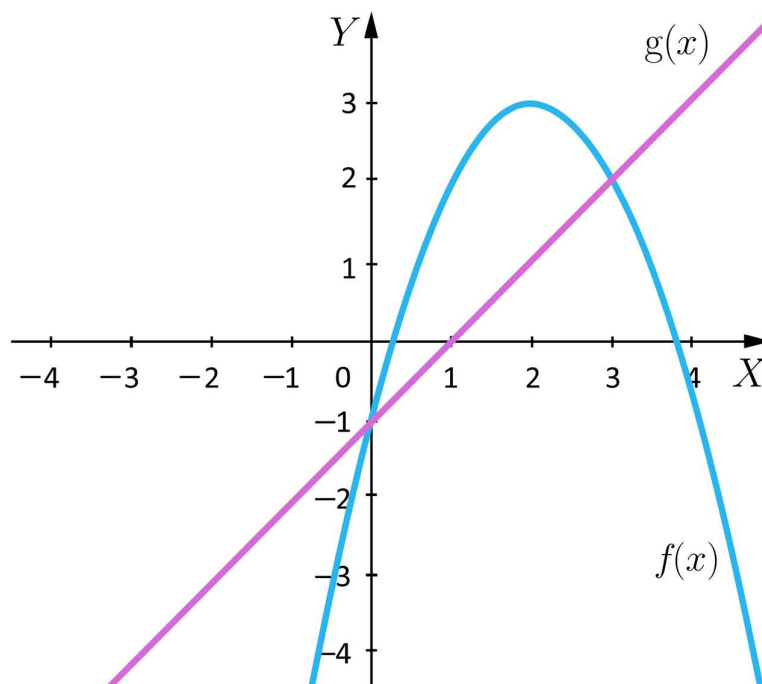


Parabole $f(x) = (x - 2)^2 - 2$ i $g(x) = -x^2 + 2$ przecinają się w punktach $(0, 2)$ i $(2, -2)$.

Równanie $(x - 2)^2 - 2 = -x^2 + 2$ ma dwa rozwiązania: $x = 0, x = 2$.

Przykład 4

Znajdziemy taką wartość parametrów m i b , dla których poniższy rysunek przedstawia interpretację graficzną równania $-x^2 + mx - 1 = x + b$.



W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + mx - 1$ oraz $g(x) = x + b$.

Współczynnik a paraboli jest równy (-1) , a wierzchołek znajduje się w punkcie o współrzędnych $(2, 3)$. Zatem odpowiadającą parabolę funkcję możemy zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$.

Przekształcimy wzór funkcji f do postaci ogólnej.

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - 2)^2 + 3 = -(x^2 - 4x + 4) + 3 = -x^2 + 4x - 4 + 3 = \\ &= -x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

Zatem $m = 1$.

Wykres funkcji liniowej $g(x) = x + b$ przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, -1)$ zatem $b = -1$.

Przykład 5

Na podstawie interpretacji graficznej równania $-(x - 2)^2 + 3 = |2x|$ określimy liczbę jego rozwiązań.

W układzie współrzędnych narysowane są wykresy funkcji

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 3 \text{ oraz } g(x) = |2x|.$$

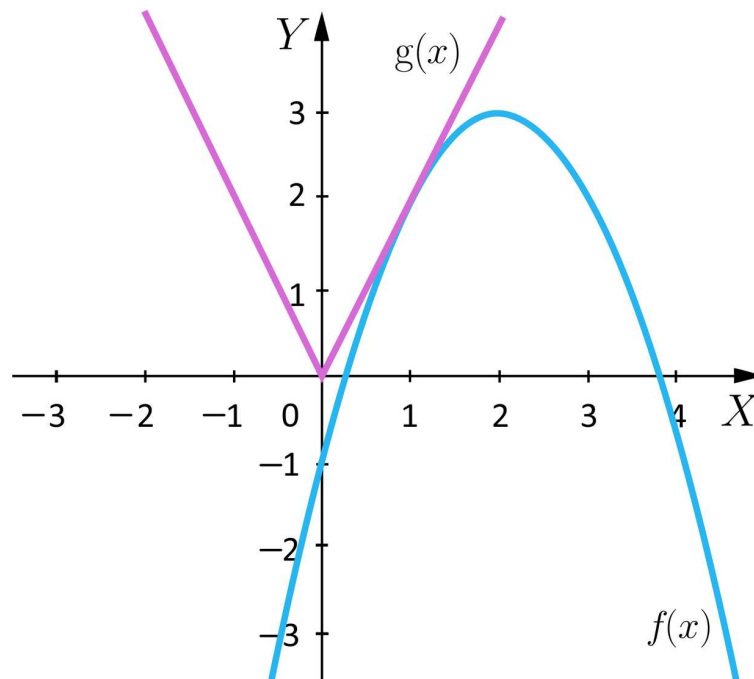
Wykres funkcji $f(x)$ otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji $h(x) = -x^2$ o wektor $[2, 3]$.

Współczynnik $a = -1 < 0$ zatem ramiona paraboli skierowane są „do dołu”, a wierzchołek znajduje się w punkcie $(2, 3)$.

Funkcję $g(x) = |2x|$ zapiszemy w postaci:

$$g(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \geq 0 \\ 2x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Zatem możemy przedstawić interpretację graficzną równania $-(x - 2)^2 + 3 = |2x|$.



Wykresy funkcji $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$ oraz $g(x) = |2x|$ przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych $(1, 2)$. Zatem równanie ma jedno rozwiązanie.

Słownik

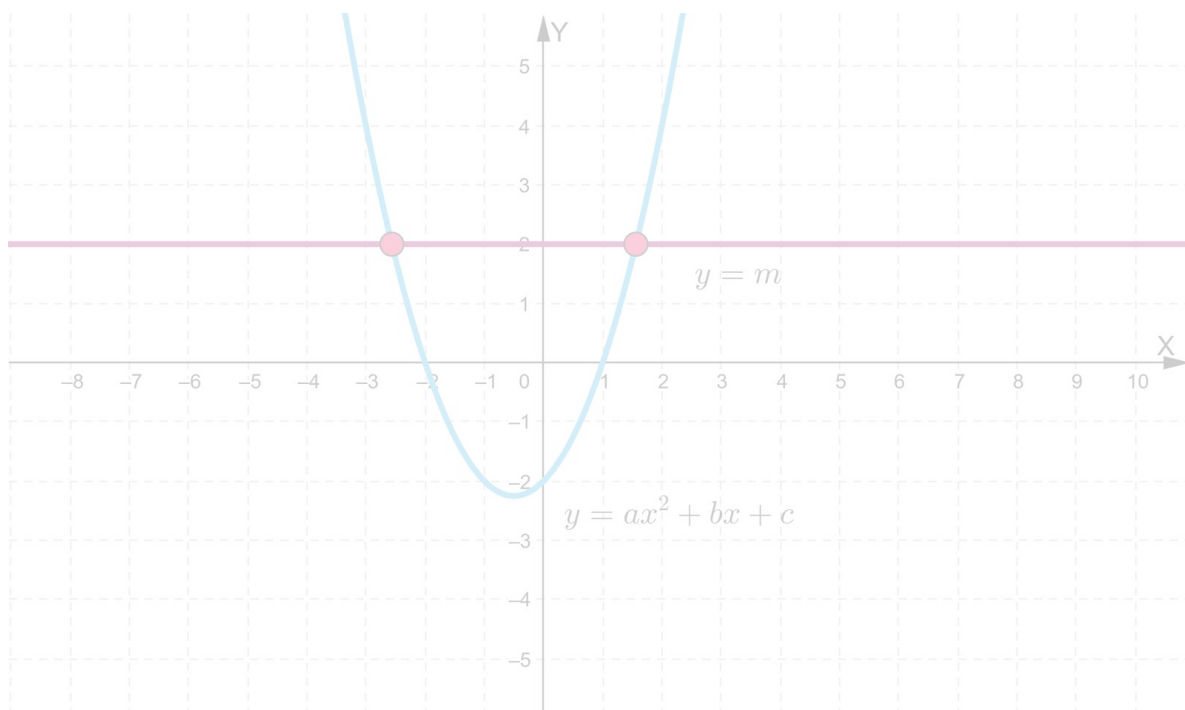
parabola

wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla $a \neq 0$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z symulacją interaktywną pokazującą sposób odczytywania z wykresu odpowiednich funkcji liczby rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DAGyYFWQP>

Polecenie 2

Naszukuj wykres funkcji $f(x) = |-x^2 + 3| - 1$. Podaj liczbę rozwiązań równania $|-x^2 + 3| - 1 = m$ w zależności od parametru m .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

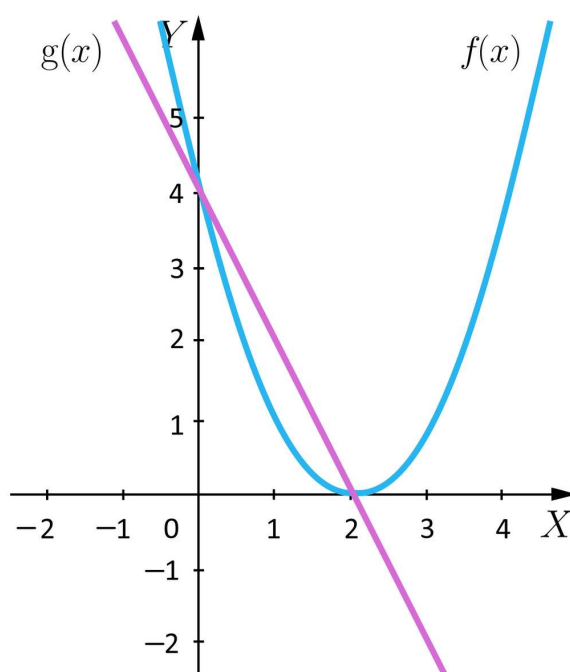
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Wstaw w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby rysunek przedstawiał interpretację graficzną poniższego równania:

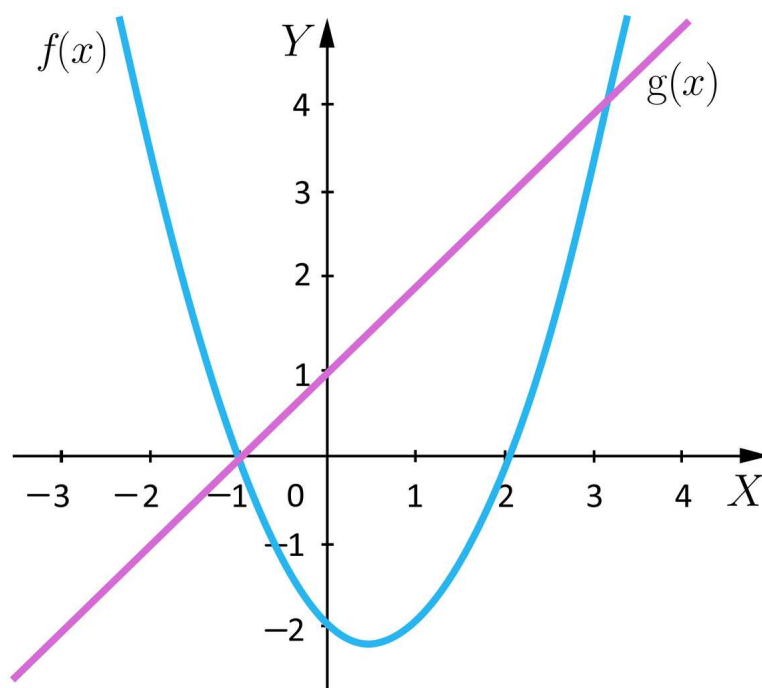


$$(x - 2)^2 = -2x + \boxed{}$$

Ćwiczenie 3



Rysunek przedstawia parabolę i prostą przecinające się w dwóch punktach.



Wybierz równanie kwadratowe, którego interpretacja graficzna jest przedstawiona w układzie współrzędnych.

☐ $x^2 - x + 2 = x + 1$

☐ $x^2 - x - 2 = x + 1$

☐ $x^2 + x + 2 = x - 1$

☐ $x^2 - x - 2 = 2x + 1$

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Rozwiązania równania $(x - 1)^2 - 1 = x - 2$ należą do zbioru:

☐ $\{1, 2\}$

☐ $\{-1, 0\}$

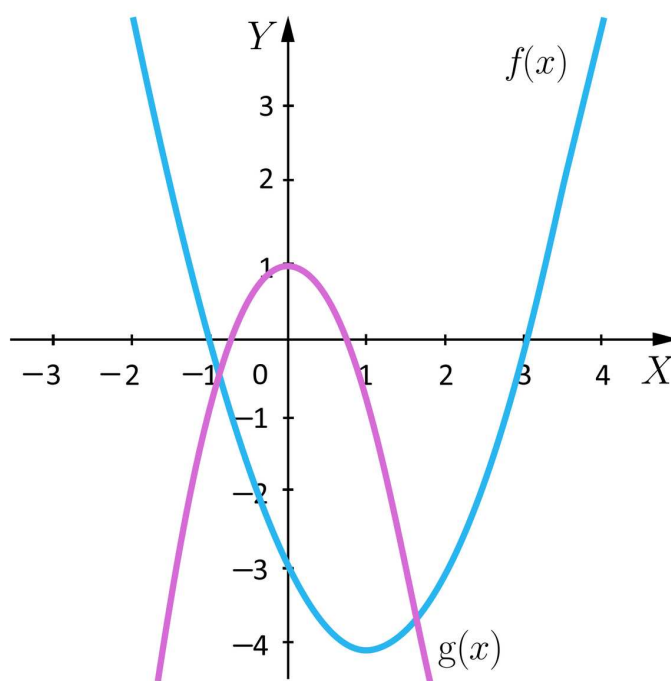
☐ $\{-1, -2\}$

☐ $\{-1, 2\}$

Ćwiczenie 6



Rysunek przedstawia rozwiązanie graficzne poniższego równania.



Przeciągnij w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

$$(x - 1)^2 - \boxed{} = -2x^2 + 1$$

1

-3

-4

4

Ćwiczenie 7



Dla jakiej wartości parametru a rozwiązaniem równania $2 - x^2 = ax + 2$ są liczby należące do zbioru $\{-2, 0\}$? Wpisz poprawną liczbę.

$a =$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż graficznie równanie $-x^2 + 4 = |3x|$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Graficzne rozwiązywanie równań kwadratowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wykresy funkcji liniowych i kwadratowych do graficznego rozwiązywania równań
- odczytuje z wykresu liczbę punktów wspólnych prostej i paraboli
- odczytuje z wykresu współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli, paraboli i paraboli
- dobiera model algebraiczny do sytuacji przedstawionej graficznie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula

- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z równaniami kwadratowymi: pierwiastek równania, wyróżnik trójmianu kwadratowego, miejsce zerowe funkcji kwadratowej, wykres funkcji kwadratowej, postać kanoniczna funkcji kwadratowej.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się w parach wiadomościami dotyczącymi miejsc zerowych i wykresu funkcji kwadratowej oraz postaci funkcji kwadratowej, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe i porównują swoje wiadomości.
2. Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie oglądają symulację interaktywną i ustalają algorytm graficznego poszukiwania rozwiązania równania kwadratowego w zależności od parametru m .
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące graficznego rozwiązywania równań kwadratowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie zadania zawartego w poleceniu 2.

Materiały pomocnicze:

- [Równanie kwadratowe](#)
- [Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie](#)
- [Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej. Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może być wykorzystana przez uczniów jako inspiracja do stworzenia prezentacji multimedialnej.