




## Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Źródło: Nick Hillier, dostępny w internecie: [unsplash.com](https://unsplash.com), domena publiczna.

Jeżeli mamy dodać lub odjąć ułamki zwykłe, sprowadzamy je na początku do wspólnego mianownika. Przy ułamkach algebraicznych będziemy postępować podobnie.

Aby opanować materiał z bieżącego materiału, potrzebnych będzie kilka umiejętności:

- rozkładu wielomianów na czynniki;
- sprowadzania wyrażeń wymiernych do wspólnego mianownika;
- dodawania i odejmowania wyrażeń wymiernych o wspólnym mianowniku.

### Twoje cele

- Zastosujesz wiadomości o rozkładzie wielomianu na czynniki do sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika.
- Dodasz lub odejmiesz tak przekształcone ułamki.
- Sformułujesz warunki, przy których wykonanie podanych działań jest możliwe (określisz dziedzinę).

# Przeczytaj

## Reguła: Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Aby dodać lub odjąć dwa **wyrażenia wymierne**, postępujemy zgodnie z poniższymi krokami.

1. Sprowadzamy je do wspólnego mianownika, uzyskując ułamki postaci  $\frac{F(x)}{P(x)}$  i  $\frac{G(x)}{P(x)}$ ; gdzie  $F(x)$ ,  $G(x)$ ,  $P(x)$  to wielomiany, a wielomian  $P(x)$  nie jest wielomianem zerowym.

2. Dodajemy lub odejmujemy liczniki:

$$\frac{F(x)}{P(x)} + \frac{G(x)}{P(x)} = \frac{F(x)+G(x)}{P(x)};$$

$$\frac{F(x)}{P(x)} - \frac{G(x)}{P(x)} = \frac{F(x)-G(x)}{P(x)}.$$

3. Podajemy założenia wynikające z tego, że mianowniki ułamków nie mogą przyjmować wartości 0.

## Przykład 1

Obliczmy sumę i różnicę ułamków  $\frac{x-5}{x+5}$  i  $\frac{6-x}{3x+15}$ .

- Aby obliczyć sumę, na początek sprowadzamy mianowniki do postaci iloczynowej tak, by łatwo było wyznaczyć wspólny mianownik.

$$\frac{x-5}{x+5} + \frac{6-x}{3x+15} =$$

$$= \frac{x-5}{x+5} + \frac{6-x}{3(x+5)}$$

- Następnie sprowadzamy oba ułamki do wspólnego mianownika - w tym przypadku  $3(x+5)$  - i dodajemy.

$$\frac{x-5}{x+5} + \frac{6-x}{3x+15} =$$

$$= \frac{x-5}{x+5} + \frac{6-x}{3(x+5)} =$$

$$= \frac{3(x-5)}{3(x+5)} + \frac{6-x}{3(x+5)} =$$

$$= \frac{3x-15}{3(x+5)} + \frac{6-x}{3(x+5)} =$$

$$= \frac{3x-15+6-x}{3(x+5)} =$$

$$= \frac{2x-9}{3(x+5)}$$

- Różnicę obliczamy analogicznie.

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{x+5} - \frac{6-x}{3x+15} &= \\ &= \frac{x-5}{x+5} - \frac{6-x}{3(x+5)} = \\ &= \frac{3x-15}{3(x+5)} - \frac{6-x}{3(x+5)} = \\ &= \frac{3x-15-(6-x)}{3(x+5)} = \\ &= \frac{3x-15-6+x}{3(x+5)} = \\ &= \frac{4x-21}{3(x+5)} \end{aligned}$$

- Założenia (wspólne dla dodawania wyrażeń wymiernych i odejmowania wyrażeń wymiernych):  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ .

## Przykład 2

Obliczmy sumę i różnicę ułamków  $\frac{7x+3}{x^2-3x}$  i  $\frac{2x-1}{x^2-2x}$ .

- Zaczniemy od zapisania mianowników w postaci iloczynowej i określenia wspólnego mianownika.
- Najpierw obliczymy sumę.

$$\begin{aligned} \frac{7x+3}{x^2-3x} + \frac{2x-1}{x^2-2x} &= \\ &= \frac{7x+3}{x(x-3)} + \frac{2x-1}{x(x-2)} = \\ &= \frac{(7x+3)(x-2)}{x(x-2)(x-3)} + \frac{(2x-1)(x-3)}{x(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{7x^2-11x-6+2x^2-7x+3}{x(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{9x^2-18x-3}{x(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

- Teraz obliczymy różnicę.

$$\begin{aligned} \frac{7x+3}{x^2-3x} - \frac{2x-1}{x^2-2x} &= \\ &= \frac{(7x+3)(x-2)}{x(x-2)(x-3)} - \frac{(2x-1)(x-3)}{x(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{7x^2-11x-6-2x^2+7x-3}{x(x-2)(x-3)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5x^2 - 4x - 9}{x(x-2)(x-3)}$$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2; 3\}$

### Przykład 3

Obliczmy  $\frac{5}{x+2} - \frac{3x}{x-2} + \frac{7}{x^2-4}$ .

- Zauważmy, że wspólnym mianownikiem będzie mianownik ostatniego ułamka.

- $$\begin{aligned} \frac{5}{x+2} - \frac{3x}{x-2} + \frac{7}{x^2-4} &= \\ &= \frac{5}{x+2} - \frac{3x}{x-2} + \frac{7}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{5(x-2) - 3x(x+2) + 7}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{5x - 10 - 3x^2 - 6x + 7}{(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{-3x^2 - x - 3}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

### Przykład 4

Obliczmy  $\frac{3x}{2x^2-5x} - \frac{x+1}{4x^2-25} + 2$ .

- Zaczynamy od rozłożenia mianowników na czynniki i ustalenia wspólnego mianownika. Liczbę całkowitą 2 również zapisujemy w postaci ułamka i doprowadzamy do wspólnego mianownika odpowiednio rozszerzając ułamek  $\frac{2}{1}$ .

- $$\begin{aligned} \frac{3x}{2x^2-5x} - \frac{x+1}{4x^2-25} + 2 &= \\ &= \frac{3x}{x(2x-5)} - \frac{x+1}{(2x-5)(2x+5)} + 2 = \\ &= \frac{3(2x+5)}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{x+1}{(2x-5)(2x+5)} + \frac{2(4x^2-25)}{(2x-5)(2x+5)} = \\ &= \frac{6x+15-x-1+8x^2-50}{(2x-5)(2x+5)} = \\ &= \frac{8x^2+5x-36}{(2x-5)(2x+5)} \end{aligned}$$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}; 0; \frac{5}{2}\}$

### Przykład 5

Obliczmy  $\frac{3x^4-11x^3-x-6}{x^4-3x^3+x-3} + \frac{3x}{x^2-2x-3} - \frac{x^2}{x^2-x+1} - 2$ .

- Zaczniemy od zapisania wielomianów z mianowników w postaci iloczynowej. Tu trzeba sobie w razie potrzeby przypomnieć metody rozkładania wielomianów na czynniki nierozkładalne.

$$\frac{3x^4-11x^3-x-6}{x^4-3x^3+x-3} + \frac{3x}{x^2-2x-3} - \frac{x^2}{x^2-x+1} - 2 =$$

$$= \frac{3x^4-11x^3-x-6}{(x^2-x+1)(x+1)(x-3)} + \frac{3x}{(x+1)(x-3)} - \frac{x^2}{x^2-x+1} - 2 =$$

- Teraz łatwo możemy zauważyć, że iloczyn z mianownika pierwszego ułamka będzie wspólnym mianownikiem w całym działaniu. Pozostałe ułamki (również liczba 2, na którą można popatrzeć jako na ułamek  $\frac{2}{1}$ ) musimy odpowiednio rozszerzyć.

$$= \frac{3x^4-11x^3-x-6}{(x^2-x+1)(x+1)(x-3)} + \frac{3x(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)(x-3)} +$$

$$- \frac{x^2(x^2-2x-3)}{(x^2-x+1)(x+1)(x-3)} - \frac{2(x^4-3x^3+x-3)}{(x^2-x+1)(x+1)(x-3)} =$$

$$= \frac{3x^4-11x^3-x-6+3x^3-3x^2+3x-x^4+2x^3+3x^2-2x^4+6x^3-2x+6}{(x^2-x+1)(x+1)(x-3)} =$$

$$= 0$$

Zauważmy, że wszystkie wyrazy w liczniku się zredukują.

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

## Słownik

### wyrażenie wymierne

zmiennej rzeczywistej  $x$  to wyrażenie algebraiczne postaci  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , w którym  $P(x)$  i  $Q(x)$  są wielomianami zmiennej  $x$ , przy czym  $Q(x)$  nie jest wielomianem zerowym;

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami dodawania i odejmowania ułamków przedstawionymi w filmie.

Zwróć uwagę, że postać iloczynowa mianowników jest nam potrzebna zarówno do określania wspólnego mianownika obu ułamków jak i do wyznaczenia dziedziny wyrażenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DZEtyQwWL>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dodawania i odejmowania wyrażeń wymiernych.

---

## Polecenie 2

$$\text{Oblicz } \frac{3x}{x-3} + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x^2-2x-3}.$$

## Polecenie 3

$$\text{Oblicz } \frac{3}{4-2x} + \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{5}{x+2}.$$

## Polecenie 4

$$\text{Oblicz } \frac{3x^2}{x-3} - \frac{7}{x^2-9} - \frac{2x+1}{x^2-6x+9}.$$

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Michał Niedźwiedź

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

II. Wyrażenia algebraiczne.

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$ ,  
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ,  $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$ ;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje wiadomości rozkładzie wielomianów na czynniki do sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika,
- dodaje lub odejmuje tak przekształcone ułamki,
- formułuje warunki, przy których wykonanie podanych działań jest możliwe (określa założenia).

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;

- dyskusja;
- okienko informacyjne;
- opowiadanie.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie praw działań na liczbach (uczniowie mogą wykorzystać materiały w epodręcznikach).

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie pracują w 4 – 5 grupach. Zadaniem każdej z grup jest wykonanie mapy myśli, zawierające dotychczas poznane pojęcia związane z wyrażeniami wymiernymi. Prezentacje podsumowująca pracę grup są okazją do wyjaśnienia wątpliwości, rozszerzenia wiadomości.
2. Nauczyciel podaje temat zajęć i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w czterech grupach pracują metodą okienka informacyjnego mającą na celu przypomnienie praw działań dotyczących dodawania (grupy 1 i 2) bądź odejmowania liczb, przy czym odejmowanie traktujemy jako dodawanie liczby przeciwnej (grupa 3 i 4), zapisanie tych praw symbolicznie w okienkach pierwszego wiersza utworzonego na planszy. W drugim wierszu uczniowie podają przykłady zastosowania praw działań (tylko łączności i przemienności) zapisane za pomocą liczb oraz za pomocą liter. Teraz zadaniem każdej grupy jest zapisanie dwóch wyrażen wymiernych w postaci ułamków i dodanie (gr. 1 i 2) bądź odjęcie (gr. 3 i 4) zapisanych wyrażen. Całą procedurę każda z grup powtarza jeszcze dwukrotnie, wypełniając pozostałe okienka powstałe na planszy.

2. Grupy 1 i 2 oraz 3 i 4 wymieniają swoje spostrzeżenia i formułują wniosek – w jaki sposób dodajemy/odejmujemy sumy algebraiczne. Uzgodnione wnioski zapisują na tablicy.
3. Uczniowie w parach analizują przykłady dodawania i odejmowania wyrażeń algebraicznych.
4. Nauczyciel prezentuje film samoczek, uczniowie zwracają uwagę na speky niezrozumiałe, które wyjaśniane są na forum klasy.
5. Uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne, wybrani uczniowie komentują stopień trudności i sposób rozwiązania poszczególnych ćwiczeń.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Dwóch wybranych uczniów prezentuje wiadomości uzyskane w czasie zajęć .
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują polecenia znajdujące się pod filmem samuczkiem.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Wyrażenia wymierne](#)
- [Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel może wykorzystać medium film samoczek do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach jako eksperci.