



Graniastosłup prawidłowy sześciokątny

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Graniastosłup prawidłowy sześciokątny

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Dlaczego graniastosłup prawidłowy sześciokątny jest ciekawą bryłą?

Matematyka to nauka opisująca otaczającą przyrodę. Badając zagadnienia geometryczne, rozwiązania znajdujemy w naturze. Przyjrzyjmy się Grobli Olbrzyma w Irlandii Północnej oraz plastron miodu. W obu twórcach natury odnajdujemy kształt podstawy omawianego graniastosłupa. Natura postawiła na sześciokąt foremny, który ma tę własność, że za jego pomocą można szczelnie (bez luk) pokryć największą powierzchnię najmniejszym obwodem „kafelków”.

Dzięki tej własności pszczoły zużywając najmniej wosku otrzymują komory na miód i potomstwo o możliwie największej objętości.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Bazaltowe słupy Grobli Olbrzyma powstały z zastygającej lawy. Lawa stygła powoli, kurcząc się równomiernie we wszystkich kierunkach. Linie pęknięcia, zgodnie z zasadami mechaniki, przebiegają tak, by praca potrzebna do rozerwania warstwy lawy była jak najmniejsza (więc obwód powstałej figury ma być najmniejszy) i powstałych pęknięć jest najmniej, gdy ograniczają największą powierzchnię. W przyrodzie obserwujemy mechanizmy dążące do minimalizacji kosztów przy jednoczesnej maksymalizacji korzyści.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny jest bryłą wykorzystywaną w przyrodzie, dlatego warto znać jego budowę i własności. Wskażemy także ściany, krawędzie i przekątne w tej bryle. Pokażemy jak wykonać rysunek pomocniczy wykorzystywany w zadaniach ze stereometrii.

Twoje cele

- Poznasz budowę i własności graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.
- Odwzorujesz bryły na płaszczyźnie według zasad rzutu równoległego.

Przeczytaj

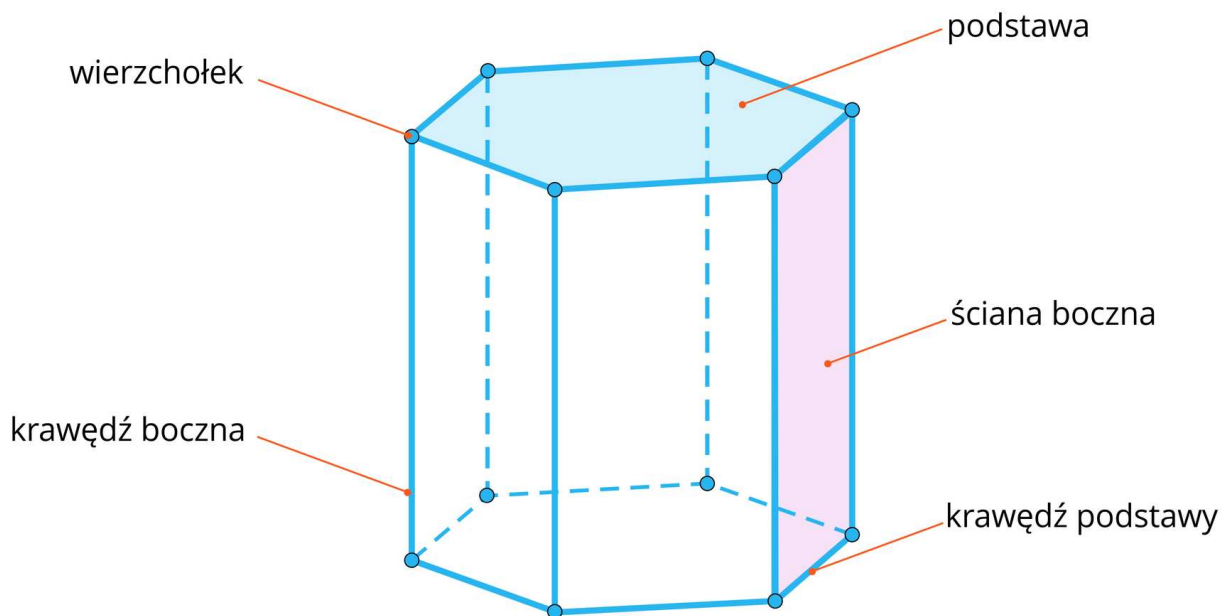
Znasz już przykłady wielościanów, np. sześcian, prostopadłościan, itp. Teraz przypomnisz i utrwalisz wiadomości o graniastosłupach prawidłowych oraz rozwinięsz zdobyte wcześniej umiejętności i zastosujesz je do sporządzania rysunków pomocniczych.

Pojęcia wstępne

Graniastosłupem nazywamy wielościan, który ma dwie przystające i równoległe ściany zwane podstawami graniastosłupa, a pozostałe ściany (ściany boczne) są równoległobokami. Graniastosłupy, których ściany boczne są prostokątami, nazywamy graniastosłupami prostymi, pozostałe są **graniastosłupami pochyłymi**.

Graniastosłup prawidłowy to **graniastosłup prosty**, którego podstawy są wielokątami foremnymi (czyli wielokątami o wszystkich bokach równej długości i wszystkich kątach równej miary).

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny w podstawach ma sześciokąty foremne, a ściany boczne są przystającymi prostokątami. Długość krawędzi bocznej jest **wysokością graniastosłupa**.



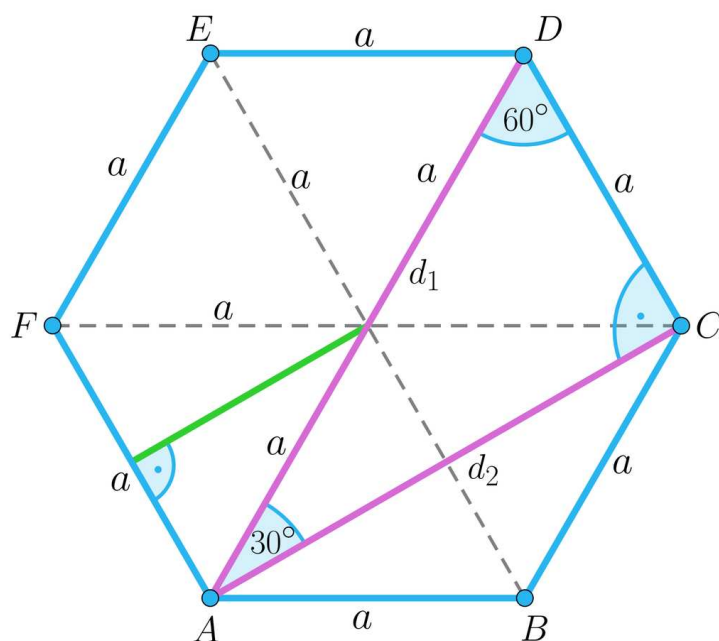
Poćwiczysz znajomość budowy tego graniastosłupa poprzez aplet w GeoGebra. Przyjrzyjmy się dokładnie modelowi graniastosłupa. Możesz wykonać obroty modelu.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DTjdn6OkI>

Zastanowimy się jeszcze nad figurą, która jest podstawą graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Sześciokąt foremny – budowa i własności

Sześciokąt foremny to figura zbudowana z 6 trójkątów równobocznych.



Łatwo wskazać jego pole:

$$P_f = 6 \cdot P_{\Delta} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Ma on dwa rodzaje przekątnych:

d_1 - dłuższą przekątną, równą $d_1 = 2 \cdot a$

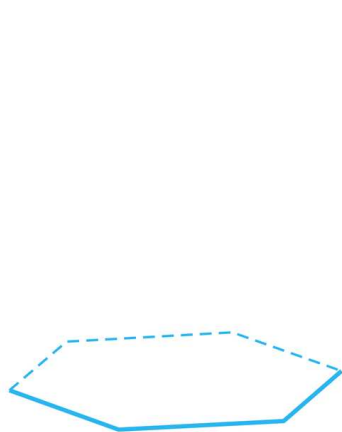
d_2 - krótszą przekątną, równą $d_2 = 2 \cdot h_{\Delta} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Ciekawe w sześciokącie foremnym jest to, że zaznaczając przekątne można wskazać tak zwany trójkąt szczególny. Trójkąt ACD ma kąty 30° , 60° i 90° , a jego boki odpowiednio są równe a , $a\sqrt{3}$ i $2a$.

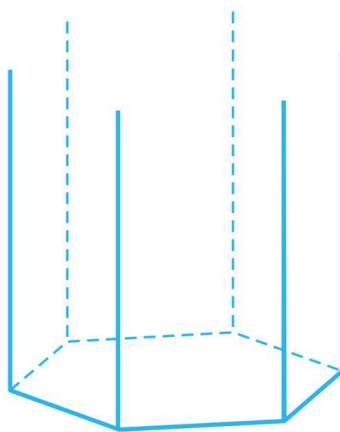
Rysowanie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego

Zastanowimy się jeszcze jak sprawnie i łatwo narysować rysunek pomocniczy do zadania dotyczącego graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

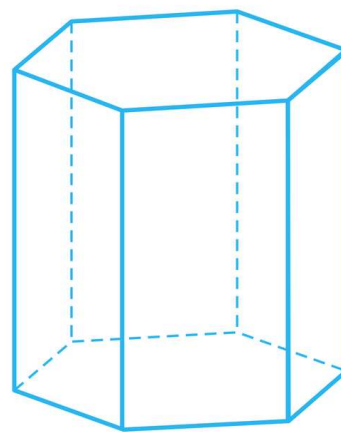
Aby narysować graniastosłup, wykorzystujemy własności **rzutu** równoległego na płaszczyznę. Najczęściej rysunek wykonujemy tak, że jedna ze ścian bocznych jest równoległa do rzutni. Krawędzie boczne są odcinkami równoległymi o równych długościach, więc na rysunku też są równoległe i mają równą długość, tak samo zachowują się odpowiednie pary krawędzi podstaw.



Rysowanie wygodnie zacząć od dolnej podstawy graniastosłupa. Linie przerywane stosujemy, gdy krawędź jest niewidoczna.



Następnie dorysowujemy krawędzie boczne.



Ostatni etap to dorysowanie krawędzi górnej podstawy.

Przykład 1

Uzupełnijmy tabelkę z informacjami opisującymi graniastosłup sześciokątny.

Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi podstawy	Liczba krawędzi bocznych	Liczba wszystkich krawędzi	Ilość ścian	Ilość ścian bocznych
12	12	6	18	8	6

Przykład 2

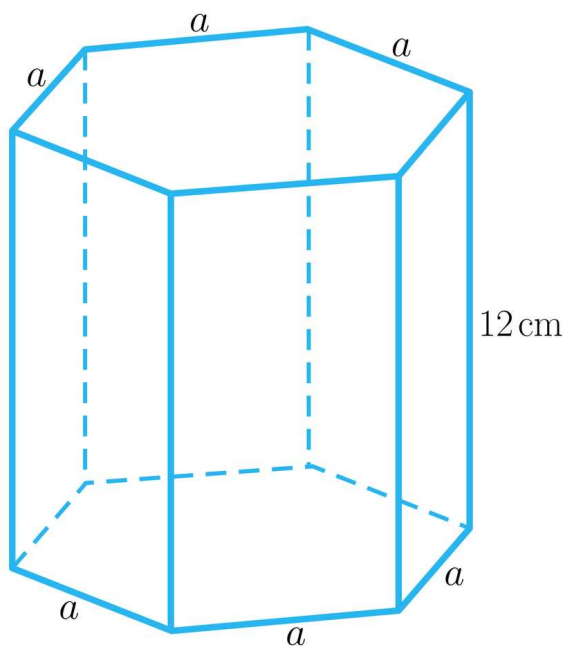
Wyznamy sumę długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości a , i wysokości h .

Wiemy już, że krawędzie podstawy są jednakowej długości i jest ich 12, a krawędzie boczne, są równe wysokości tego graniastosłupa i jest ich 6, stąd mamy wzór:

$$S_k = 12 \cdot a + 6 \cdot h$$

Przykład 3

Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest sześciokąt o polu $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm. Oblicz, ile centymetrów drutu potrzeba na wykonanie szkieletowego modelu tego graniastosłupa.



Graniastosłup jest prawidłowy sześciokątny, zatem jego podstawą jest sześciokąt foremny o znanym polu $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Obliczamy długość a krawędzi podstawy – korzystamy ze wzoru na pole sześciokąta foremnego:

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$150\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$300\sqrt{3} = 3a^2\sqrt{3} \quad | : 3$$

$$100\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$

$$100 = a^2$$

$$a = \sqrt{100}$$

$$a = 10$$

Wszystkie krawędzie boczne graniastoslupa są równe i mają długość 12 cm.

Możemy już obliczyć, ile cm drutu potrzebujemy:

$$S_k = 12 \cdot a + 6 \cdot h = 12 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 120 + 72 = 192 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Na wykonanie modelu graniastoslupa potrzeba 192 cm drutu.

Przykład 4

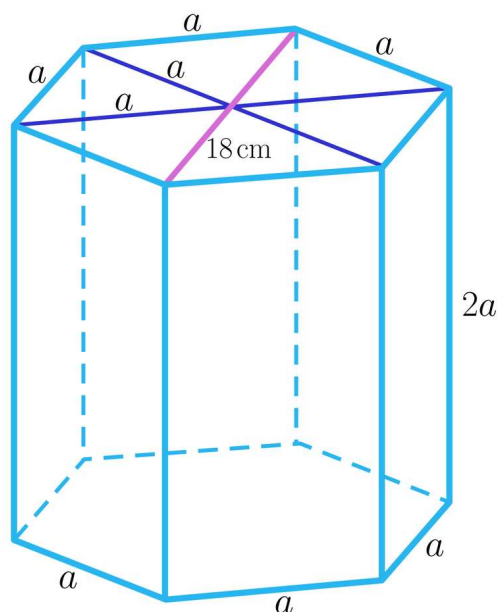
Podstawą graniastoslupa prawidłowego jest sześciokąt o przekątnej długości 18 cm. Wysokość graniastoslupa jest dwa razy większa od jego krawędzi podstawy. Oblicz sumę wszystkich krawędzi tego graniastoslupa, (rozważ 2 przypadki).

W zadaniu nie mamy doprecyzowane, o którą przekątną chodzi, a wiemy, że przekątne sześciokąta foremnego mają przekątne o dwóch różnych długościach. Dlatego musimy rozważyć 2 przypadki:

- a. dłuższa przekątna ma 18 cm,
- b. krótsza przekątna ma 18 cm.

Rozwiązanie

- a. Graniastoslup jest prawidłowy sześciokątny, zatem jego podstawą jest sześciokąt foremny o znanej dłuższej przekątnej $d_1 = 18$ cm. Obliczamy długość a krawędzi podstawy – korzystamy ze wzoru $d_1 = 2 \cdot a$



b. $d_1 = 18$

$$2a = 18 \quad | : 2$$

$$a = 9 \text{ cm}$$

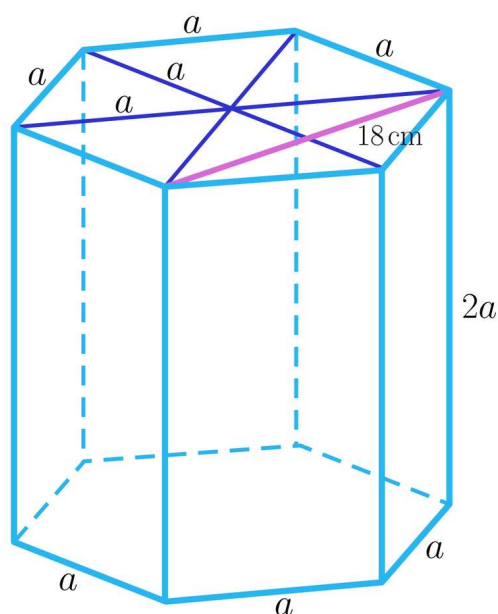
Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są równe i mają długość dwa razy większą od jego krawędzi podstawy, czyli $h = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$.

Możemy już obliczyć sumę wszystkich krawędzi tego graniastosłupa:

$$S_k = 12 \cdot a + 6 \cdot h = 12 \cdot 9 + 6 \cdot 18 = 108 + 108 = 216 \text{ cm}.$$

Odpowiedź: Suma wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi 216 cm.

- c. Graniastosłup jest prawidłowy sześciokątny, zatem jego podstawą jest sześciokąt foremny o znanej krótszej przekątnej $d_2 = 18 \text{ cm}$.



Obliczamy długość a krawędzi podstawy – korzystamy ze wzoru $d_2 = a\sqrt{3}$.

$$d_2 = 18 \quad a\sqrt{3} = 18 \quad | : \sqrt{3}$$

$$3a = 18\sqrt{3} \quad | : 3$$

$$a = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są równe i mają długość dwa razy większą od jego krawędzi podstawy, czyli $h = 2 \cdot 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$.

Możemy już obliczyć sumę wszystkich krawędzi tego graniastosłupa:

$$S_k = 12 \cdot a + 6 \cdot h = 12 \cdot 6\sqrt{3} + 6 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3} + 72\sqrt{3} = 144\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Odpowiedź: Suma wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi $144\sqrt{3} \text{ cm}$.

Słownik

graniastosłup pochyły

graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw

graniastosłup prosty

figura przestrzenna, której podstawy są przystającymi wielokątami, a wszystkie ściany boczne są prostokątami

graniastosłup prawidłowy

graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi. W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są figurami przystającymi (są po prostu identycznymi prostokątami).

wysokość graniastosłupa

odcinek zawarty w prostej prostopadłej do jego podstaw, którego końcami są punkty wspólne tej prostej z płaszczyznami zawierającymi podstawy graniastosłupa

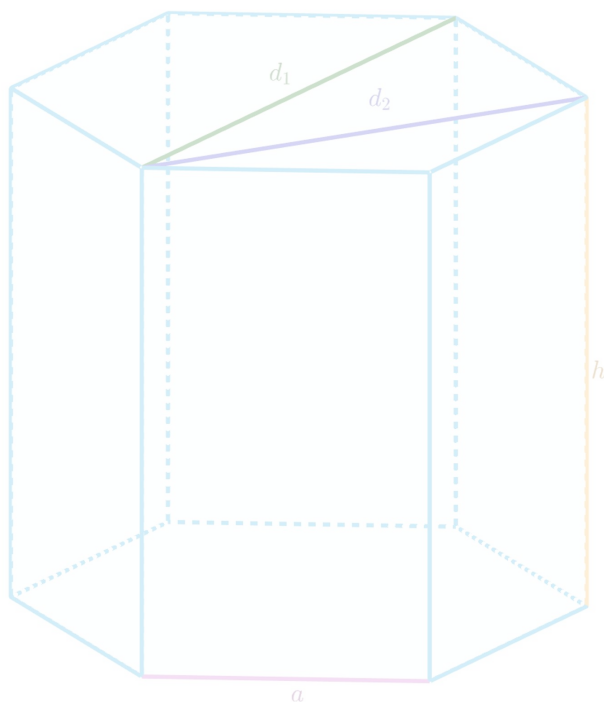
rzutowanie

przekształcenie przestrzeni trójwymiarowej na przestrzeń dwuwymiarową. Rzutowanie polega na poprowadzeniu prostej przez dany punkt obiektu i znalezieniu punktu wspólnego tej prostej z rzutnią. Wyznaczony punkt nazywany jest rzutem a prosta promieniem rzutującym

Aplet

Polecenie 1

Przeanalizujmy jak zmienia się suma krawędzi i długości przekątnych podstawy graniastopuła prawidłowego sześciokątnego. Przesuwaj suwakami i obserwuj. Aplet szybko wylicza szukane wielkości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCSEuBR4c>

Polecenie 2

Wykorzystaj aplet. Ustaw wartości współczynników a oraz h , aby wyznaczyć sumę krawędzi i długości przekątnych graniastopu prawidłowego sześciokątnego. Uzupełnij tabelkę.

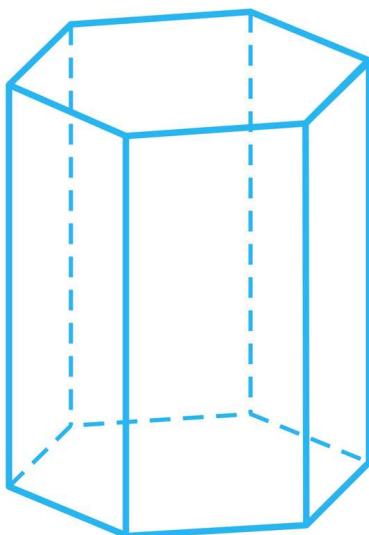
$7, 10, 13, 8, 11, 30, 48\sqrt{3}, 9\sqrt{3}, 6\sqrt{6}, 288\sqrt{3} + 132$

a	h	d_1
d_2	S_k	
7	10	
	13	30
	8	
$9\sqrt{3}$		
	11	
$6\sqrt{6}$		
		$48\sqrt{3}$
	$288\sqrt{3} + 132$	

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile poszczególnych elementów ma graniastosłup sześciokątny? Wstaw odpowiedzi w odpowiednie miejsca.

Sześć

krawędzie podstaw

ściany

krawędzie boczne

krawędzie

wierzchołki

ściany boczne

Osiem

Dwanaście

Osiemnaście

Ćwiczenie 2



Ile wynosi suma długości krawędzi graniastopuła prawidłowego sześciokątnego dla podanych wartości krawędzi podstawy a i wysokości h ? Wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ $S_k = 48\sqrt{5} + 60\sqrt{3}$ cm, gdy $a = \sqrt{20}$ cm i $h = \sqrt{300}$ cm

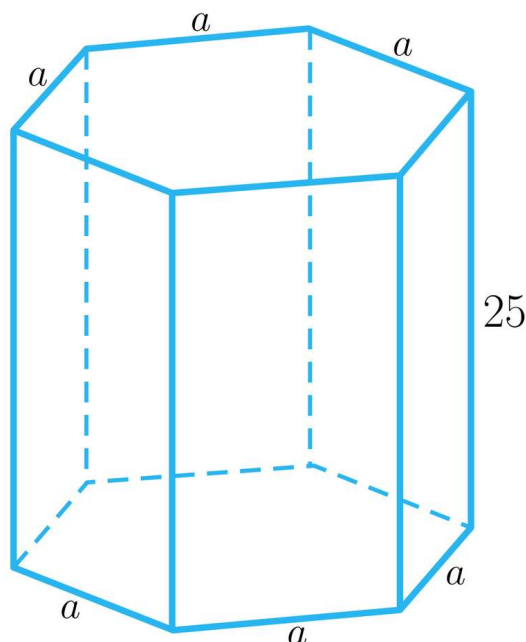
☐ $S_k = 132$ cm, gdy $a = 6$ cm i $h = 10$ cm

☐ $S_k = 252\sqrt{3}$ cm, gdy $a = 15\sqrt{3}$ cm i $h = 12\sqrt{3}$ cm

Ćwiczenie 3



Podstawą graniastostupa prawidłowego jest sześciokąt o polu $450\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Wysokość graniastostupa jest równa 25 cm. Oblicz, ile centymetrów drutu potrzeba na wykonanie szkieletowego modelu tego graniastostupa. Przeciagnoj odpowiedzi w odpowiednie miejsca.



Graniastostup jest prawidłowy sześciokątny, zatem jego podstawą jest sześciokąt foremny o znanym polu . Długość a krawędzi podstawy wynosi . Wszystkie krawędzie boczne graniastostupa są równe i mają długość . Na wykonanie modelu graniastostupa potrzeba drutu.

Ćwiczenie 4



Podstawą graniastostupa prawidłowego jest sześciokąt o krótszej przekątnej długości $2\sqrt{15} \text{ cm}$. Wysokość graniastostupa jest $\sqrt{5}$ razy większa od jego krawędzi podstawy. Oblicz sumę wszystkich krawędzi tego graniastostupa.

Ćwiczenie 5



Podstawą graniastopłu prawidłowego jest sześciokąt. Wysokość graniastopłu i krawędź podstawy są w stosunku 5 : 2. Suma wszystkich krawędzi tego graniastopłu wynosi 216 cm. Wyznacz wymiary tego graniastopłu i wpisz odpowiednie liczby całkowite w puste miejsca.

Odpowiedź: Krawędź podstawy tego graniastopłu wynosi cm, a jego wysokość cm.

Ćwiczenie 6



Jaka jest długość krótszej przekątnej graniastopłu prawidłowego sześciokątnego, jeżeli krawędź podstawy, dłuższa przekątna podstawy i wysokość tego graniastopłu w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny, a suma jego wszystkich krawędzi wynosi 252 cm.

Ćwiczenie 7



W graniastopłach prawidłowych o podstawie sześciokąta krawędź podstawy, krótsza przekątna i wysokość tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz, ile drutu potrzeba na wykonanie modelu tej bryły mając daną a - długość krawędzi podstawy.

Ćwiczenie 8



Wyznacz wzór opisujący sumę krawędzi graniastopłu prawidłowego sześciokątnego, wiedząc, że krótsza przekątna ma długość x , a wysokość tej bryły jest 3 razy większa od krawędzi podstawy.

Dla nauczyciela

Autor: Ketty Kołomyjska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Graniastosłup prawidłowy sześciokątny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje budowę i własności graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego w obliczeniach, np. w obliczaniu sumy jego krawędzi,
- stosuje technikę rzutu równoległego na płaszczyznę tworząc rysunki pomocnicze.

Strategie nauczania:

- Konstruktywizm
- Konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- stoliki zadaniowe.

Formy zajęć:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa miała do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji**Faza wprowadzająca:**

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze wiadomości dotyczące graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.
2. Następnie rysują w zeszycie bryły na płaszczyźnie według zasad rzutu równoległego
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą stolików zadaniowych. Na stolikach znajdują się przykłady rozwiązanych zadań z sekcji Przeczytaj pokazujących wyznaczanie sumy krawędzi w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym.
2. Uczniowie w grupach rozwiązują zaproponowane ćwiczenia interaktywne i problemy z apletu.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, zwracają uwagę na zadania, które sprawiały problem. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości, dzieli się swoimi obserwacjami.
2. Grupy oceniają swoją pracę, wskazując swoje mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie ułożyć i rozwiązać dwa zadania analogiczne do zrobionych na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Rodzaje graniastosłupów](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą w parach lub indywidualnie rozwiązywać problemy z zaproponowanego apletu.