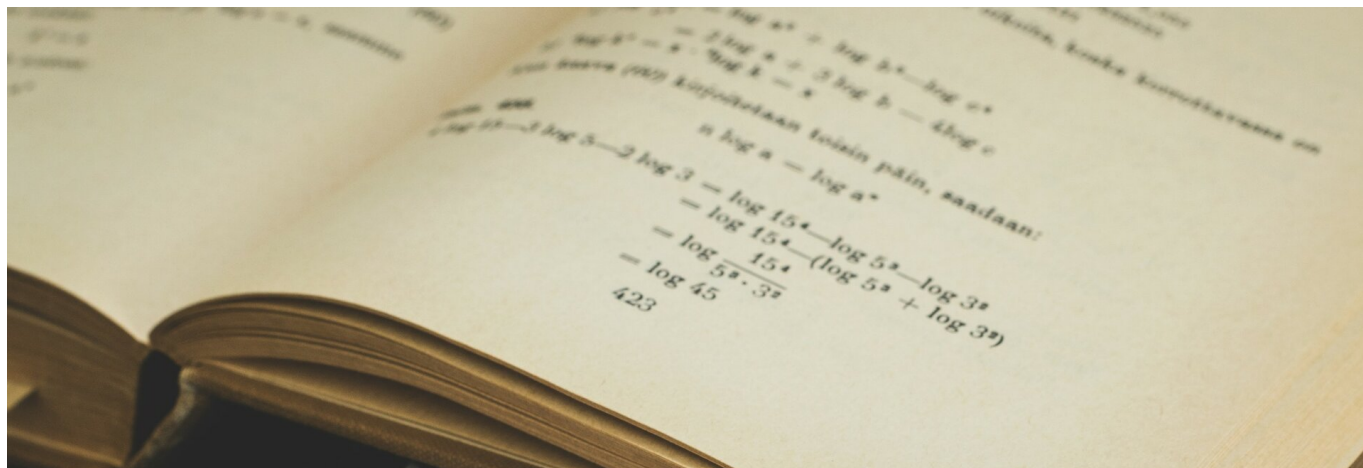




Historia i określenie logarytmów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Audiobook](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Historia i określenie logarytmów

Źródło: LUM3N na Pixabay, domena publiczna.

W życiu codziennym zwykle mamy do czynienia z niewielkimi liczbami. Często w obliczeniach wykorzystujemy kalkulator, ale w razie konieczności jesteśmy w stanie dokonać obliczeń w pamięci lub na kartce. Jednak wraz z rozwojem nauki i techniki rośnie potrzeba wykonywania działań na dużych liczbach.

Jak naukowcy radzili sobie z obliczeniami przed erą komputerów? Nie udzielimy na to pytanie wyczerpującej odpowiedzi, ale zarysujemy ideę towarzyszącą powstaniu pewnego narzędzia matematycznego, które w swoim czasie przyczyniło się do rozwoju nauki, a zatem również całej cywilizacji. Istota **logarytmu**, bo o nim mowa, polega na tym, że korzystając z jego własności można zamienić pracochłonne mnożenie liczb na ich dodawanie, co znacznie upraszcza rachunki.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję logarytmu.
- Uzasadnisz niewymierność niektórych logarytmów.
- Rozpoznasz, czy dany logarytm jest liczbą wymierną.
- Porównasz wartości logarytmów.

Przeczytaj

Logarytm definiujemy następująco:

Logarytm o dodatniej i różnej od 1 podstawie a z dodatniej liczby b to wykładnik potęgi, do jakiej należy podnieść a , aby otrzymać b .

Powyższą definicję można zapisać symbolicznie:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Przykład 1

$$\log_3 9 = 2, \text{ bo } 3^2 = 9$$

$$\log_2 16 = 4, \text{ bo } 2^4 = 16$$

$$\log_5 5 = 1, \text{ bo } 5^1 = 5$$

$$\log_6 1 = 0, \text{ bo } 6^0 = 1$$

$$\log_7 \frac{1}{49} = -2, \text{ bo } 7^{-2} = \frac{1}{49}$$

$$\log_{64} 4 = \frac{1}{3}, \text{ bo } 64^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 3, \text{ bo } (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Najczęściej we współczesnej matematyce używamy systemu dziesiętnego, zatem na szczególną uwagę zasługują logarytmy o podstawie 10. Przyjęło się, że w przypadku logarytmu dziesiętnego nie notujemy podstawy:

$$\log_{10} a = \log a, \quad a > 0.$$

Przykład 2

$$\log 100 = 2, \text{ bo } 10^2 = 100$$

$$\log \frac{1}{1000} = -3, \text{ bo } 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$\log 0,01 = -2, \text{ bo } 10^{-2} = 0,01$$

$$\log \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}, \text{ bo } 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100}$$

We wszystkich powyższych przykładach, w wyniku **logarytmowania** otrzymaliśmy liczby wymierne. Istnieją jednak logarytmy, które są liczbami niewymiernymi.

Przykład 3

Rozważmy $\log_2 3$. Udowodnimy, że jest to liczba niewymierna. Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost.

Sprawdźmy, do czego doprowadziłoby nas przypuszczenie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Ponieważ każdą liczbę wymierną można zapisać jako ułamek zwykły nieskracalny, to istnieją liczby całkowite p i q , dla których $\log_2 3 = \frac{p}{q}$.

Zauważmy ponadto, że $\log_2 3 > \log_2 2 = 1$. Zatem $\log_2 3$ jest liczbą dodatnią, możemy więc przyjąć założenie, że p i q są liczbami naturalnymi dodatnimi. Wprost z definicji logarytmu wynika, że $2^{\frac{p}{q}} = 3$. Obie strony tego równania są nieujemne, możemy je podnieść do potęgi q , otrzymując równanie równoważne $2^p = 3^q$.

Ponieważ p i q są liczbami naturalnymi, więc lewa strona równania jest iloczynem samych dwójek, zaś prawa – iloczynem samych trójek. Zatem nie jest możliwe, aby obie strony były równe.

Przypuszczenie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną, doprowadziło do sprzeczności, zatem $\log_2 3$ nie może być liczbą wymierną, czyli $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Ciekawostka

W matematyce bardzo ważną rolę odgrywa liczba e (stała Eulera, liczba Nepera) w przybliżeniu równa 2, 718281828459... Pod pewnymi względami przypomina ona liczbę π . Jedną z ich cech wspólnych jest to, że obie są niewymierne. Wykorzystuje się ją również w fizyce. Liczba ta jest m.in. podstawą logarytmów zwanych naturalnymi. Do zapisu logarytmu naturalnego używamy nieco innej konwencji:

$$\log_e a = \ln a, \quad a > 0$$

Słownik

logarytmowanie

działanie odwrotne do potęgowania

logarytm

wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę potęgi, aby otrzymać liczbę logarytmowaną:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Polecenie 1

Zapoznaj się z informacjami na temat logarytmów i odpowiedz na poniższe pytania.

Audiobook można wysłuchać pod adresem: <https://zpe.gov.pl/b/PhnZtHMGN>

Definicja logarytmu

Od bardzo dawna naukowcy, między innymi astronomowie i fizycy, używają do swoich obliczeń dużych liczb. Często pojawia się też potrzeba wykonywania na nich pewnych obliczeń. W czasach, kiedy na świecie nie było jeszcze kalkulatorów ani komputerów, mnożenie takich liczb było bardzo uciążliwe. Dlatego do pewnych operacji używano logarytmów, które pozwalały zamienić pracochłonne mnożenie na łatwiejsze dodawanie.

Za ojca logarytmów uważa się Johna Napiera – bogatego szkockiego właściciela ziemskiego. W swoim dziele z 1614 roku Napier rozpowszechnił podany przez Jostę Bürgiego sposób budowy tablic umożliwiających mnożenie liczb za pomocą dodawania innych liczb. Logarytmy dziesiętne zostały wprowadzone trzy lata później przez Henry'ego Briggsa zainspirowanego lekturą dzieła Napiera i dyskusjami z jego autorem.

Wynalezienie logarytmów było krokiem milowym, który znacząco ułatwił prace rachunkowe astronomom, żeglarzom, inżynierom i matematykom, między innymi Johannowi Keplerowi oraz Izaakowi Newtonowi.

Dzisiejsza formalna definicja logarytmu brzmi:

Logarytm o dodatniej i różnej od jedynki podstawie a z dodatniej liczby b to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby uzyskać liczbę b .

Logarytmy mają mnóstwo własności analogicznych do własności potęgowania. Do najważniejszych wzorów należą: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi oraz zamiana podstawy logarytmu.

Obecnie logarytmy stosuje się w chemii – do definiowania skali pH, w fizyce – na przykład do definiowania poziomu natężenia dźwięku oraz wysokości dźwięku, w statystyce, ekonomii, astronomii, a nawet psychologii. Skala Richtera, za pomocą której mierzy się natężenie trzęsienia ziemi, również ma związek z logarytmami.

Ciekawym zastosowaniem logarytmów jest Prawo Benforda sformułowane po raz pierwszy w 1881 roku przez kanadyjskiego astronoma i matematyka Simona Newcomba. Zauważył on, że w tablicach logarytmicznych znajdujących się w bibliotece pierwsze strony są brudniejsze, a co za tym idzie częściej przeglądane, niż dalsze. Swoim odkryciem podzielił się ze światem na łamach American Journal of Mathematics, jednak nie zostało ono docenione. Po 57 latach podobną obserwację poczynił Frank Benford. Sformułował on prawo, które orzeka, że w dużych zbiorach liczbowych cyfra x występuje z częstością równą logarytmowi dziesiętnemu z odwrotności liczby x powiększonej o 1. Swoje obserwacje poparł empirycznie, weryfikując je na zestawach takich danych jak: powierzchnie rzek, liczby drukowane w gazetach i ceny. Dziś prawo Benforda stosuje się między innymi do wykrywania defraudacji oraz sprawdzania poprawności zeznań podatkowych.

Polecenie 2

Logarytmy stały się bardzo popularne wśród naukowców, bo...

☐ ułatwiały dodawanie.

☐ ułatwiały mnożenie.

Logarytmy dziesiętne wprowadził...

☐ Henry Briggs.

☐ John Napier.

Logarytmy definiuje się przy pomocy...

☐ dodawania.

☐ potęgowania.

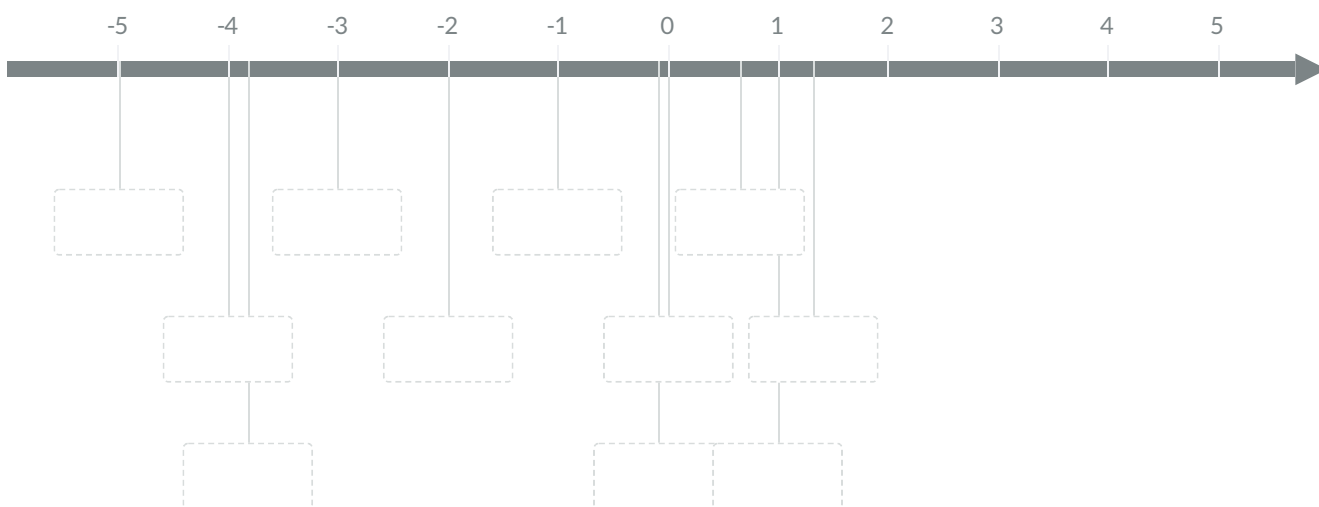
Prawo Benforda po raz pierwszy sformułował...

☐ Frank Benford.

☐ Simon Newcomb.

Polecenie 3

Umieść logarytmy na osi liczbowej przy odpowiadającej im wartości liczbowej.



1) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

2) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$

3) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

4) $\log_2 8$

5) $\log_2 16$

6) $\log_2 32$

7) $\log_2 4$

8) $\log_2 1$

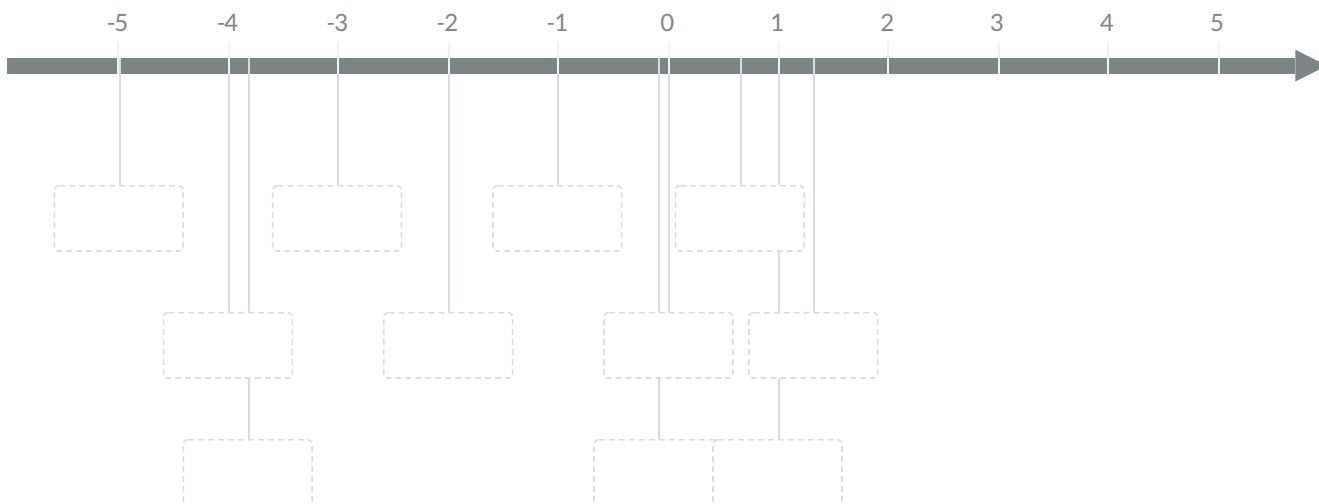
9) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

10) $\log_2 2$

11) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$

Polecenie 4

Umieść logarytmy na osi liczbowej przy odpowiadającej im wartości liczbowej.



1) $\log_3 9$

2) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$

3) $\log_3 243$

4) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right)$

5) $\log_3 81$

6) $\log_3 27$

7) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

8) $\log_3 3$

9) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

10) $\log_3 1$

11) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

Polecenie 5

Na podstawie powyższych poleceń uzupełnij twierdzenie:

Z dwóch logarytmów o tej samej podstawie większej od 1 ten jest większy, którego liczba logarytmowana jest .

mniejsza

większa

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz i wpisz w luki odpowiednie liczby.

• $\log_4 16 =$

• $\log_3 27 =$

• $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{16}{81} \right) =$

• $\log_{1,1} 1,21 =$

• $\log_{0,2} 125 =$

• $\log_{\frac{5}{7}} \left(\frac{49}{25} \right) =$

• $\log_{23} 1 =$

Ćwiczenie 2



Oblicz, a następnie uzupełnij luki, wpisując odpowiednie liczby.

• $\log_{\sqrt{2}} 8 =$

• $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} =$

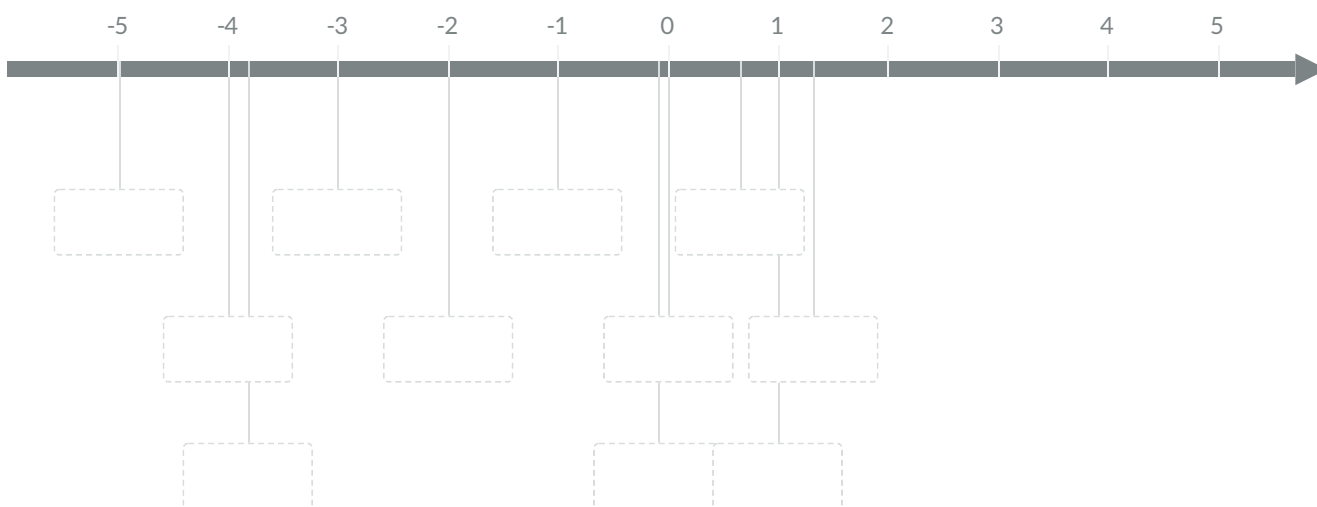
• $\log_{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{25} \right) =$

• $\log_{\sqrt{7}} \left(\frac{\sqrt{7}}{343} \right) =$

Ćwiczenie 3



Umieść logarytm na osi przy odpowiadającej im wartości liczbowej.

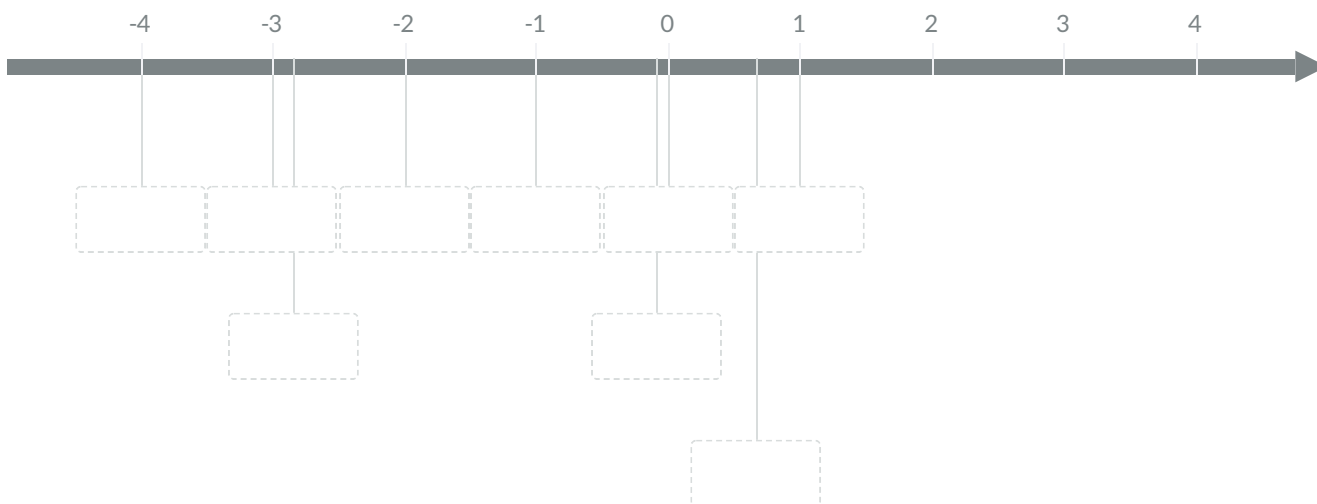


- | | | | | | |
|--|---------------------------------------|---|--|--|--|
| 1) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$ | 2) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$ | 3) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9}$ | 4) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{32}{243}$ | 5) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{81}{16}\right)$ | 6) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)$ |
| 7) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{9}{4}\right)$ | 8) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ | 9) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{243}{32}\right)$ | 10) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{27}{8}\right)$ | 11) $\log_{\frac{2}{3}} 1$ | |

Ćwiczenie 4



Umieść logarytm na osi przy odpowiadającej im wartości liczbowej.



- | | | | | |
|---|---|---|--|--|
| 1) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{125}{27}\right)$ | 2) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{25}{9}\right)$ | 3) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{27}{125}\right)$ | 4) $\log_{\frac{3}{5}} 1$ | 5) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5}\right)$ |
| 6) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{9}{25}\right)$ | 7) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{625}{91}\right)$ | 8) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{81}{625}\right)$ | 9) $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{5}{3}\right)$ | |

Ćwiczenie 5



Na podstawie dwóch poprzednich ćwiczeń wyciągnij wnioski i uzupełnij poniższe twierdzenie.

Spośród dwóch logarytmów o tych samych podstawach będących liczbami z przedziału $(0, 1)$ ten jest większy, którego liczba logarytmowana jest .

większa

mniejsza

Ćwiczenie 6



Oblicz x , a następnie uzupełnij luki, wpisując odpowiednie wartości.

• $\log_{64} x = \frac{1}{2}$

$x =$

• $\log_4 x = 3$

$x =$

• $\log_x 4 = 2$

$x =$

• $\log_{x^2} 81 = 2$

$x =$

• $\log_x 625 = 4$

$x =$

Ćwiczenie 7



Wstaw znak $<$, $>$ albo $=$.

	Znak równości lub nierówności	
$\log_3 17$		$\log_3 21$
$\log_5 26$		2
$\log_{\frac{1}{3}} 5$		$\log_{\frac{1}{3}} 6$
$\log_{\frac{1}{2}} 5$		2

Ćwiczenie 8



Zaznacz wszystkie liczby wymierne.

☐ $\log 10$

☐ $\log_6 36$

☐ $\log_{12} \left(\frac{1}{144} \right)$

☐ $\log_5 7$

☐ $\log_{196} 14$

☐ $\log_{11} 2$

☐ $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \right)$

Ćwiczenie 9



Ułóż poniższe zdania we właściwej kolejności tak, aby otrzymać dowód faktu, że $\log_3 5$ jest liczbą niewymierną.

Ponieważ obie strony powyższego równania są dodatnie, więc można je podnieść do potęgi q otrzymując równanie równoważne: $3^{\frac{p}{q}} = 5$



Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\log_3 5$ nie może być liczbą wymierną



Założmy, że liczba $\log_3 5$ jest liczbą wymierną



Ponieważ $\log_3 5 > \log_3 3 = 1 > 0$, więc p i q są liczbami naturalnymi



Zauważmy, że lewa strona powyższego równania jest iloczynem trójek, zaś prawa - iloczynem piątek



Liczbę $\log_3 5$ można przedstawić jako iloraz liczb całkowitych p i q : $\log_3 5 = \frac{p}{q}$



Wprost z definicji logarytmu wynika równość $3^{\frac{p}{q}} = 5$



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Historia i określanie logarytmów

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy.

I. Liczby rzeczywiste.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję logarytmu.
- uzasadnia niewymierność niektórych logarytmów.
- rozpoznaje, czy dany logarytm reprezentuje liczbę wymierną.
- porównuje ze sobą logarytmy.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- śniegowa kula;

- burza mózgów;
- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem audiobooka i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Śniegowa kula. Uczniowie w parach, korzystając z dostępnych materiałów, przygotowują definicję logarytmu. Następnie łączą się w czwórki, porównują efekty swojej pracy, korygują je i ustalają wspólną wersję. W kolejnym kroku uczniowie łączą się w coraz liczniejsze grupy, powtarzają czynności aż do sformułowania ogólnoklasowej definicji. Nauczyciel czuwa nad poprawnością wykonania zadania.

Faza realizacyjna

1. Analiza przykładów, których wynikami logarytmowania są liczby wymierne.
2. Burza mózgów. Nauczyciel pyta, czy logarytm może być liczbą niewymierną. Prosi, by uczniowie uzasadnili swoje odpowiedzi. Moderator zapisuje propozycje na tablicy. Zostaną one zweryfikowane później.
3. W następnym kroku wspólne przeprowadzenie dowodu metodą nie wprost. Uczniowie udowadniają, że $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną. Następuje weryfikacja pomysłów zapisanych podczas burzy mózgów.
4. Praca z audiobookiem. Uczniowie po wysłuchaniu materiału weryfikują stworzoną na początku lekcji definicję i w miarę potrzeby uzupełniają ją. Wykonują też ćwiczenia dołączone do audiobooka. Na koniec dyskutują o zastosowaniach logarytmów nie tylko w matematyce.

5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały zrobione podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Definicja logarytmu. Własności logarytmu](#)
- [Działania na logarytmach. Przykłady](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może poprosić uczniów o wysłuchanie audiobooka przed zajęciami. W fazie wstępnej lekcji powinien sprawdzić, co uczniowie zrozumieli i zapamiętali z wysłuchanego materiału. Audiobook może też być materiałem pomocniczym w przygotowaniu przez uczniów samodzielnej prezentacji multimedialnej, która zostanie wykorzystana w czasie zajęć powtórzeniowych przeprowadzonych metodą lekcji odwróconej.