Graniastosłup prawidłowy trójkątny - zadania z kontekstem realistycznym

Graniastosłup prawidłowy trójkątny - zadania z kontekstem realistycznym

Źródło: Tomasz Mikołajczyk z Pixabay, domena publiczna.

Przejeżdżając przez miasto Wyszków w województwie mazowieckim warto zatrzymać się w celach turystycznych. Jedną z tamtejszych atrakcji jest pomnik poświęcony trzem wybitnym polskim kryptologom, którzy rozszyfrowali niemiecką maszynę Enigmę: Jerzemu Różyckiemu, Marianowi Rejewskiemu i Henrykowi Zygalskiemu. Nie powinien dziwić więc fakt, że jest on w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Na ścianach, wśród cyfr, są umieszczone nazwiska kryptologów oraz daty ich urodzin i śmierci. Projektanci tworząc ten pomnik na pewno musieli odpowiedzieć na pytania: jakie będzie miał wymiary? Z jakiego materiału powstanie? Ile będzie ważył? Nad podobnymi problemami pochylimy się w tym materiale.

> **Twoje cele**
>
> - Wykorzystasz wiedzę o graniastosłupie prawidłowym trójkątnym do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym.
> - Przeanalizujesz treść zadania z kontekstem realistycznym i zbudujesz do niego matematyczny model.

Przeczytaj

Na początku przypomnijmy definicję, własności i wzory dotyczące graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

> **Definicja: Graniastosłup prawidłowy trójkątny**
>
> Graniastosłup prawidłowy trójkątny to taki graniastosłup prosty, który ma w podstawie trójkąt równoboczny.

> **Własność: Graniastosłupa prawidłowego trójkątnego**
>
> Bryła ta ma:
>
> - pięć ścian: dwie podstawy (trójkąty równoboczne) i trzy ściany boczne (prostokąty).
> - dziewięć krawędzi: sześć krawędzi podstaw (oznaczmy ich długość przez a) i trzy krawędzie boczne (oznaczmy ich długość przez h)
> - sześć wierzchołków

Wzory

Warto zwrócić uwagę na charakterystyczne odcinki w tym graniastosłupie:

- wysokość podstawy, o długości $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- przekątna ściany bocznej, o długości $d = \sqrt{a^2 + h^2}$

Najdłuższym odcinkiem w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym jest przekątna ściany bocznej.

Przypomnijmy, jak obliczyć odpowiednie miary w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym:

- Suma długości wszystkich krawędzi $S = 6a + 3h$
- Pole powierzchni podstawy $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Pole powierzchni bocznej $P_b = 3ah$
- Pole powierzchni całkowitej $P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$
- Objętość $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$

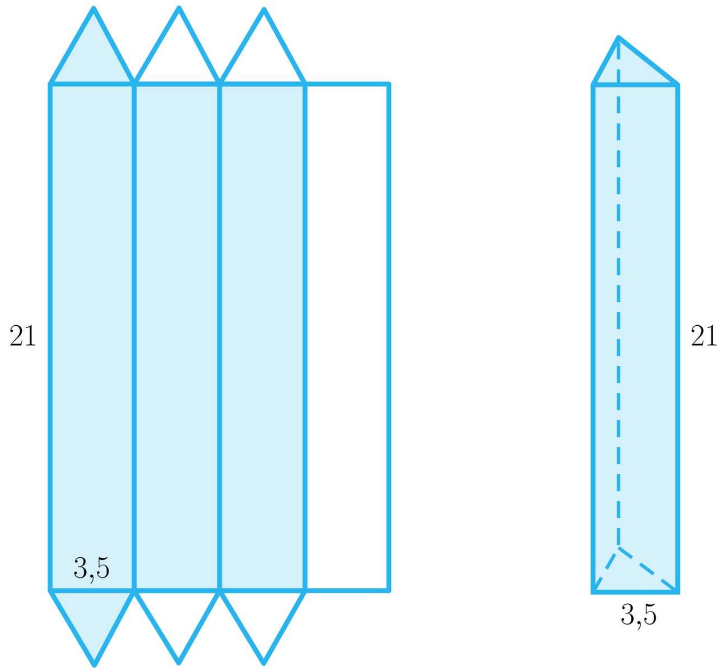
W zadaniach z kontekstem praktycznym mamy często do czynienia z takimi wielkościami jak gęstość materiału czy gramatura papieru. Niezawodnym sposobem na wydedukowanie tego, jakim wzorem obliczana jest dana wielkość, jest zwrócenie uwagi na jednostkę, w jakiej jest wyrażana. I tak, jeżeli gramatura papieru podana jest w $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$ oznacza to, że aby ją wyliczyć, należy podzielić masę papieru (w gramach) przez jego pole powierzchni (w metrach kwadratowych).

Przykład 1

Obliczymy, ile waży pudełko na czekoladę w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości $3,5\ \text{cm}$ i wysokości $21\ \text{cm}$, zbudowane z papieru o gramaturze $300\ \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$. Weźmiemy pod uwagę, że do sklejenia pudełka niezbędne są zakładki: jedna dodatkowa ściana boczna oraz po dwa dodatkowe trójkąty w każdej podstawie.

Rozwiązanie:

Spójrzmy na rysunek obok.



Po prawej stronie widzimy złożony graniastosłup. Po lewej jest on rozłożony na płaszczyźnie. Kolorem zaznaczone są ściany zewnętrzne bryły, białe natomiast są dodatkowe zakładki potrzebne do złożenia pudełka.

Obliczymy pole powierzchni całkowitej kartonu użytego do zbudowania opakowania. Składa się ono z pola całkowitego bryły oraz z pól dodatkowych zakładek.

$P = 3ah + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + ah + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$P = 4ah + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Wstawiając dane z zadania, otrzymujemy:

$P = 4 \cdot 3,5 \cdot 21 + \frac{3 \cdot (3,5)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 294 + 32 = 326 \ [\mathrm{cm}^2]$

$326 \ \mathrm{cm}^2 = 3,26 \ \mathrm{dm}^2 = 0,0326 \ \mathrm{m}^2$

Gramatura papieru jest równa 300 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2}$, zatem masa pudełka w przybliżeniu wynosi:

$0,0326 \ \mathrm{m}^2 \cdot 300 \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^2} = 9,78 \ \mathrm{g}$

Przykład 2

Zaprojektujemy donicę, która ozdobi miejski rynek, według poniższych wymagań:

- jest w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego,
- jej wysokość jest 2 razy mniejsza niż długość krawędzi w podstawie,
- pomieści ok. 3000 litrów ziemi.

Rozwiązanie:

Przez x oznaczmy długość wysokości. Wtedy długość krawędzi bocznej wynosi $2x$.

Objętość donicy wyrażona w litrach, a więc w decymetrach sześciennych, wynosi 3000 i jest równa wyrażeniu $\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} \cdot x$.

$\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = 3000$

$\frac{4x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = 3000$

$x^3 = \frac{3000}{\sqrt{3}}$

$x^3 \approx 1732$

$x \approx 12 \ [\mathrm{dm}]$

Donice będą miały wysokość $120 \ \mathrm{cm}$ oraz długość krawędzi w podstawie $240 \ \mathrm{cm}$.

Przykład 3

Poczujmy się jak projektanci opisanego we wstępie pomnika. Załóżmy, że krawędź jego podstawy ma długość $1 \ \mathrm{m}$, a wysokość to $3,5 \ \mathrm{m}$. Pomnik jest wykonany z patynowanego brązu, którego gęstość zazwyczaj wacha się w przedziale $7,5 - 9,3 \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Przyjmijmy, że do odlania tego konkretnego pomnika użyjemy brązu o gęstości $8,5 \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Obliczymy przybliżoną wagę monumentu.

Rozwiązanie:

Objętość pomnika obliczymy korzystając ze wzoru:

$V = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3,5 \approx 1,516 \left[\mathrm{m}^3\right]$

Gęstość materiału wynosi:

$8,5 \ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 8,5 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = 8500 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

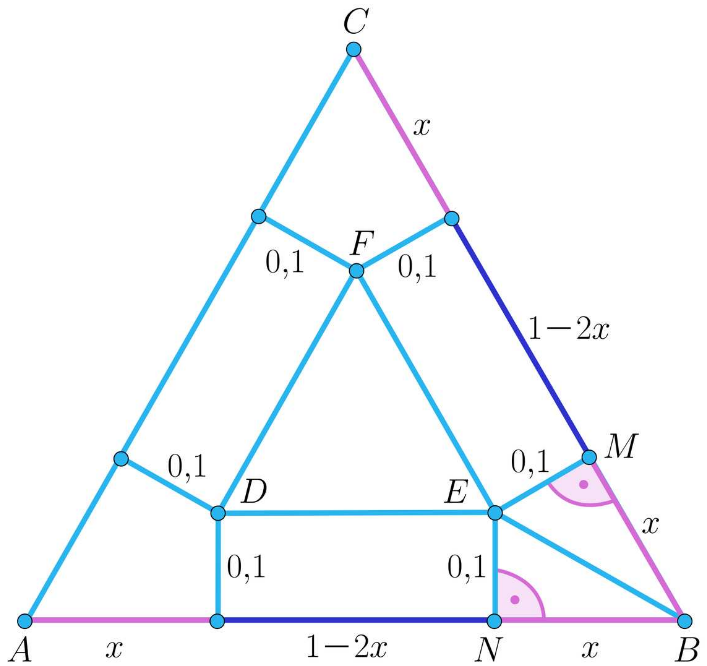
Waga pomnika wynosi ok. $1,516 \cdot 8500 = 12886$, czyli ponad 12 ton.

Przykład 4

Obliczymy wagę pomnika opisanego w przykładzie trzecim zakładając, że jego ściany (boczne oraz górna podstawa) mają grubość $10 \ \mathrm{cm}$, a poza tym jest w środku pusty.

Rozwiązanie:

Objętość materiału wykorzystanego do tak odlanego pomnika będzie różnicą pomiędzy obliczoną w przykładzie trzecim objętością zewnętrzną, a objętością graniastosłupa, który wytniemy ze środka. Na rysunku poniżej widzimy zarys tego pomnika.



Wysokość wewnętrznego graniastosłupa wynosi $3,5 - 0,1 = 3,4 \ [\mathrm{m}]$.

Zastanówmy się, jak obliczyć długość krawędzi jego podstawy. W tym celu rozrysujemy obok rzut płaski podstawy pomnika.

Punkt E jest równoodległy od ramion kąta NBM, zatem leży na jego dwusiecznej. Kąt NBM ma miarę 60°, a więc miara kąta NBE to 30°. Stąd wynika, że

$\mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{0,1}{x}$

$x = \frac{0,1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 0,1\sqrt{3}$

Szukana długość krawędzi ED wynosi $\left(1 - 0,2\sqrt{3}\right)$ m.

Obliczamy objętość wewnętrznego graniastosłupa:

$$V_W = \frac{\left(1-0,2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3,4 = \frac{\left(1-0,4\sqrt{3}+0,12\right)\sqrt{3}}{4} \cdot 3,4 =$$

$$= \left(1,12\sqrt{3} - 1,2\right) \cdot 0,85 = 0,952\sqrt{3} - 1,02 \approx 0,629 \left[\mathrm{m}^3\right]$$

Objętość użytego materiału to ok. $1,516 - 0,629 = 0,887 \mathrm{~m}^3$, a jego masa wynosi ok. $0,877 \cdot 8500 = 7539,5 \mathrm{~kg}$.

Słownik

graniastosłup prosty

graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

gramatura papieru

masa wyrobu papierniczego wyrażona w gramach podana na metr kwadratowy

gęstość

stosunek masy pewnej ilości substancji do zajmowanej przez nią objętości: $\rho = \frac{m}{V}$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z zadaniami i ich rozwiązaniami przedstawionymi w filmie samouczku, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DSm7QUCGb

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej graniastosłupów.

Polecenie 2

Ułóż samodzielnie zadanie podobne do jednego z przedstawionych w filmie i rozwiąż je.

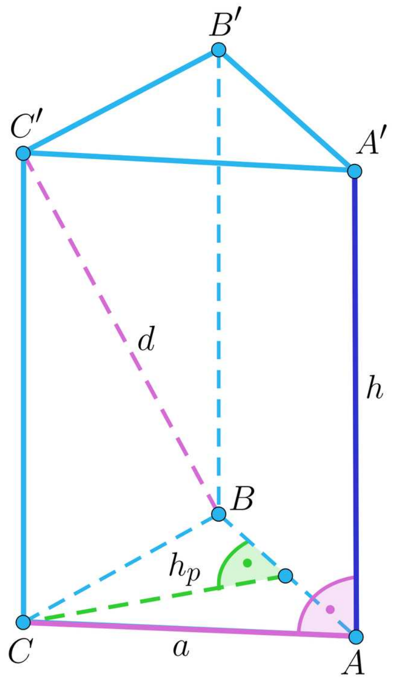
Polecenie 3

Przepisz treść ułożonego przez Ciebie zadania (bez rozwiązania) na osobną kartkę. Przekaż ją koledze/koleżance z pary oraz rozwiąż zadanie ułożone przez niego/nią. Na końcu wspólnie sprawdźcie poprawność waszych rozwiązań.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1



Dopasuj wielkość związaną z graniastosłupem prawidłowym trójkątnym, której użyjesz rozwiązując zadanie do podanego kontekstu praktycznego.

ilość farby potrzebnej do pomalowania ścian pomnika (nie licząc góry)	pole powierzchni całkowitej $P = 3ah + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
ilość papieru ozdobnego potrzebnego do opakowania całego pudełka z prezentem	pole powierzchni bocznej $P_b = 3ah$
pojemność kosza na śmieci	długość przekątnej ściany graniastosłupa $d = \sqrt{a^2 + h^2}$
najdłuższy ołówek włożony do pudełka	objętość $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$

Ćwiczenie 2

Janek planuje zbudować karmnik dla ptaków w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy jest długości 25 cm, a krawędź boczna 30 cm. Zaczyna od zbudowania stelaża z listewek - wszystkich dziewięciu krawędzi bryły, które w następnej kolejności od góry i od dołu obije deskami. Ile metrów bieżących listewki potrzebuje Janek do tej konstrukcji?

- ◯ $2,4 \text{ mb}$
- ◯ 3 mb
- ◯ $1,8 \text{ mb}$
- ◯ $0,75 \text{ mb}$

Ćwiczenie 3

Konserwator zabytków planuje odświeżyć pomnik w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości 1 m i wysokości $3,5 \text{ m}$. Do wyczyszczenia powierzchni (ścian bocznych oraz górnej podstawy) użyje rozpuszczalnika o wydajności $0,25 \frac{\text{l}}{\text{m}^2}$. Ile litrów (w przybliżeniu do części dziesiętnych) rozpuszczalnika będzie potrzebował do tego zabiegu?

- ◯ $45,5 \text{ l}$
- ◯ $2,7 \text{ l}$
- ◯ $2,8 \text{ l}$
- ◯ $43,7 \text{ l}$

Ćwiczenie 4

Jakiej długości pręt zmieści się do pudełka w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wszystkich krawędziach tej samej długości i polu powierzchni bocznej równej $48 \mathrm{~m}^2$? Wskaż prawidłowe długości spośród podanych propozycji.

- [ ] $4,78 \mathrm{~m}$
- [ ] $4 \mathrm{~m}$
- [ ] $5,6 \mathrm{~m}$
- [ ] $5,86 \mathrm{~m}$
- [ ] $5,7 \mathrm{~m}$

Ćwiczenie 5

Kamil jest na ścisłej diecie z powodów zdrowotnych. Jego ulubionym jedzeniem jest ser. Lekarz i dietetyk pozwolili mu jeść ser, ale pod warunkiem, że dziennie zje co najwyżej $200 \mathrm{~kcal}$ pochodzących z żółtego sera. Znalazł w lodówce kawałek sera w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o kaloryczności $500 \mathrm{~kcal}$ w $100 \mathrm{~g}$. Przeczytał w internecie, że $10 \mathrm{~cm}^3$ tego sera waży $25 \mathrm{~g}$. Zmierzył linijką wymiary sera: trójkąt w podstawie ma bok długości $7 \mathrm{~cm}$, a wysokość to $8 \mathrm{~cm}$. Kamil chce pokroić ten kawałek na równe części. Na ile części może podzielić ser tak, aby każda porcja nie przekraczała $200 \mathrm{~kcal}$? Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi spośród podanych propozycji.

- [ ] 13
- [ ] 12
- [ ] 10
- [ ] 9
- [ ] 11

Ćwiczenie 6

Oblicz wymiary donicy w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, która mieści 72 litry ziemi, a długość jej krawędzi bocznej jest równa wysokości trójkąta w podstawie.

Ćwiczenie 7

Kosz na śmieci w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest zbudowany z metalowych krawędzi i obudowany cienkimi deseczkami. Na wszystkie krawędzie zużyto łącznie $4,5 \text{ m}$ pręta, natomiast najdłuższy patyk, jaki jesteśmy w stanie włożyć do tego kosza tak, aby nie wystawał, ma długość $75 \ \text{cm}$. Czy w tym koszu zmieści się 50 litrów śmieci?

Ćwiczenie 8

Pan Jan konstruuje zamkniętą szkatułę w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Postanowił, że zewnętrzna krawędź podstawy będzie miała długość $20 \ \text{cm}$, a jej waga nie przekroczy $2 \ \text{kg}$. Do jej zbudowania użyje drewnianej płyty o grubości $2 \ \text{cm}$ i gęstości $600 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Jaka będzie możliwie największa wysokość tej szkatuły, z dokładnością do $1 \ \text{cm}$?

Dla nauczyciela

Autor: Bartłomiej Cymbalista

Przedmiot: Matematyka

Temat: Graniastosłup prawidłowy trójkątny - zadania z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6. oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wiedzę o graniastosłupie prawidłowym trójkątnym do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym;
- analizuje treść zadania z kontekstem realistycznym i buduje do niego matematyczny model.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- pogadanka

- dyskusja
- praca z medium bazowym

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całą klasą

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przed lekcją przypominają sobie wiadomości o graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, definicję oraz wzory. Zapoznają się z przykładami z sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Graniastosłup prawidłowy trójkątny - zadania z kontekstem realistycznym”, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podanie przykładów problemów realistycznych, w rozwiązaniu których przydatne są wiadomości o objętości, polu powierzchni, długości odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 2–5 z sekcji „sprawdź się”. Nauczyciel pyta wybranych uczniów o odpowiedzi i rozwiązania, pozostali uczniowie dyskutują nad poprawnością przedstawionych rozwiązań. W razie potrzeby, korygują je.
2. Uczniowie zostają podzieleni na pary i ponumerowani (osoba nr 1 i osoba nr 2). Wspólnie zapoznają się z prezentacją z sekcji „Film samouczek”, a następnie wykonują polecenia 2 i 3. Pierwszy uczeń z pary układa zadanie analogiczne do zadania pierwszego z filmu, drugi do drugiego, a następnie wymieniają się zadaniami. Najciekawsze zadania i rozwiązania mogą zostać przedstawione na tablicy.
3. Uczniowie pozostają w podziale na pary. Rozwiązują ćwiczenia 6–8 z sekcji „sprawdź się”. Wskazani przez nauczyciela uczniowie przedstawiają rozwiązania na tablicy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel wyświetla na ekranie ćwiczenie 1 z sekcji „sprawdź się”, a uczniowie wspólnym frontem rozwiązują je.

Praca domowa:

Znajdź w swoim otoczeniu przedmiot w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Zmierz jego wymiary, a następnie ułóż o nim zadanie. Treść zadania wraz z jego rozwiązaniem zapisz w zeszycie.

Materiały pomocnicze:

- Graniastosłup prawidłowy trójkątny
- Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać medium bazowe jako zadanie do przygotowania przez uczniów przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z nim w domu, a następnie wykonują polecenie 2 z uwzględnieniem podziału, np. uczniowie o nieparzystym numerze w dzienniku układają zadanie analogiczne do przykładu 1, a uczniowie o parzystym numerze w dzienniku układają zadanie analogiczne do przykładu 2. Podczas lekcji uczniowie dobierają się w pary i wymieniają zadaniami.