# Funkcje różnowartościowe i ich własności

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

# Funkcje różnowartościowe i ich własności

Źródło: Jospeh Almendarez, dostępny w internecie: pixy.org, domena publiczna.

Badanie różnowartościowości funkcji liczbowej jest bardzo ważnym zagadnieniem analizy matematycznej.
Czy wszystkie funkcje liczbowe dzielimy na różnowartościowe i te, które nie są różnowartościowymi?
Czy każda funkcja różnowartościowa jest funkcją monotoniczną?
Czy każda funkcja monotoniczna jest funkcją różnowartościową?
W jaki sposób możemy sprawdzić, czy dana funkcja jest funkcją różnowartościową?

Odpowiedzi na powyższe pytania możesz uzyskać analizując poniższy materiał.

> **Twoje cele**
>
> - Sprawdzisz, czy dana funkcja jest różnowartościowa.
> - Udowodnisz, że dana funkcja jest różnowartościowa.
> - Wykażesz, że dana funkcja nie jest funkcją różnowartościową.

# Przeczytaj

**Definicja: Funkcja różnowartościowa**

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest funkcją różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy różnym argumentom przyporządkowane są różne wartości, to znaczy, że dla dowolnych argumentów $x_1$, $x_2$ z warunku $x_1 \neq x_2$ wynika warunek

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definicję funkcji różnowartościowej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest
funkcją różnowartościową $\Leftrightarrow \forall_{x_1,\, x_2 \in X}[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$

Zwrot „dla każdego $x$" nazywa się kwantyfikatorem ogólnym, kwantyfikatorem dużym lub kwantyfikatorem uniwersalnym wiążącym zmienną $x$. Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\forall_x$.

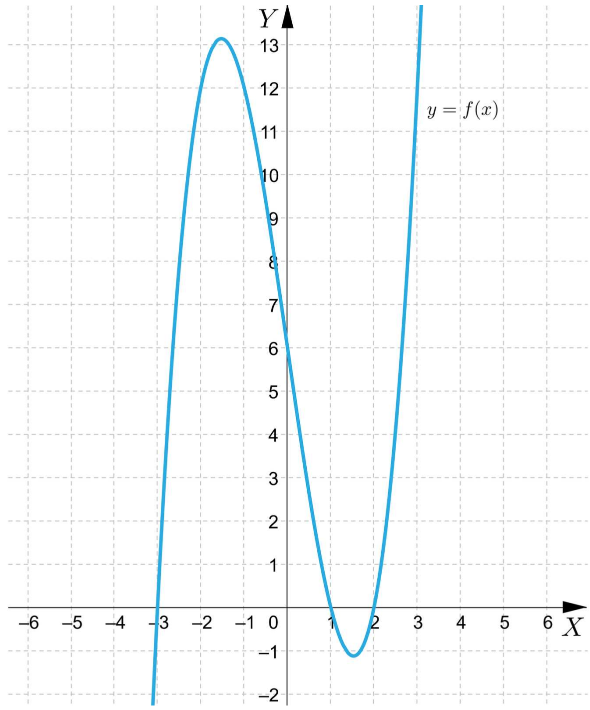
Jeżeli funkcja jest opisana za pomocą wykresu, to aby ustalić, czy funkcja jest różnowartościowa, czy nie jest różnowartościowa, wystarczy poprowadzić proste równoległe do osi $X$ i sprawdzić ile punktów wspólnych mają te proste z wykresem funkcji.

Poniższy przykład pokaże nam sposób sprawdzania różnowartościowości funkcji opisanej za pomocą wykresu.

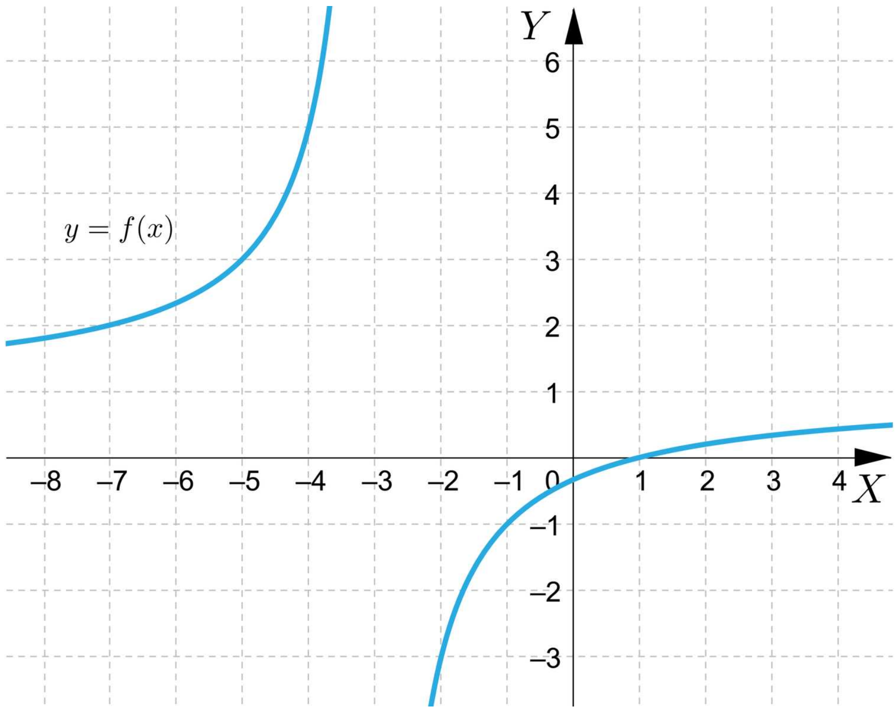
**Przykład 1**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wykresu.

a.



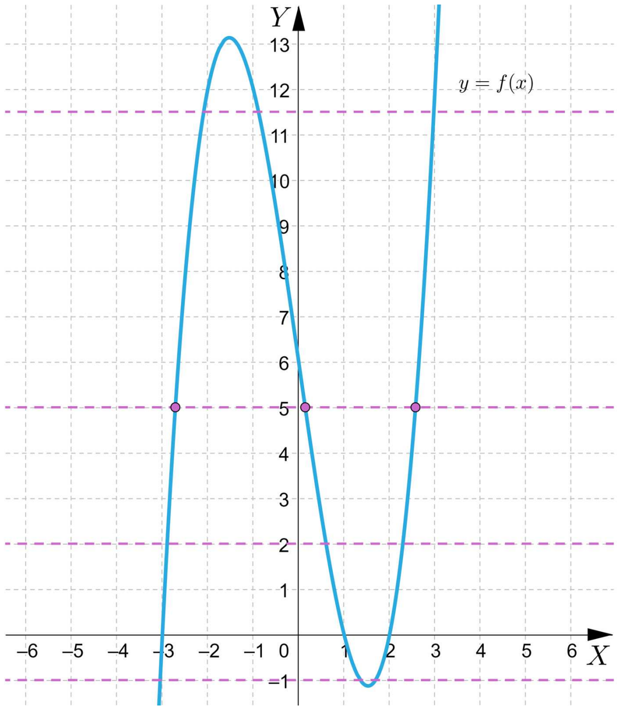

b.




Sprawdzimy, który z wykresów opisuje funkcję różnowartościową.

**Rozwiązanie:**

a. Naszkicujmy kilka prostych równoległych do osi $X$ i sprawdźmy, czy są proste, które mają więcej niż jeden punkt wspólny z wykresem funkcji $f$.
Np. prosta $y = 5$ ma trzy punkty wspólne z wykresem funkcji $f$.
Funkcja $f$ nie jest funkcją różnowartościową.




b. Naszkicujmy kilka prostych równoległych do osi $X$ i sprawdźmy, czy są proste, które mają więcej niż jeden punkt wspólny z wykresem funkcji $f$.
Proste na rysunku mają po jednym punkcie wspólnym z wykresem funkcji.
Gdybyśmy narysowali nieskończenie wiele takich prostych, to okazało by się, że każda prosta równoległa do osi $X$ ma nie więcej niż jeden punkt wspólny z wykresem funkcji $f$.
Funkcja $f$ jest funkcją różnowartościową.


**Przykład 2**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą tabelki.

| **Funkcja $f$** |
|---|

| Funkcja $f$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ | $5$ |
| $f(x)$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $1$ | $0$ | $1$ | $2$ |

Wykażemy, że funkcja $f$ nie jest funkcją różnowartościową.

**Rozwiązanie:**

Aby wykazać, że funkcja $f$, opisana za pomocą tabelki, nie jest funkcją różnowartościową wystarczy przeanalizować zbiór wartości tej funkcji.

Wartość $0$ przyjmuje funkcja dla dwóch argumentów. Są nimi liczby $(-3)$ i $2$.

Wartość $1$ przyjmuje funkcja dla dwóch argumentów. Są nimi liczby $0$ i $3$.

Wartość $2$ przyjmuje funkcja dla dwóch argumentów. Są nimi liczby $(-1)$ i $5$.

Zatem funkcja $f$ nie jest funkcją różnowartościową.

**Przykład 3**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = -x^3 + 2$, gdy $x \in \mathbb{R}$

Udowodnimy, że funkcja $f$ jest funkcją różnowartościową.

**Rozwiązanie:**

Założenie: $f(x) = -x^3 + 2$, $D_f = \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$

Teza: $f(x_1) \neq f(x_2)$

Dowód:

Obliczymy różnicę wartości funkcji $f$ dla argumentów $x_1$ i $x_2$.

$f(x_1) - f(x_2) = \left(-{x_1}^3 + 2\right) - \left(-{x_2}^3 + 2\right) =$

$= -{x_1}^3 + 2 + {x_2}^3 - 2 = -\left({x_1}^3 - {x_2}^3\right) =$

$= -(x_1 - x_2)\left({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2\right)$

Z założenia wiadomo, że:

- $x_1 \neq x_2$ zatem $x_1 - x_2 \neq 0$
- wyrażenie $\left({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2\right) \neq 0$

zatem $(x_1 - x_2)\left(x_1{}^2 + x_1x_2 + x_2{}^2\right) \neq 0$

czyli $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, stąd $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ponieważ $x_1$ i $x_2$ są dowolnymi liczbami ze zbioru $\mathbb{R}$ udowodniliśmy więc, że funkcja $f(x) = -x^3 + 2$, gdy $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją różnowartościową.

W dowodzeniu różnowartościowości funkcji liczbowej wygodnie jest stosować poniższą definicję. Jest ona równoważna definicji przedstawionej na początku lekcji.

**Definicja: funkcji różnowartościowej**

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest funkcją różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy z równości wartości tej funkcji wynika równość argumentów, to znaczy, że dla dowolnych argumentów $x_1$, $x_2$ z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika równość $x_1 = x_2$.

Definicję powyższą możemy zapisać krócej.

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest
funkcją różnowartościową $\Leftrightarrow \forall_{x_1,\, x_2 \in X}[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

W poniższych przykładach pokażemy zastosowanie tej definicji w dowodzeniu różnowartościowości funkcji liczbowej.

**Przykład 4**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = \frac{x+5}{x-4}$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Wykażemy, że funkcja $f$ jest funkcją różnowartościową.

**Rozwiązanie:**

Założenie: $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $x_1, x_2 \in D_f$, $f(x_1) = f(x_2)$

Teza: $x_1 = x_2$

Dowód:

Z założenia wiemy, że $x_1, x_2 \in D_f$ i $f(x_1) = f(x_2)$, zatem

$\frac{x_1+5}{x_1-4} = \frac{x_2+5}{x_2-4}$

stąd

$(x_1 + 5)(x_2 - 4) = (x_2 + 5)(x_1 - 4)$

Po obu stronach równości mnożymy przez siebie sumy algebraiczne.

$x_1x_2 + 5x_2 - 4x_1 - 20 = x_1x_2 + 5x_1 - 4x_2 - 20$

Po wykonaniu redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$-4x_1 - 5x_1 = -4x_2 - 5x_2$

$-9x_1 = -9x_2 \mid : (-9)$

$x_1 = x_2$

$x_1, x_2$ – są dowolnymi liczbami należącymi do dziedziny funkcji $f$, więc funkcja $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, jest funkcją różnowartościową.

**Przykład 5**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru

$f(x) = 3\sqrt{x-2}$, gdy $x \in \langle 2,\ \infty)$.

Wykażemy, że funkcja $f$ jest funkcją różnowartościową.

**Rozwiązanie:**

Założenie: $f(x) = 3\sqrt{x-2}$, $D_f = \langle 2,\ \infty)$, $x_1, x_2 \in D_f$, $f(x_1) = f(x_2)$

Teza: $x_1 = x_2$

Dowód:

Z założenia wiemy, że $x_1, x_2 \in D_f$ i $f(x_1) = f(x_2)$, zatem

$3\sqrt{x_1 - 2} = 3\sqrt{x_2 - 2} \mid : 3$

$\sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2}$

Z własności pierwiastkowania otrzymujemy:

$x_1 - 2 = x_2 - 2$

$x_1 = x_2$

$x_1, x_2$ – są dowolnymi liczbami należącymi do dziedziny funkcji $f$, więc funkcja $f(x) = 3\sqrt{x-2}$, gdy $x \in \langle 2,\ \infty)$, jest funkcją różnowartościową.

Aby udowodnić, że funkcja nie jest różnowartościową, wystarczy pokazać dwa różne argumenty, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość.

**Przykład 6**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru

$f(x) = -5x^2$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Wykażemy, że funkcja $f$ nie jest funkcją różnowartościową.

**Rozwiązanie:**

Obliczmy wartość funkcji $f$ dla dwóch wybranych argumentów, np. $(-2)$ i $2$.

$f(-2) = -5 \cdot (-2)^2 = -5 \cdot 4 = -20$

$f(2) = -5 \cdot 2^2 = -5 \cdot 4 = -20$

$f(-2) = f(2)$

Pokazaliśmy więc, że funkcja $f$ przyjmuje taką samą wartość dla dwóch różnych argumentów.

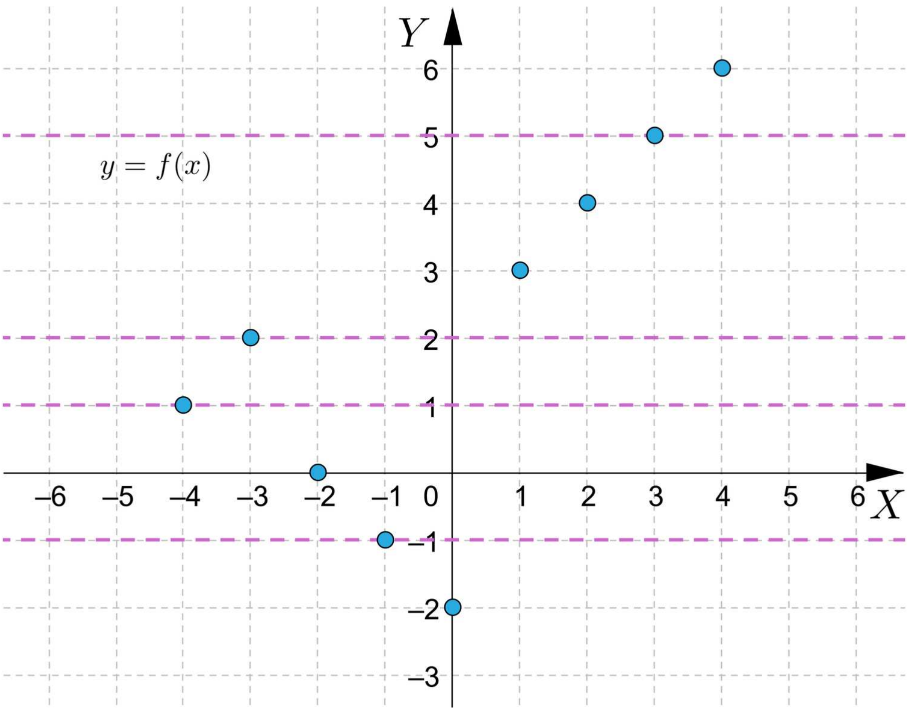
Zatem funkcja $f(x) = -5x^2$, gdy $x \in \mathbb{R}$ nie jest funkcją różnowartościową.

Wszystkie funkcje rosnące i wszystkie funkcje malejące są funkcjami różnowartościowymi. Wystarczy przeanalizować definicję funkcji rosnącej i definicję funkcji malejącej. Sprawdzimy, czy każda funkcja różnowartościowa jest funkcją monotoniczną.

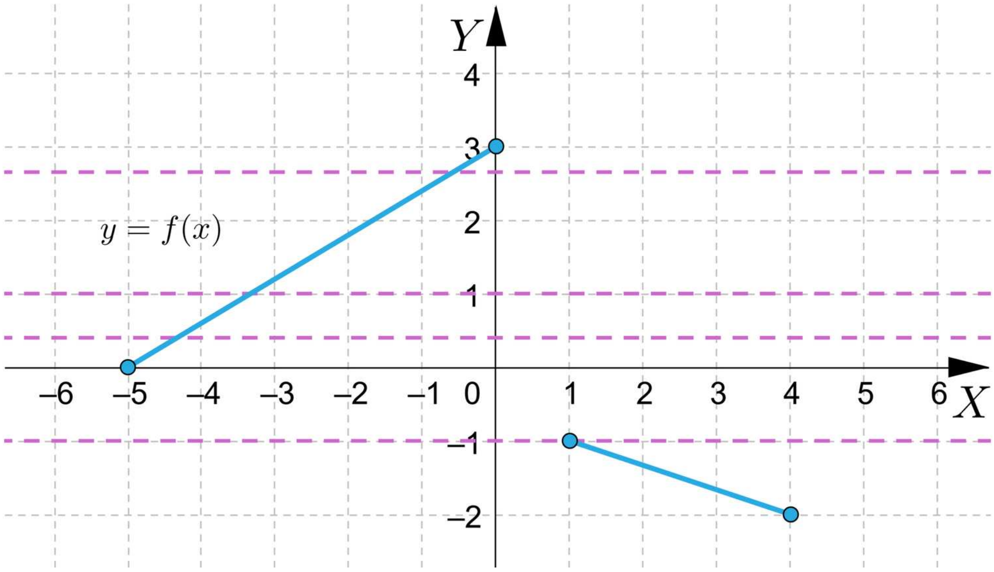
**Przykład 7**

Poniższe rysunki przedstawiają wykresy funkcji, które są różnowartościowe i nie są monotoniczne.

a.



b.




**Ważne!**

- Jeżeli funkcja $f$ opisana jest za pomocą wykresu, to możemy sprawdzić, czy jest różnowartościowa, szkicując proste równoległe do osi $X$ i określając ile punktów wspólnych ma dana prosta z wykresem funkcji. Funkcja różnowartościowa ma z każdą z prostych równoległych do osi $X$ co najwyżej jeden punkt wspólny.
- Jeżeli funkcja jest opisana za pomocą wzoru, to sprawdzamy jej różnowartościowość korzystając z definicji.
- Każda funkcja rosnąca/malejąca jest funkcją różnowartościową, ale nie każda funkcja różnowartościowa jest funkcją monotoniczną.

# Słownik

**funkcja różnowartościowa**

funkcja liczbowa, która każdą swoją wartość przyjmuje tylko jeden raz

# Prezentacja multimedialna

**Polecenie 1**

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w prezentacji multimedialnej. Spróbuj samodzielnie rozwiązać wskazane zadania, następnie porównaj swoje rozwiązania z tymi, które pokazane są w prezentacji.

**Polecenie 2**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = |2x - 4|$.

Wyznacz dziedzinę tej funkcji i wykaż, że funkcja $f$ nie jest różnowartościowa.

**Polecenie 3**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x-2}$, gdy $x \in \langle 2,\ \infty)$.

Udowodnij, że funkcja $f$ jest funkcją różnowartościową.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

## Ćwiczenie 1

## Ćwiczenie 2

Zbiorem wartości funkcji $f$ jest $\{-1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$. Wyznacz liczbę $m$ tak, aby tabela opisywała funkcję różnowartościową.

| **Funkcja $f$** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| $f(x)$ | $3$ | $5$ | $2$ | $m$ | $7$ |

## Ćwiczenie 3

## Ćwiczenie 4

## Ćwiczenie 5

## Ćwiczenie 6

## Ćwiczenie 7

## Ćwiczenie 8

# Dla nauczyciela

**Autor:** Anna Jeżewska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Funkcje różnowartościowe i ich własności**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- sprawdza, czy funkcja jest różnowartościowa
- udowadnia, że funkcja jest różnowartościowa
- wykazuje, że funkcja nie jest funkcją różnowartościową

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza sytuacyjna
- mapa myśli

- dyskusja

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie pracują w małych grupach. Ich zadaniem jest usystematyzowanie wiadomości na temat sposobów wyznaczania zbioru wartości funkcji. Zebrane informacje przedstawiają w postaci mapy myśli.
3. Po zakończonej pracy umieszczają swoje przemyślenia w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj".
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy, poszukują odpowiedzi na pytania postawione w sekcji „Wprowadzenie". Wnioski przedstawiają na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają prezentację multimedialną zawierającą przykłady sprawdzania, czy dana funkcja jest różnowartościowa i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

**Faza podsumowująca:**

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się".

2. Zadanie dla chętnych:
   Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Wyznacz jej dziedzinę i sprawdź, czy jest funkcją różnowartościową.

**Materiały pomocnicze:**

- Wykres funkcji
- Funkcja i jej własności

**Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel może wykorzystać prezentację multimedialną do powtórzenia wiadomości na temat różnowartościowości funkcji. Prezentację można też wykorzystać na zajęciach poświęconych własnościom funkcji .