Jak zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej w obliczeniach?

Czy to nie ciekawe?

Dzięki temu e-materiałowi możesz przećwiczyć rozwiązywanie zadań, w których wykorzystujemy zasadę zachowania energii mechanicznej. Znajdziesz pomiędzy nimi zagadnienia, takie jak ruch z tarciem, które wcześniej analizowaliśmy przy pomocy narzędzi kinematyki lub dynamiki. Zauważysz, że dzięki zasadzie zachowania energii, te same problemy można rozwiązać w dużo prostszy sposób.

> **Twoje cele**
>
> - poznasz zasadę zachowania energii mechanicznej i wzory pozwalające wyznaczyć poszczególne składniki tej energii,
> - dowiesz się, w jakich zagadnieniach można wykorzystywać zasadę zachowania energii,
> - zastosujesz zasadę zachowania energii do analizy prostych przypadków, tj. ruch sanek z tarciem lub ruch wahadła,

- przeanalizujesz i zinterpretujesz przypadki zasady zachowania energii w obecności lub braku sił zewnętrznych.

Przeczytaj

Warto przeczytać

W tym e-materiale skupimy się przede wszystkim na rozwiązywaniu różnorodnych zagadnień związanych z zasadą zachowania energii mechanicznej. Szczegółowe informacje o zasadzie zachowania energii mechanicznej znajdziesz w e-materiale „O czym mówi zasada zachowania energii mechanicznej?”. Tutaj przypomnimy tylko podstawowe zależności.

Energia mechaniczna ciała jest sumą jego energii kinetycznej i potencjalnej. Przypomnijmy zatem podstawowe wzory opisujące te składniki.

Energia kinetyczna ciała o masie m poruszającego się w danym układzie odniesienia z prędkością v dana jest wzorem $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

Energia potencjalna grawitacji ciała o masie m znajdującego się w pobliżu powierzchni planety (lub księżyca, gwiazdy czy innego ciała niebieskiego), gdzie występuje przyspieszenie grawitacyjne o wartości g, dana jest wzorem: $E_p = mgh$. Wielkość h oznacza odległość ciała od punktu, w którym przyjmujemy, że energia potencjalna jest równa zeru (np. powierzchnia planety).

Zasada zachowania energii mechanicznej mówi, że jeśli w układzie nie działają siły zewnętrzne, to całkowita energia mechaniczna musi być stała. W sytuacji, gdy siły zewnętrzne są obecne (np. siła tarcia), całkowita energia mechaniczna układu zmienia się o wartość równą pracy działających sił. Aby wyznaczyć pracę danej siły, posługujemy się wzorem:

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r} = Fr \cos \sphericalangle \left(\overrightarrow{F}; \overrightarrow{r} \right),$$

gdzie $\overrightarrow{F}$ jest wektorem działającej siły, a $\overrightarrow{r}$ – wektorem przemieszczenia. W przypadku, gdy ciało porusza się po linii prostej, wartość wektora przemieszczenia r jest równa drodze przebytej przez ciało.

Przykład 1: jazda na deskorolce

Podczas wykonywania akrobacji, deskorolkarz wjeżdża na nachyloną pod kątem 8° do poziomu rampę. Ile wynosiła początkowa prędkość deskorolkarza, jeśli do momentu zatrzymania się przejechał drogę s = 4 m wzdłuż rampy? Zaniedbaj tarcie. Wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

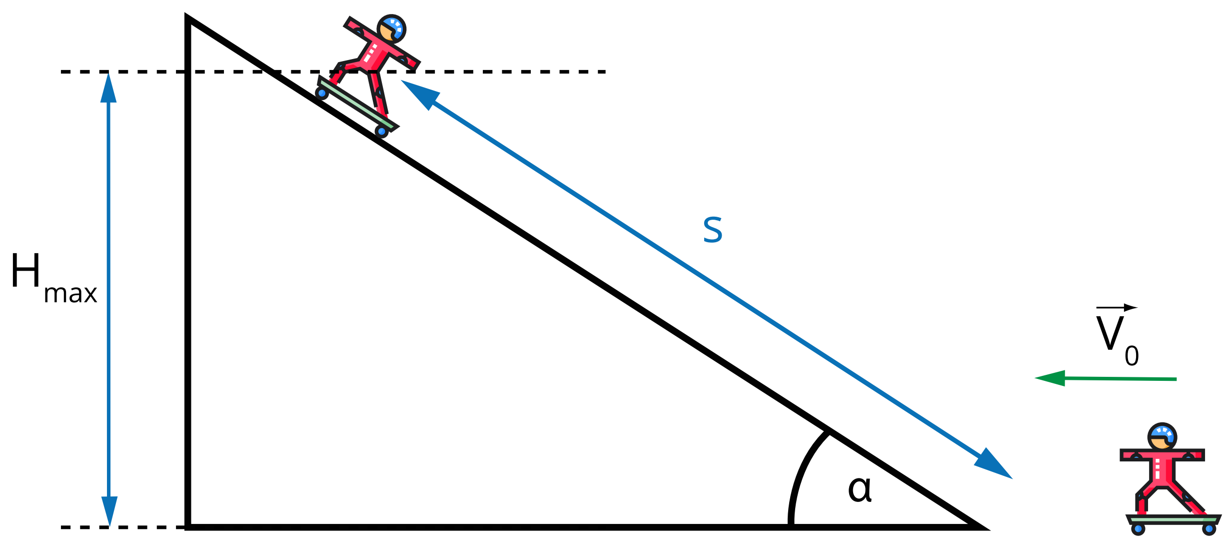
Dane	Szukane
kąt nachylenia rampy: α = 8°, droga przebyta przez deskorolkarza po rampie: s = 4 m, przyspieszenie ziemskie: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.	prędkość początkowa deskorolkarza: v_0 = ?

Analiza zadania

Przed wjazdem na rampę, deskorolkarz posiadał energię kinetyczną związaną z prędkością początkową. Podczas wjeżdżania, jego energia kinetyczna malała kosztem energii potencjalnej grawitacji. W momencie zatrzymania w najwyższym punkcie, deskorolkarz posiadał tylko energię potencjalną.

Rozwiązanie:

Rampę wraz z danymi z zadania przedstawiono na Rys. 1.:



Rys. 1. Rampa dla deskorolek

Podczas ruchu deskorolkarza, spełniona musi być zasada zachowania energii: początkowa energia kinetyczna E_{k0} musi być równa końcowej energii potencjalnej E_{pk} :

$$E_{k0} = E_{pk},$$

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = mgH_{max} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gH_{max}}.$$

Z rysunku wynika ponadto, że maksymalną wysokość deskorolkarza z przebytą przez niego drogą po rampie możemy powiązać za pomocą prostej relacji trygonometrycznej:

$$\sin\,\alpha = \frac{H_{max}}{s} \quad \rightarrow \quad H_{max} = s\,\sin\,\alpha$$

Łącząc ze sobą obydwa wyrażenia, otrzymamy:

$$v_0 = \sqrt{2gH_{max}} = \sqrt{2gs\,\sin\,\alpha}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9,81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot\, \sin\,8^\circ} \approx 3,3\ \mathrm{m/s}$$

Przykład 2: diabelska pętla

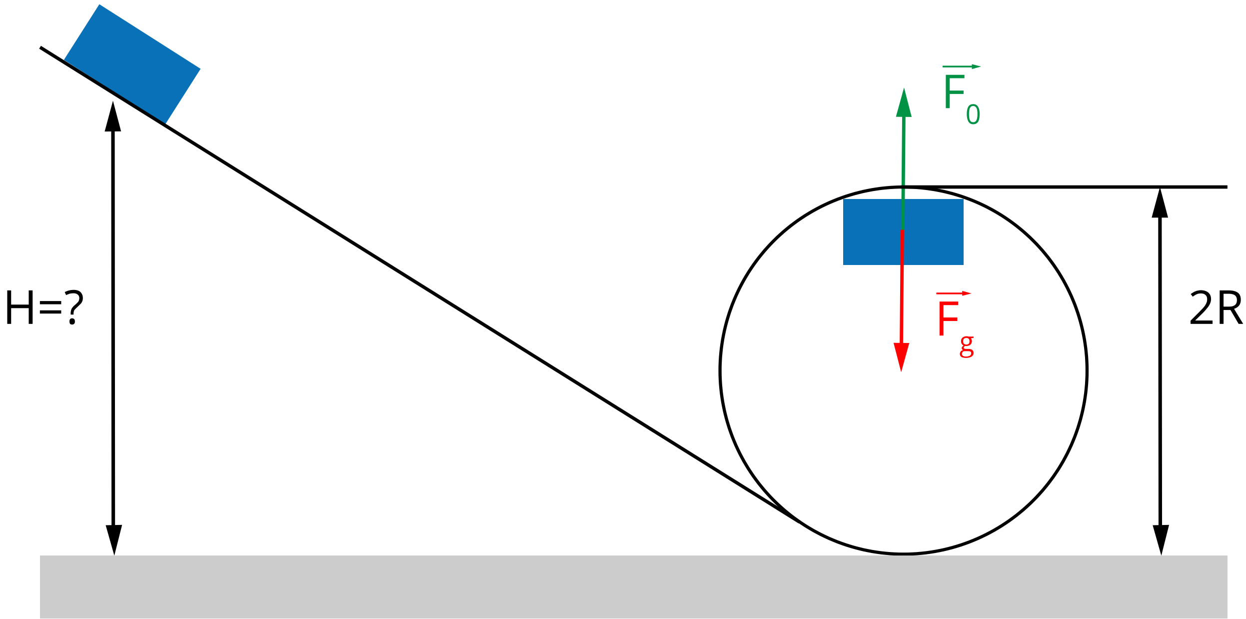
W parkach rozrywki często występują atrakcje zwane „diabelskimi pętlami”. Diabelska pętla to kolejka wagonikowa, której tor ułożony jest w kształcie zamkniętej pętli. Wagonik jadący po takim torze wykonuje pełne okrążenie pętli, co oznacza, że w pewnym momencie użytkownicy wagonika „wiszą głowami w dół”. Zakładając, że tarcie wagonika o szyny można zaniedbać, wyznacz, z jakiej wysokości powinien zjeżdżać początkowo spoczywający wagonik, aby bezpiecznie przejechać przez pętlę. Przyjmij, że pętla jest okręgiem o promieniu $R = 10$ m, a wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Rys. 2. Diabelska pętla.

Dane	**Szukane**
promień pętli: $R = 10$ m, przyspieszenie ziemskie: $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.	Wysokość, z jakiej musi zjechać wagonik, by bezpiecznie przebyć pętlę: H = ?

Analiza zadania

Na potrzeby naszego zadania, diabelską pętlę możemy przedstawić w następujący, uproszczony sposób:



Rys. 3. Uproszczony schemat diabelskiej pętli

Przyjmując, że na powierzchni Ziemi energia potencjalna ciała jest równa zeru, możemy stwierdzić, że na górze toru wagonik posiada tylko energię potencjalną grawitacji, związaną z wysokością H. Z kolei, w najwyższym punkcie pętli wagonik posiada energię kinetyczną oraz energię potencjalną grawitacji, związaną z wysokością $2R$.

Rozważmy teraz zagadnienie ruchu wagonika w nieinercjalnym układzie odniesienia z nim związanym. Jeśli wagonik ma utrzymać się na pętli, to siła odśrodkowa $\overrightarrow{F_o}$ skierowana „na zewnątrz toru” musi równoważyć siłę ciężkości $\overrightarrow{F_g}$ skierowaną „do toru”. Wartość siły odśrodkowej dana jest wzorem $F_o = \frac{mv^2}{R}$. Jeśli zatem wyznaczymy prędkość w najwyższym punkcie toru, będziemy mogli określić wartość siły odśrodkowej.

Rozwiązanie:

Zgodnie z zasadą zachowania energii, energia potencjalna wagonika na szczycie toru musi być równa energii mechanicznej w najwyższym punkcie pętli:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + 2mgR.$$

Dzięki temu możemy wyznaczyć prędkość ciała w najwyższym punkcie pętli, w zależności od początkowej wysokości H:

$$v^2 = 2g\big(H - 2R\big).$$

Zapiszmy teraz warunek utrzymania wagonika w torze:

$$F_o = F_g \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = mg,$$

$$v^2 = gR.$$

Podstawmy do tego warunku wyznaczony wzór na prędkość:

$$2g\big(H - 2R\big) = gR \quad \rightarrow \quad H = \tfrac{5}{2}R,$$

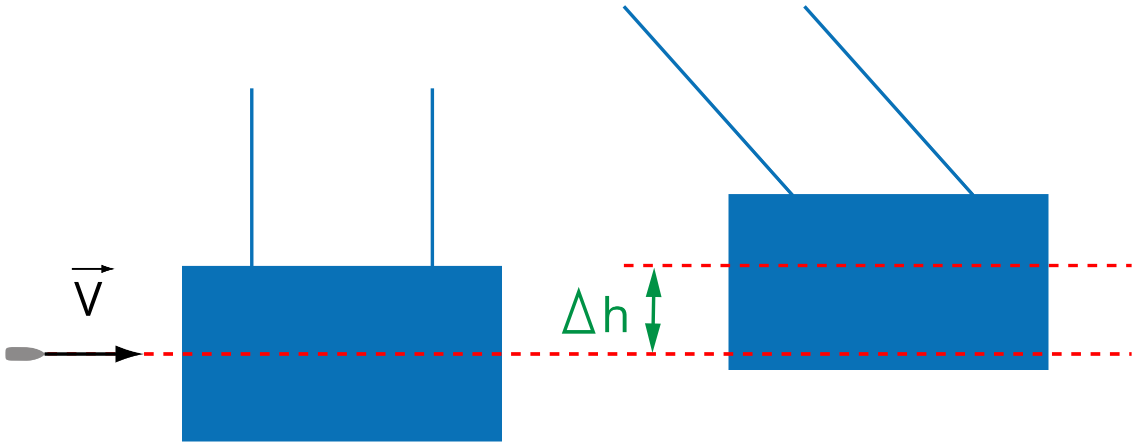
$$H = \tfrac{5}{2} \cdot 10 \text{ m} = 25 \text{ m}.$$

Komentarz:

Zwróćmy uwagę, że zadanie to rozwiązaliśmy bez udziału tarcia i oporu powietrza. W rzeczywistości, w tak zaprojektowanej pętli wagonik nie byłby w stanie dotrzeć do najwyższego punktu pętli ani utrzymać się na torze!

Przykład 3: wahadło balistyczne

Wahadło balistyczne jest urządzeniem służącym do badania prędkości pocisków. Jego zasadę działania przedstawiono na Rys. 4. Poruszający się z prędkością $\overrightarrow{v}$ pocisk o masie m wbija się w blok wahadła o masie M i zatrzymuje się w nim. Po uderzeniu, wahadło odchyla się na wysokość Δh. Zakładając, że 20% początkowej energii kinetycznej pocisku zostaje przekształcone w ciepło, wyznacz wartość prędkości pocisku, jeśli m = 5 g, M = 3 kg, Δh = 4 cm. Przyjmij wartość g = 9,81 m/s^2.



Rys. 4. Wahadło balistyczne

Dane	**Szukane**
masa pocisku: m = 5 g = 0,005 kg, masa wahadła: M = 3 kg, zmiana wysokości wahadła Δh = 4 cm = 0,04 m, 20% początkowej energii kinetycznej pocisku $E_{k(pocisk)}$ ulega przemianie w ciepło Q, przyspieszenie ziemskie: g = 9,81 m/s^2.	prędkość początkowa pocisku: v = ?

Analiza zadania

W układzie pocisk-wahadło przed zderzeniem całkowita energia mechaniczna jest równa energii kinetycznej pocisku $E_{k(pocisk)}$. Po uderzeniu wahadło wychyla się, co oznacza, że środek masy układu podnosi się do góry i rośnie jego energia potencjalna $E_{p(układ)}$ Dodatkowo, część energii kinetycznej zostaje przekształcona w ciepło Q, na skutek działania sił tarcia.

Rozwiązanie:

Zasada zachowania energii mechanicznej przyjmie następującą postać:

$$E_{k(pocisk)} = E_{p(układ)} + Q,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \Big(M + m\Big) g \Delta h + Q.$$

Wiemy dodatkowo, że $Q = 0,2 E_{k(pocisk)}$, co pozwala nam zapisać:

$$\frac{mv^2}{2} = \Big(M + m\Big) g \Delta h + 0,2 \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{(M+m) g \Delta h}{0{,}4 \ \mathrm{m}}}$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{kg}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{(3 \ \mathrm{kg} + 0{,}005 \ \mathrm{kg}) \cdot 9{,}81 \ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}04 \ \mathrm{m}}{0{,}4 \cdot 0{,}005 \ \mathrm{kg}}} \approx 589,6 \ \mathrm{m/s}.$$

Przykład 4: transmisyjny mikroskop elektronowy

Nowoczesne mikroskopy, zwane transmisyjnymi mikroskopami elektronowymi, wykorzystują wiązkę elektronów do obrazowania wnętrza badanej próbki. Dzięki takim mikroskopom możliwe jest wykonanie zdjęcia pojedynczym atomom! Wiązka elektronów przed zderzeniem z próbką musi zostać odpowiednio przyspieszona – odbywa się to za pomocą pola elektrycznego. Przyrost energii kinetycznej elektronu w polu elektrycznym można wyrazić za pomocą wzoru:

$$\Delta E_k = eU,$$

gdzie $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C jest ładunkiem elektronu, a U – napięciem przyspieszającym elektrony. Wiedząc, że elektrony są emitowane ze źródła z prędkością $v_0 = 10^4$ m/s, oblicz, jaką prędkość uzyskają po przejściu przez przyspieszające pole elektryczne wytworzone za pomocą napięcia $U = 40$ kV. Zaniedbaj efekty relatywistyczne. Ile razy ta prędkość jest większa od początkowej prędkości elektronu? Masa elektronu wynosi $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Rys. 5. Transmisyjny mikroskop elektronowy.

Dane	Szukane
prędkość początkowa elektronu: v_0 = 10^4 m/s, napięcie pracy mikroskopu: U = 40 kV, masa elektronu: m = 9,1· 10^{-31} kg, ładunek elektronu: e = 1,6 · 10^{-19} C.	prędkość elektronu po przyspieszeniu: v_k = ?

Analiza zadania

Elektrony opuszczające źródło posiadają pewną początkową energię kinetyczną E_{k0}. Pod wpływem pracy pola elektrycznego (wynoszącej $W = eU$), wartość tej energii silnie wzrasta do wartości E_{kk}.

Rozwiązanie:

Zasadę zachowania energii w tym przypadku możemy zapisać jako:

$$E_{k0} + W = E_{kk},$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + eU = \frac{mv_k^2}{2}.$$

Na tej podstawie możemy określić końcową prędkość elektronu:

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}$$

$$\left[v_k\right] = \sqrt{\frac{\mathrm{C \cdot V}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \mathrm{m/s}.$$

$$v_k = \sqrt{\left(10^4\ \mathrm{m/s^2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 4 \cdot 10^4\ \mathrm{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} \approx 1,19 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s},$$

Prędkość ta jest 11 900 razy większa od początkowej prędkości elektronu!

Komentarz

Uzyskana prędkość stanowi ok. 40% prędkości światła w próżni. Oznacza to, że w przypadku tego zadania powinniśmy wziąć pod uwagę poprawki relatywistyczne. Dokładnie wyznaczona prędkość elektronu będzie z tego powodu mniejsza i będzie wynosiła ok. $5 \cdot 10^7$ m/s, co jest wartością 5000 razy większą od początkowej wartości prędkości elektronu.

Przykład 5: ruch z tarciem

Łyżwiarz sunie po lodzie nie odpychając się od niego. Wiedząc, że prędkość początkowa łyżwiarza wynosiła v_0 = 6 m/s, a współczynnik tarcia łyżew o lód wynosi μ = 0,05, wyznacz, po przebyciu jakiej drogi całkowita energia mechaniczna łyżwiarza zmaleje o połowę.

Dane	Szukane

prędkość początkowa łyżwiarza: v_0 = 6 m/s, współczynnik tarcia łyżew o lód: μ = 0,05, energia kinetyczna łyżwiarza maleje o połowę, $E_{kk} = 0,5E_{k0}$ przyspieszenie ziemskie: g = 9,81 m/s^2.	droga przebyta przez łyżwiarza: s = ?

Analiza zadania

Sunący łyżwiarz posiada pewną energię kinetyczną E_{k0}. Praca działającej na niego siły tarcia powoduje stopniowe przekształcanie tej energii w ciepło i dźwięk.

Rozwiązanie:

Zasadę zachowania energii w tym przypadku możemy zapisać jako:

$$E_{k0} = E_{kk} + W_T,$$

gdzie W_T jest pracą siły tarcia. Ponieważ wektor siły tarcia jest równoległy do wektora przemieszczenia, wartość siły tarcia dana jest wzorem:

$$W_T = Ts = \mu mgs.$$

Wiemy dodatkowo, że energia kinetyczna łyżwiarza ma zmaleć o połowę, zatem $E_{kk} = 0,5E_{k0}$. Łącząc ze sobą wszystkie wyrażenia otrzymamy:

$$E_{k0} = 0,5E_{k0} + \mu mgs,$$

$$s = \frac{0{,}5E_{k0}}{\mu mg} = \frac{0{,}5\frac{mv_0^2}{2}}{\mu mg} = \frac{0{,}5\frac{v_0^2}{2}}{\mu g} = \frac{v_0^2}{4\mu g},$$

$$[s] = \frac{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m}$$

$$s = \frac{(6\ \mathrm{m/s})^2}{4\cdot 0{,}05\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} \approx 18,3\ \mathrm{m}.$$

Słowniczek

Siła odśrodkowa

(ang. *centripetal force*) – pozorna siła bezwładności występująca podczas opisu ruchu ciał w układach nieinercjalnych (poruszających się z przyspieszeniem). Siła odśrodkowa występuje podczas ruchu ciała po okręgu. Jeśli masa ciała wynosi m, jego prędkość liniowa wynosi $\overrightarrow{v}$, a ciało porusza się po okręgu o promieniu R, to wartość siły odśrodkowej wynosi $F_o = \frac{mv^2}{R}$. Siła ta jest skierowana „od środka” okręgu. Przykładem siły odśrodkowej jest siła, którą odczuwają pasażerowie znajdujący się w poruszającym się po łuku samochodzie, która próbuje wypchnąć ich „na zewnątrz” łuku.

Efekty relatywistyczne

(ang. *relativistic effects*) – efekty przewidziane przez szczególną teorię względności. Występują dla ciał poruszających się z dowolną prędkością, jednak mierzalne i istotne stają się dla ciał o prędkościach zbliżonych do prędkości światła. Należą do nich: skrócenie relatywistyczne (skrócenie ciała w kierunku ruchu), dylatacja czasu (spowolnienie czasu w układzie związanym z poruszającym się ciałem) oraz wzrost masy (masa ciała poruszającego się z dużymi prędkościami jest większa niż tzw. masa spoczynkowa, która jest wielkością charakteryzującą ciała znajdujące się w spoczynku).

Siły zewnętrzne

(ang. *external forces*) – siły pochodzące od oddziaływań niewystępujących w danym układzie. Przykładowo, jeśli w układzie człowiek-Ziemia człowiek podskoczy do góry, to oprócz siły grawitacji (wewnętrznej) będzie działać na niego siła oporu powietrza (zewnętrzna).

Film samouczek

Jak zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej w obliczeniach?

Film prezentuje rozwiązanie prostego zagadnienia, w którym wykorzystywana jest zasada zachowania energii mechanicznej. Rozwiązywane zadanie dotyczy przemian energii w wahadle zegarowym.

Wystąpił błąd

Zapoznaj się z treścią samouczka.

Polecenie 1

Wyznacz, na jakiej wysokości energia potencjalna wahadła będzie równa jego energii kinetycznej. Odpowiedź podaj w cm.

Polecenie 2

Określ, jak zmieniłyby się wyniki tego zadania, gdyby uwzględnić w opisie siłę oporu powietrza.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Konspekt (scenariusz) lekcji

Imię i nazwisko autora:	Przemysław Michalski
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Zasada zachowania energii w zadaniach**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. **Zakres podstawowy** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 14) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych. II. Mechanika. Uczeń: 10) posługuje się pojęciami pracy mechanicznej, mocy, energii kinetycznej, energii potencjalnej wraz z ich jednostkami; stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych. II. Mechanika. Uczeń: 20) posługuje się pojęciami pracy mechanicznej, mocy, energii kinetycznej, energii potencjalnej wraz z ich jednostkami; stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. objaśnia zasadę zachowania energii mechanicznej oraz wzory pozwalające wyznaczyć poszczególne składniki tej energii, 2. wykorzystuje zasadę zachowania energii mechanicznej w prostych sytuacjach, tj. swobodny spadek lub ruch z tarciem, 3. stosuje ZZEM w obecności zarówno sił wewnętrznych jak i zewnętrznych.
Strategie nauczania:	flipped classroom
Metody nauczania:	rozwiązywanie zadań
Formy zajęć:	- praca indywidualna, - praca w zespole klasowym.
Środki dydaktyczne:	- tablica, - projektor.
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Na poprzedniej lekcji nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z częścią „Warto przeczytać” e-materiału oraz rozwiązanie zadań 1–4 z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel sprawdza poprawność rozwiązanych zadań.	
Faza realizacyjna:	
Podczas lekcji nauczyciel, wraz z uczniami, rozwiązują zadania 5–8 z części „Sprawdź się” e-materiału. Przy każdym zadaniu, nauczyciel prosi uczniów o jego analizę, tj. wskazanie zachodzących przemian energii, wskazanie sił wewnętrznych/zewnętrznych wykonujących pracę oraz rozwiązanie zagadnienia.	
Faza podsumowująca:	
Podsumowanie zachodzi po rozwiązaniu każdego zadania i opiera się na sprawdzeniu wiedzy uczniów dotyczących przemian energii w danym zagadnieniu. Nauczyciel przeznacza też czas na dodatkowe pytania i wątpliwości. Poprzez analizę wypowiedzi uczniów nauczyciel określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele.	
Praca domowa:	

Nauczyciel prosi uczniów, by wskazali w swoim otoczeniu kilka zjawisk, w opisie których można skorzystać z zasady zachowania energii. Jeśli jest to możliwe – uczniowie powinni obliczyć wartości energii w danym zagadnieniu.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Multimedium można wykorzystać podczas lekcji (jako dodatkowe zadanie), zlecić uczniom do samodzielnego opracowania w domu, lub wykorzystać je podczas realizacji innych tematów związanych z wahadłem matematycznym.