Własności prawdopodobieństwa

Własności prawdopodobieństwa

Źródło: dostępny w internecie: pikrepo.com, domena publiczna.

W dawnej Polsce w kości i karty grywali wszyscy – mieszczanie, chłopi, szlachta. Była to popularna rozrywka, która niestety niektórym zajmowała zbyt wiele czasu, z czego wyśmiewał się nawet Jan Kochanowski.

Gra w karty
Rombouts, Theodoor (1597-1637)
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

> Nie umie syn szlachecki na koń wsieść i w łowy,
> Na dziki źwierz z oszczepem jachać niegotowy,
> Lepiej kufla świadomy albo kart pisanych,
> Każesz li dać, i kostek, prawem zakazanych.
>
> *J. Kochanowski Pieśń I.*

Celem gry w karty lub kości jest z reguły uzyskanie największej liczby punktów. Wbrew pozorom nie są to gry zależne tylko od szczęścia – liczy się w nich też umiejętność kalkulacji.

Na gruncie teorii rachunku prawdopodobieństwa, opracowano poradniki dla graczy, określające szanse wygranych w zależności od obranej strategii. Okazuje się więc, że rachunek prawdopodobieństwa może przydać się również w grach strategicznych. Co prawda gry w kości i karty już wyszły z mody, ale być może zdarza Ci się rozgrywać wirtualne pojedynki. A wtedy warto oprzeć się na teoriach probabilistycznych.

Wiadomości zawarte w tym materiale pomogą poznać Ci niektóre własności prawdopodobieństwa.

Twoje cele

- Określisz niektóre własności prawdopodobieństwa.
- Obliczysz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru.
- Obliczysz prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru.
- Przeprowadzisz proste rozumowania, mające na celu udowodnienie zapisanych wzorów.
- Dobierzesz model matematyczny do danej sytuacji z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Własności prawdopodobieństwa

Z aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa oraz z własności działań na zdarzeniach, wynikają własności prawdopodobieństwa, które przedstawimy poniżej.

> **Twierdzenie: Własności prawdopodobieństwa**
>
> Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$. Wówczas:
>
> 1. $P(\Omega) = 1$
> 2. $P(\emptyset) = 0$
> 3. $0 \leq P(A) \leq 1$
> 4. Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$

Dla przykładu udowodnimy jedną z własności podanych w twierdzeniu.

> **Przykład 1**
>
> Udowodnimy, że $P(\emptyset) = 0$.
>
> Wiadomo, że dla dowolnego zdarzenia A:
>
> $A \cap \emptyset = \emptyset$ i $A \cup \emptyset = A$
>
> Na podstawie aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa wiemy, że dla każdej pary wykluczających się zdarzeń A i B tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych, zachodzi równość
>
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
>
> Zatem:
>
> $P(A \cup \emptyset) = P(A)$
>
> $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$
>
> Odejmując zapisane równości stronami, otrzymujemy
>
> $0 = P(\emptyset)$
>
> C. n. d

> **Przykład 2**

Rzucamy dwiema kostkami do gry.

- Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A – suma liczb wyrzuconych oczek jest co najmniej równa 2.
  Najmniejsza liczba oczek na każdej z kostek to 1, zatem zawsze w rzucie dwiema kostkami suma liczb wyrzuconych oczek będzie co najmniej równa 2. A jest zdarzeniem pewnym.
  $P(A) = 1$
- Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 13.
  Największa liczba oczek na każdej z kostek to 6, zatem zawsze w rzucie dwiema kostkami suma liczb wyrzuconych oczek będzie nie większa niż 12. B jest zdarzeniem niemożliwym.
  $P(B) = 0$

Poznamy teraz bardzo ważne twierdzenie, określające prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego do danego zdarzenia.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $A' \subset \Omega$.

Jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Przykład 3

Obliczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A, gdy $P(A') = 0,3$.

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

$P(A') = 1 - P(A)$

Stąd:

$P(A) = 1 - P(A')$

$P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

Przykład 4

Każdy z 12 przyjaciół urodził się w innym miesiącu. Obliczymy prawdopodobieństwo, że losowo wskazana osoba z tej grupy nie urodziła się w lipcu.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że żadna z osób nie urodziła się w lipcu.

Wskazujemy jedną osobę spośród 12. Zatem:

$|\Omega| = 12$

Zdarzeniu A – sprzyjają zdarzenia: wylosowana osoba urodziła się w styczniu, lutym, marcu, kwietniu, maju, czerwcu, sierpniu, wrześniu, październiku, listopadzie lub w grudniu. Mamy więc kilka możliwości. Natomiast zdarzeniu przeciwnemu – wskazana osoba urodziła się w lipcu – odpowiada tylko jedna możliwość. Obliczamy więc najpierw prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A.

$P(A') = \frac{1}{12}$

Stąd

$P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wskazana osoba nie urodziła się w lipcu jest równe $\frac{11}{12}$.

Powyższy przykład był dość prostym zadaniem na zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, ale jak wkrótce się przekonasz, wzór ten ułatwia rozwiązywanie wielu skomplikowanych problemów probabilistycznych.

Przykład 5

Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo, że choć raz uzyskaliśmy liczbę oczek równą 3 lub 4.

Liczba zdarzeń elementarnych w rozpatrywanym doświadczeniu jest równa:

$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Rozważmy zdarzenie przeciwne: A' – ani razu nie wypadła ani liczba oczek równa trzy, ani cztery.

Wtedy może wypaść każda z pozostałych czterech liczb oczek (1, 2, 5 lub 6).

$|A'| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Zatem:

$P(A') = \frac{64}{216}$

Na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego, otrzymujemy:

> $P(A) = 1 - \frac{64}{216} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27}$
>
> Odpowiedź:
>
> Prawdopodobieństwo, że choć raz uzyskaliśmy liczbę oczek równą 3 lub 4 jest równe $\frac{19}{27}$.

Przed nami własność prawdopodobieństwa, związana z prawdopodobieństwem sumy zdarzeń.

> **Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń**
>
> Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, wówczas
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
>
> Jeśli zdarzenia A i B wykluczają się, czyli $A \cap B = \emptyset$, to
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

> **Przykład 6**
>
> Wśród 50 przechodniów przeprowadzono ankietę, w której zapytano o ulubiony smak lodów. Połowa osób odpowiedziała, że najbardziej lubi lody waniliowe, 80% pozostałych odpowiedziało, że lubi lody czekoladowe. A dwie osoby stwierdziły, że lubią i lody waniliowe, i czekoladowe.
>
> Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że losowo wskazana osoba z tej grupy lubi lody waniliowe lub czekoladowe.
>
> Oznaczmy:
> W – zdarzenie, że losowo wskazana osoba lubi lody waniliowe,
> C – zdarzenie, że losowo wskazana osoba lubi lody czekoladowe,
>
> Wskazujemy jedną z 50 osób, zatem $|\Omega| = 50$.
>
> Liczba osób, która lubi lody waniliowe jest równa: $0,5 \cdot 50 = 25$.
>
> Liczba osób, która lubi lody czekoladowe jest równa: $0,8 \cdot 25 = 20$.
>
> Liczba osób, która lubi i lody waniliowe i czekoladowe jest równa 2.
>
> Zatem:
>
> $|W| = 25$, $|C| = 20$, $|W \cap C| = 2$.
>
> Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

$P(W \cup C) = P(W) + P(C) - P(W \cap C)$

$P(W \cup C) = \frac{25}{50} + \frac{20}{50} - \frac{2}{50} = \frac{43}{50}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że losowo wskazana osoba z tej grupy lubi lody waniliowe lub czekoladowe jest równe $\frac{43}{50}$.

Przykład 7

Wiadomo, że $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$ i $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. Obliczymy $P(A \cup B)$.

Zauważmy, że

$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Zdarzenia A i B wykluczają się. Zatem

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{12}$.

Przykład 8

W torebce jest 10 cukierków, w tym cztery to cukierki miętowe. W sposób losowy wyjmujemy z torebki trzy cukierki. Obliczymy prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa wyjęte cukierki to cukierki miętowe.

Zdarzeniami elementarnymi są trzyelementowe podzbiory zbioru dziesięcioelementowego. Zatem

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$

Zdarzenie polegające na wyciągnięciu co najmniej dwóch cukierków miętowych, możemy rozpatrywać jako sumę zdarzeń:

A – wyciągamy dwa cukierki miętowe,

B – wyciągamy trzy cukierki miętowe.

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest równa:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 6 = 36$$

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B jest równa:

$\binom{4}{3} = 4$

Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$, korzystamy ze wzoru:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{36}{120} + \frac{4}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa wyjęte cukierki to cukierki miętowe, jest równe $\frac{1}{3}$.

Słownik

własności prawdopodobieństwa

niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$; wówczas:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$

Infografika

Polecenie 1

Spróbuj zapisać wzór na prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń. Porównaj swój zapis ze wzorem zamieszczonym w infografice. Uzasadnij zapisane w infografice wzory, korzystając z odpowiednich rysunków.

Polecenie 2

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach. Wykaż, że $P(A \cup B) - P(A \setminus B) = P(B)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach. Wskaż wszystkie pary zdarzeń, które na pewno nie są zdarzeniami rozłącznymi.

- [ ] $P(A) = \frac{2}{11}$ i $P(B) = \frac{1}{4}$
- [ ] $P(A) = \frac{2}{5}$ i $P(B) = \frac{4}{5}$
- [ ] $P(A) = \frac{9}{10}$ i $P(B) = \frac{7}{9}$
- [ ] $P(A) = \frac{3}{4}$ i $P(B) = \frac{3}{5}$

Ćwiczenie 2

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach. Jeżeli $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A \cup B) = \frac{15}{16}$ to liczba $P(B')$ jest równa:

- ○ $\frac{3}{8}$
- ○ $\frac{5}{16}$
- ○ $\frac{11}{16}$
- ○ $\frac{5}{8}$

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach oraz $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$.
Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

- [ ] $P(B \setminus A) = \frac{1}{4}$
- [ ] $P(A \setminus B) = \frac{1}{5}$
- [ ] $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$
- [ ] $P(A') + P(B') = \frac{3}{5}$

Ćwiczenie 5

Aby przejść do drugiego etapu konkursu *Gra o wszystko*, uczestnik musi odpowiedzieć na co najmniej jedno pytanie spośród czterech, które losuje z 20 możliwych. Eryk zna odpowiedź tylko na 12 pytań. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Eryk przejdzie do drugiego etapu konkursu?
Uzupełnij rozwiązanie powyższego zadania, wybierając odpowiednie liczby z podanych.

Zdarzeniem elementarnym w rozważanym doświadczeniu jest czteroelementowa kombinacja zbioru ______–elementowego.

$|\Omega| =$ ______

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A – Eryk odpowie na co najmniej jedno pytanie, jest zdarzenie A' - Eryk nie odpowie na żadne pytanie.

Zdarzenie A' polega na wylosowaniu ______ pytań spośród ______ pytań, na które nie zna odpowiedzi.

$|A'| =$ ______

Zatem $P(A') =$ ______.

Prawdopodobieństwo szukanego zdarzenia jest więc równe

$P(A) =$ ______ $-P(A') =$ ______.

1 4 20 $\frac{955}{969}$ $\frac{14}{969}$ 8 $\binom{8}{4}$ $\binom{20}{4}$

Ćwiczenie 6

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach oraz $P(A') = 0,6$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,7$.
Uzupełnij równości, wpisując odpowiednie liczby zapisane za pomocą ułamków dziesiętnych.

$P(B) - P(A) =$ ______

$P(A \cap B) =$ ______

$P(B') =$ ______

$P(B \setminus A) =$ ______

Ćwiczenie 7

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(A) = \frac{2}{5}$ i $P(B) = \frac{1}{4}$.
Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie zadania.

- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.
- $\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$
- $\frac{1}{2} = \frac{13}{20} - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}$
- Podstawiamy do wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń odpowiednie liczby.
- $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$
- Teraz skorzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń.
- $P(A \cap B) = \frac{13}{20} - \frac{10}{20} = \frac{3}{20}$
- Do wzoru na prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń podstawiamy odpowiednie liczby.
- Odpowiedź: prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń A i B jest równe $\frac{1}{4}$.
- Wyznaczamy prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń.

Ćwiczenie 8

Wiadomo, że A, B są zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω i P jest prawdopodobieństwem określonym na tych zdarzeniach.

Wykaż, że jeżeli $P(A) = \frac{3}{5}$ i $P(B) = \frac{4}{5}$, to:

$\frac{2}{5} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{5}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności prawdopodobieństwa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa niektóre własności prawdopodobieństwa
- oblicza prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru
- oblicza prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń, korzystając z odpowiedniego wzoru
- przeprowadza proste rozumowania, mające na celu udowodnienie zapisanych wzorów
- dobiera model matematyczny do danej sytuacji z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- tak – nie
- ośmiornica

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki, kostki do gry, monety

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają poznane wiadomości dotyczące prawdopodobieństwa, z uwzględnieniem definicji i wzorów.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie podzieleni na małe grupy, budują zadania dotyczące obliczania prawdopodobieństwa w rzutach kostką i monetami. Analizując wyniki rzutów kostką, monetami, kostką i monetami, starają się sformułować zaobserwowane własności prawdopodobieństwa.
2. Uczniowie wspólnie pracują metodą tak – nie. Liderzy przedstawiają wyniki prac swoich grup. Pozostali albo zgadzają się z wnioskami – TAK, albo uznają je za niepoprawne – NIE.
   Wszystkie propozycje TAK zapisywane są na tablicy.
3. Uczniowie zapoznają się z zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” własnościami prawdopodobieństwa (pierwsze z podanych w „Przeczytaj” twierdzeń), porównują ze swoimi zapiskami korygują je i wspólnie udowadniają własności.
4. Druga część zajęć rozpoczyna się od przypomnienia działań na zbiorach, sporządzenia odpowiednich rysunków i zapisania odpowiednich wzorów.
5. Na ich podstawie, metodą ośmiornicy, uczniowie pracujący w parach, starają się sformułować twierdzenia na prawdopodobieństwo sumy, iloczynu i różnicy (macki ośmiornicy dotykają odpowiednich wzorów mnogościowych, a na mackach zapisywane są odpowiadające im wzory na prawdopodobieństwo).
6. Wybrana para uczniów przedstawia wymyślone przez siebie twierdzenia, reszta uczniów wprowadza ewentualne korekty do propozycji. Dla przykładu uczniowie udowodniają jedno z zapisanych twierdzeń.
7. Teraz uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania zapisane w sekcji „Przeczytaj” i w infografice, porównując swoje rozwiązania z zawartymi w materiale.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia interaktywne.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wstępem do zajęć, wtedy uczniowie rozpoczną zajęcia od udowodnienia zapisanego tam twierdzenia.