



Własności prawdopodobieństwa

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W dawnej Polsce w kości i karty grywali wszyscy – mieszczanie, chłopi, szlachta. Była to popularna rozrywka, która niestety niektórym zajmowała zbyt wiele czasu, z czego wyśmiewał się nawet Jan Kochanowski.



Gra w karty

Rombouts, Theodoor (1597-1637)

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

« Nie umie syn szlachecki na koń wsieść i w łowy,
Na dziki zwierz z oszczepem jachać niegotowy,
Lepiej kufla świadomy albo kart pisanych,
Każesz li dać, i kostek, prawem zakazanych.

J. Kochanowski Pieśń I.

Celem gry w karty lub kości jest z reguły uzyskanie największej liczby punktów. Wbrew pozorom nie są to gry zależne tylko od szczęścia – liczy się w nich też umiejętność kalkulacji.

Na gruncie teorii rachunku prawdopodobieństwa, opracowano poradniki dla graczy, określające szanse wygranych w zależności od obranej strategii. Okazuje się więc, że rachunek prawdopodobieństwa może przydać się również w grach strategicznych. Co prawda gry w kości i karty już wyszły z mody, ale być może zdarza Ci się rozgrywać wirtualne pojedynki. A wtedy warto oprzeć się na teoriach probabilistycznych.

Wiadomości zawarte w tym materiale pomogą poznać Ci niektóre własności prawdopodobieństwa.

Twoje cele

- Określisz niektóre własności prawdopodobieństwa.
- Obliczysz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru.
- Obliczysz prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru.
- Przeprowadzisz proste rozumowania, mające na celu udowodnienie zapisanych wzorów.
- Dobierzesz model matematyczny do danej sytuacji z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Własności prawdopodobieństwa

Z aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa oraz z własności działań na zdarzeniach, wynikają **własności prawdopodobieństwa**, które przedstawimy poniżej.

Twierdzenie: Własności prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$. Wówczas:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$

Dla przykładu udowodnimy jedną z własności podanych w twierdzeniu.

Przykład 1

Udowodnimy, że $P(\emptyset) = 0$.

Wiadomo, że dla dowolnego zdarzenia A :

$$A \cap \emptyset = \emptyset \text{ i } A \cup \emptyset = A$$

Na podstawie aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa wiemy, że dla każdej pary wykluczających się zdarzeń A i B tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych, zachodzi równość

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Zatem:

$$P(A \cup \emptyset) = P(A)$$

$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

Odejmując zapisane równości stronami, otrzymujemy

$$0 = P(\emptyset)$$

C. n. d

Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami do gry.

- Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A – suma liczb wyrzuconych oczek jest co najmniej równa 2.

Najmniejsza liczba oczek na każdej z kostek to 1, zatem zawsze w rzucie dwiema kostkami suma liczb wyrzuconych oczek będzie co najmniej równa 2. A jest zdarzeniem pewnym.

$$P(A) = 1$$

- Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 13.

Największa liczba oczek na każdej z kostek to 6, zatem zawsze w rzucie dwiema kostkami suma liczb wyrzuconych oczek będzie nie większa niż 12. B jest zdarzeniem niemożliwym.

$$P(B) = 0$$

Poznamy teraz bardzo ważne twierdzenie, określające prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego do danego zdarzenia.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $A' \subset \Omega$.

Jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Przykład 3

Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A , gdy $P(A') = 0,3$.

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Stąd:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Przykład 4

Każdy z 12 przyjaciół urodził się w innym miesiącu. Obliczymy prawdopodobieństwo, że losowo wskazana osoba z tej grupy nie urodziła się w lipcu.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że żadna z osób nie urodziła się w lipcu.

Wskazujemy jedną osobę spośród 12. Zatem:

$$|\Omega| = 12$$

Zdarzeniu A – sprzyjają zdarzenia: wylosowana osoba urodziła się w styczniu, lutym, marcu, kwietniu, maju, czerwcu, sierpniu, wrześniu, październiku, listopadzie lub w grudniu. Mamy więc kilka możliwości. Natomiast zdarzeniu przeciwnemu – wskazana osoba urodziła się w lipcu – odpowiada tylko jedna możliwość. Obliczamy więc najpierw prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A .

$$P(A') = \frac{1}{12}$$

Stąd

$$P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wskazana osoba nie urodziła się w lipcu jest równe $\frac{11}{12}$.

Powyższy przykład był dość prostym zadaniem na zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, ale jak wkrótce się przekonasz, wzór ten ułatwia rozwiązywanie wielu skomplikowanych problemów probabilistycznych.

Przykład 5

Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo, że choć raz uzyskaliśmy liczbę oczek równą 3 lub 4.

Liczba zdarzeń elementarnych w rozpatrywanym doświadczeniu jest równa:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Rozważmy zdarzenie przeciwne: A' – ani razu nie wypadła ani liczba oczek równa trzy, ani cztery.

Wtedy może выпаść każda z pozostałych czterech liczb oczek (1, 2, 5 lub 6).

$$|A'| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Zatem:

$$P(A') = \frac{64}{216}$$

Na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego, otrzymujemy:

$$P(A) = 1 - \frac{64}{216} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że choć raz uzyskaliśmy liczbę oczek równą 3 lub 4 jest równe $\frac{19}{27}$.

Przed nami własność prawdopodobieństwa, związana z prawdopodobieństwem sumy zdarzeń.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, wówczas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jeśli zdarzenia A i B wykluczają się, czyli $A \cap B = \emptyset$, to

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Przykład 6

Wśród 50 przechodniów przeprowadzono ankietę, w której zapytano o ulubiony smak lodów. Połowa osób odpowiedziała, że najbardziej lubi lody waniliowe, 80% pozostałych odpowiedziało, że lubi lody czekoladowe. A dwie osoby stwierdziły, że lubią i lody waniliowe, i czekoladowe.

Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że losowo wskazana osoba z tej grupy lubi lody waniliowe lub czekoladowe.

Oznaczmy:

W – zdarzenie, że losowo wskazana osoba lubi lody waniliowe,

C – zdarzenie, że losowo wskazana osoba lubi lody czekoladowe,

Wskazujemy jedną z 50 osób, zatem $|\Omega| = 50$.

Liczba osób, która lubi lody waniliowe jest równa: $0,5 \cdot 50 = 25$.

Liczba osób, która lubi lody czekoladowe jest równa: $0,8 \cdot 25 = 20$.

Liczba osób, która lubi i lody waniliowe i czekoladowe jest równa 2.

Zatem:

$$|W| = 25, |C| = 20, |W \cap C| = 2.$$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

$$P(W \cup C) = P(W) + P(C) - P(W \cap C)$$

$$P(W \cup C) = \frac{25}{50} + \frac{20}{50} - \frac{2}{50} = \frac{43}{50}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że losowo wskazana osoba z tej grupy lubi lody waniliowe lub czekoladowe jest równe $\frac{43}{50}$.

Przykład 7

Wiadomo, że $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$ i $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. Obliczmy $P(A \cup B)$.

Zauważmy, że

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Zdarzenia A i B wykluczają się. Zatem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{12}.$$

Przykład 8

W torebce jest 10 cukierków, w tym cztery to cukierki miętowe. W sposób losowy wyjmujemy z torebki trzy cukierki. Obliczmy prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa wyjęte cukierki to cukierki miętowe.

Zdarzeniami elementarnymi są trzelementowe podzbiory zbioru dziesięcioelementowego. Zatem

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$

Zdarzenie polegające na wyciągnięciu co najmniej dwóch cukierków miętowych, możemy rozpatrywać jako sumę zdarzeń:

A – wyciągamy dwa cukierki miętowe,

B – wyciągamy trzy cukierki miętowe.

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest równa:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 6 = 36$$

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B jest równa:

$$\binom{4}{3} = 4$$

Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$, korzystamy ze wzoru:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{36}{120} + \frac{4}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa wyjęte cukierki to cukierki miętowe, jest równe $\frac{1}{3}$.

Słownik

własności prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$; wówczas:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$

Infografika



Polecenie 1

Spróbuj zapisać wzór na prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń. Porównaj swój zapis ze wzorem zamieszczonym w infografice. Uzasadnij zapisane w infografice wzory, korzystając z odpowiednich rysunków.

Polecenie 2

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach. Wykaż, że $P(A \cup B) - P(A \setminus B) = P(B)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach.

Wykaż, że jeżeli $P(A) = \frac{3}{5}$ i $P(B) = \frac{4}{5}$, to:

$$\frac{2}{5} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{5}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności prawdopodobieństwa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa niektóre własności prawdopodobieństwa
- oblicza prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru
- oblicza prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru
- przeprowadza proste rozumowania, mające na celu udowodnienie zapisanych wzorów
- dobiera model matematyczny do danej sytuacji z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- tak – nie
- ośmiornica

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki, kostki do gry, monety

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają poznane wiadomości dotyczące prawdopodobieństwa, z uwzględnieniem definicji i wzorów.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie podzieleni na małe grupy, budują zadania dotyczące obliczania prawdopodobieństwa w rzutach kostką i monetami. Analizując wyniki rzutów kostką, monetami, kostką i monetami, starają się sformułować zaobserwowane własności prawdopodobieństwa.
2. Uczniowie wspólnie pracują metodą tak – nie. Liderzy przedstawiają wyniki prac swoich grup. Pozostali albo zgadzają się z wnioskami – TAK, albo uznają je za niepoprawne – NIE.
Wszystkie propozycje TAK zapisywane są na tablicy.
3. Uczniowie zapoznają się z zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” własnościami prawdopodobieństwa (pierwsze z podanych w „Przeczytaj” twierdzeń), porównują ze swoimi zapiskami korygują je i wspólnie udowadniają własności.
4. Druga część zajęć rozpoczyna się od przypomnienia działań na zbiorach, sporządzenia odpowiednich rysunków i zapisania odpowiednich wzorów.
5. Na ich podstawie, metodą ośmiornicy, uczniowie pracujący w parach, starają się sformułować twierdzenia na prawdopodobieństwo sumy, iloczynu i różnicy (macki ośmiornicy dotyczą odpowiednich wzorów mnogościowych, a na mackach zapisywane są odpowiadające im wzory na prawdopodobieństwo).
6. Wybrana para uczniów przedstawia wymyślone przez siebie twierdzenia, reszta uczniów wprowadza ewentualne korekty do propozycji. Dla przykładu uczniowie udowadniają jedno z zapisanych twierdzeń.
7. Teraz uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania zapisane w sekcji „Przeczytaj” i w infografice, porównując swoje rozwiązania z zawartymi w materiale.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia interaktywne.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wstępem do zajęć, wtedy uczniowie rozpoczną zajęcia od udowodnienia zapisanego tam twierdzenia.