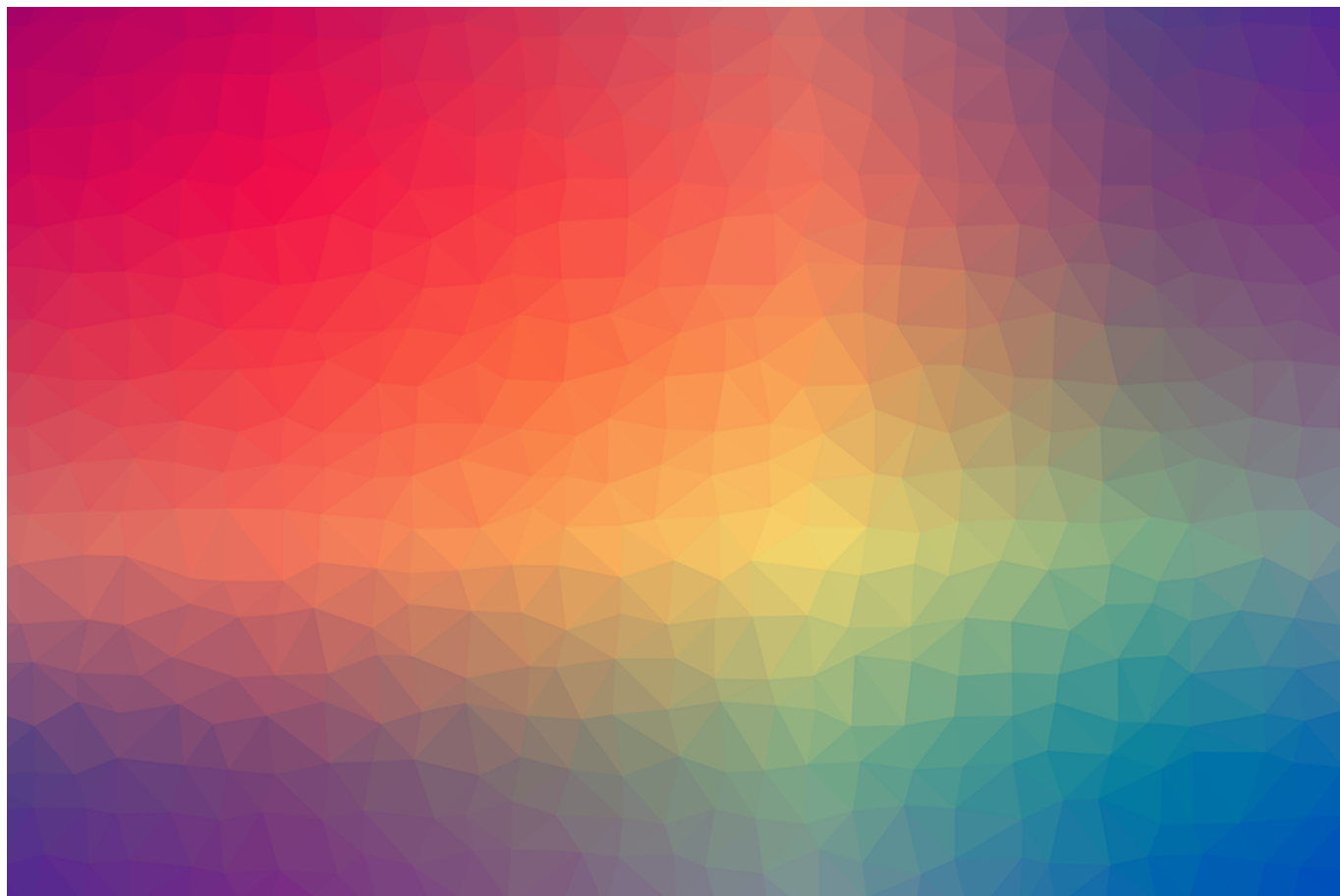




Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego – zastosowania

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego – zastosowania

Źródło: Carlos Irineu da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego matematycy często wykorzystują rozwiązując równania stopnia trzeciego.

Sposób rozwiązywania równań sześciennych znaleziono na początku XVI wieku. W tym czasie w Europie nie posługiwano się jeszcze liczbami ujemnymi i każde równanie zapisywano tak, aby wszystkie współczynniki były dodatnie. Wyobraź więc sobie, ile różnych typów takich równań należało rozważyć!

W XVI wieku każdy matematyk potrafił rozwiązać równanie stopnia drugiego. Natomiast dwóch włoskich matematyków – Fior i Niccolo Tartaglia chwaliło się, że potrafią rozwiązać równanie stopnia trzeciego. Aby sprawdzić, który z nich jest lepszym matematykiem, stoczyli naukowy pojedynek. Każdy z nich miał rozwiązać 30 równań sześciennych wymyślonych przez przeciwnika.



Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

Okazało się wtedy, że Fior potrafi tylko rozwiązać niektóre typy takich równań. Tartaglia początkowo też umiał rozwiązywać tylko wybrane równania sześciennie. Ale bardzo chciał wygrać, więc przez noc wymyślił ogólny sposób rozwiązywania równań sześciennych i zwyciężył.

Twoje cele

- Przeanalizujesz nietypowe przykłady z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.
- Zastosujesz wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego w przekształceniach algebraicznych.
- Ocenisz swoje umiejętności stosowania wzorów skróconego mnożenia.

Przeczytaj

Rozwiązywanie równań sześciennych

Pokażemy teraz zastosowanie wzorów skróconego mnożenia do rozwiązywania pewnego typu równań stopnia trzeciego. Wykorzystamy sposób opisany przez szesnastowiecznego matematyka Girolamo Cardano.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $x^3 + 6x = 7$.

Rozwiązanie:

Krok 1

Stosujemy podstawienie $x = u - v$.

Stąd:

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 7$$

$$u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 6(u - v) = 7$$

$$(u^3 - v^3) - 3uv(u - v) + 6(u - v) = 7$$

$$(u^3 - v^3) + 3(u - v)(-uv + 2) = 7$$

Krok 2

Ustalamy u i v tak, aby $-uv + 2 = 0$

stąd:

$$v = \frac{2}{u} \text{ i } u^3 - v^3 = 7$$

Podstawiamy wyznaczone v do równania.

$$u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^3 = 7$$

$$u^6 - 7u^3 - 8 = 0$$

Krok 3

Stosujemy kolejne podstawienie: $u^3 = t$.

$$t^2 - 7t - 8 = 0$$

Otrzymujemy znane nam już równanie stopnia 2. Obliczamy wyróżnik równania i pierwiastki.

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$t_1 = \frac{7-9}{2} = -1, \text{ stąd } u_1 = \sqrt[3]{-1} = -1 \text{ i } v_1 = \frac{2}{-1} = -2$$

$$t_2 = \frac{7+9}{2} = 8, \text{ stąd } u_2 = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ i } v_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Krok 4

Wyznaczamy pierwiastki równania.

$$x = u - v$$

$$x_1 = -1 - (-2) = 1$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1$$

Odpowiedź:

Jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania jest liczba 1.

Aby ułatwić rozwiązywanie niektórych równań trzeciego stopnia, możemy też skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie: Równanie trzeciego stopnia z jednym pierwiastkiem

Równanie postaci $x^3 + px + q = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$ **ma dokładnie jeden pierwiastek**

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$$

gdzie:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \text{ i } \Delta > 0.$$

Przykład 2

Wykażemy, że liczba $M = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ jest równa 2.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z podanego wyżej twierdzenia.

Zauważmy, że:

$$M = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$$

Założmy, że M jest rozwiązaniem pewnego równania sześciennego typu $x^3 + px + q = 0$

.

Wtedy:

$$-\frac{q}{2} = 7 \text{ i } \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 50$$

Stąd:

$$q = -14 \text{ i } \frac{p^3}{27} + \left(-\frac{14}{2}\right)^2 = 50$$

Wyznaczamy p :

$$p^3 = (50 - 49) \cdot 27, p = 3.$$

Poszukiwane równanie to $x^3 + 3x - 14 = 0$.

Łatwo sprawdzimy, że pierwiastkiem tego równania jest liczba 2.

$$2^3 + 3 \cdot 2 - 14 = 0$$

$$14 - 14 = 0$$

$$0 = 0$$

Ponieważ liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem równania $x^3 + 3x - 14 = 0$, zatem $M = 2$, co należało wykazać.

Przekształcanie wyrażeń

Przykład 3

Wyprowadzimy wzór $(a + b + c)^3$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$$A = (a + b + c)^3$$

Zapisujemy sześciąt w postaci iloczynu.

$$A = (a + b + c)^2 \cdot (a + b + c)$$

Skorzystamy ze wzoru na kwadrat sumy 3 wyrażeń.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$A = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)(a + b + c)$$

$$A = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

Zapisujemy wzór na sześcián sumy 3 wyrażeń w prostszej postaci.

$$A = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc$$

Ważne!

Wzór na **sześcián sumy trzech wyrażeń**:

$$(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc$$

Słownik

sześcián sumy trzech wyrażeń

jest równy iloczynowi kwadratu sumy tych wyrażeń przez sumę tych wyrażeń

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż testy samosprawdzające i sprawdź swoje umiejętności wykorzystania wzorów skróconego mnożenia stopnia trzeciego.



Test

Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego

Sprawdzisz:

- swoją wiedzę na temat wzorów skróconego mnożenia stopnia trzeciego.

Liczba pytań:

5

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni
wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Wykaż, że liczba $K = \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ jest liczbą naturalną.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawne stwierdzenia.

☐ Różnica sześcianu dwumianu $a - 2$ i sześcianu dwumianu $2 + a$ jest równa $(-6a^2)$.

☐ Liczba $64^3 - 33^3$ jest podzielna przez 31.

☐ Jeśli liczba naturalna w dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to sześcian tej liczby w dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

☐ Suma sześcianów stu kolejnych liczb naturalnych jest kwadratem liczby naturalnej.

Ćwiczenie 2



Uzupełnij rozwiązanie równania.

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x - 1)^3$$

$$(\text{ })^3 = (x - 1)^3$$

$$(\text{ })^3 - (x - 1)^3 = 0$$

$$(x + 1 - x + 1) \cdot (\text{ }) = 0$$

$$\text{ } \cdot (3x^2 + 1) = 0$$

$$3x^2 + 1 = 0$$

Odpowiedź: Równanie $\text{ }.$

$x + 1$

nie ma rozwiązania

$(x - 1)^2$

$x - 1$

$(x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) - (x - 1)^2$

$(x + 1)^2 + (x + 1)(x - 1) + (x - 1)^2$

$x + 1$

$(x + 1)^2$

x

$x - 1$

ma rozwiązanie, którym jest liczba 2

2

x^2

Ćwiczenie 3



Oceń prawdziwość każdej z równości. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $x^3 + y^3 = (x + y)(x - xy - y)$

☐ $(x + y^2)^3 = x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6$

☐ $x^3 - y^6 = (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^2)$

☐ $(x - y)^3 = (x - y)^2(x + y)$

Ćwiczenie 4



W wyrażeniu $(a - b - c)^3$ zapisanym w postaci sumy, współczynnik liczbowy przy c^3 jest równy

☐ 0

☐ 1

☐ 3

☐ -1

Ćwiczenie 5



Połącz w pary równania z liczbami, które są ich rozwiązaniami.

$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = x + \frac{1}{6}$

2

$x^3 - 10x = -12$

1

$2x^3 = 3x^2 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$x^3 + 5x = 6$

-1

Ćwiczenie 6



Wyrażenie $(a + b + c)^3 - 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2)$ jest równe

☐ $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$

☐ $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

☐ $a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$

☐ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Ćwiczenie 7



Liczba $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ jest

☐ liczbą naturalną parzystą.

☐ liczbą naturalną nieparzystą.

☐ liczbą naturalną podzielną przez 3.

☐ liczbą całkowitą dodatnią.

Ćwiczenie 8



Dla $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{6}$ liczba

$K = (a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (c - a - b)^3 + (b - a - c)^3$ ma wartość

☐ 36

☐ 24

☐ 48

☐ 144

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego – zastosowania

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje nietypowe przykłady wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia
- stosuje wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego w przekształceniach algebraicznych
- ocenia swoje umiejętności stosowania wzorów skróconego mnożenia

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda za i przeciw
- mapa myśli

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

Uczniowie w grupach przypominają wory skróconego mnożenia stopnia trzeciego i sporządzają mapę myśli, na której zaznaczają ich rozliczne zastosowania.

Grupy oglądają swoje rysunki, ustalają i prezentują jedną wspólną wersję mapy myśli.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałem w sekcji „Przeczytaj” i rozwiązują ćwiczenia interaktywne.

Następnie metodą za i przeciw dyskutują nad możliwościami i sensem nietypowego zastosowania wzorów skróconego mnożenia trzeciego stopnia, przedstawionych w tym materiale.

Dyskusję uzupełniają o przykłady, które nasunęły się im w trakcie pracy nad mapą myśli.

Wynikiem dyskusji powinny być wspólne wnioski na temat korzystania z gotowych wzorów i algorytmów algebraicznych.

Faza podsumowująca:

Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia sprawdzające.

Podsumowaniem zajęć jest samoocena uczniów i ocena koleżeńska.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego

Wskazówki metodyczne:

Ćwiczenia sprawdzające mogą być wykorzystane jako krótka kartkówka.