Obliczenia geometryczne z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Obliczenia geometryczne z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Źródło: Dung Tran, dostępny w internecie: https://pixabay.com/.

Twierdzenie cosinusów to twierdzenie określające związek między kątem i bokami w trójkącie. Jest ono wykorzystywane w szczególności do obliczania długości boków i miar kątów w trójkącie czy do określania rodzaju trójkąta. W życiu codziennym możemy je wykorzystać w pomiarach geodezyjnych (obliczenie współrzędnych punktu za pomocą wcięcia liniowego) albo w budownictwie (wyliczenie rzeczywistych długości krokwi przy danych kątach pochylenia połaci dachu i długościach rzutów krokwi).

W tym temacie e–podręcznika zapoznasz się z innymi zastosowaniami tego twierdzenia.

Twoje cele

- Poznasz typowe zastosowania twierdzenia cosinusów do obliczeń geometrycznych, w szczególności poznasz i udowodnisz wzór na długość dwusiecznej trójkąta
- Poznasz zastosowania twierdzenia cosinusów w dowodach geometrycznych.
- Poznasz twierdzenie Stewarta.

Przeczytaj

Często chcemy obliczyć długość jakiegoś odcinka w trójkącie. Jednym z takich odcinków jest środkowa trójkąta.

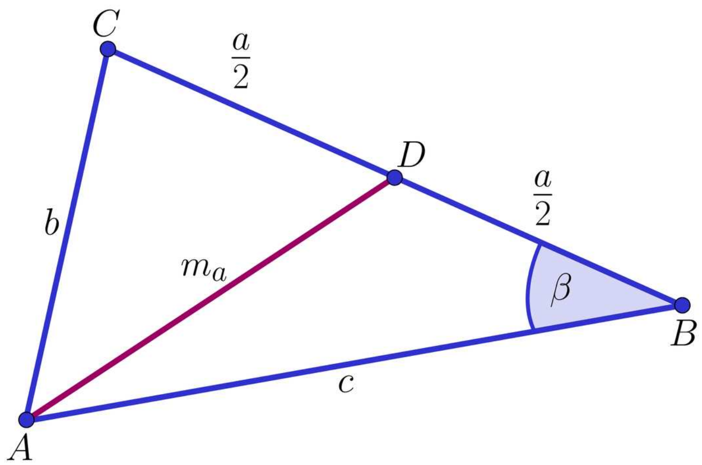
Przeanalizujmy sposób postępowania w rozwiązaniu tego zagadnienia.

Przykład 1

Wyprowadzimy wzór na długość środkowej AD trójkąta ABC o bokach długości $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

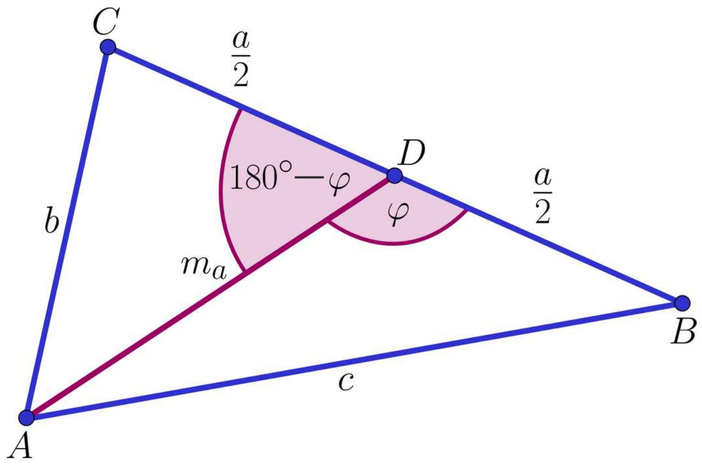
Rozwiązanie

- **I sposób:**
  Przyjmijmy standardowe oznaczenia trójkąta oraz oznaczmy długość środkowej AD symbolem m_a, jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów zastosowanego dla kąta β w trójkątach ABC i ABD otrzymujemy
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ oraz $m_a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}ac\cos\beta$.
Ponieważ długości boków trójkąta ABC mamy dane, więc otrzymany układ równań zawiera dwie niewiadome, m_a i $\cos\beta$. Wystarczy więc z jednego z tych równań wyznaczyć niewiadomą $\cos\beta$ i podstawić otrzymaną wielkość do drugiego równania. Otrzymamy wtedy równanie z niewiadomą m_a.
W naszym przypadku: $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, więc stąd i z drugiego równania otrzymujemy
$m_a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + c^2 - \frac{a^2+c^2-b^2}{2} = \frac{1}{4}a^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}b^2 =$
$= \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$,
skąd $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.
W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na długość środkowej trójkąta.

- **II sposób:**
  Przyjmijmy standardowe oznaczenia trójkąta, jak na rysunku.



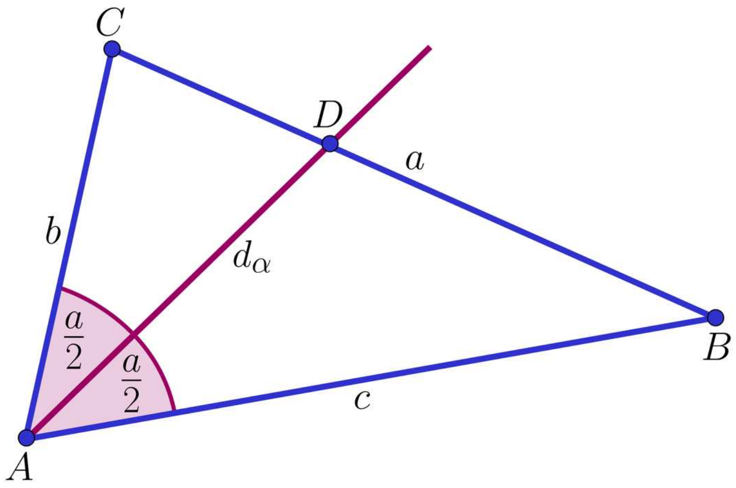
Podobnie, jak w I sposobie dwukrotnie wykorzystamy twierdzenie cosinusów, ale tym razem zastosujemy je w trójkątach ABD i ACD dla kątów φ i $180^\circ - \varphi$.
Otrzymujmy wtedy
$c^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + m_a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot m_a \cos\varphi$ oraz
$b^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + m_a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot m_a \cos(180^\circ - \varphi)$.
Ponieważ $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, więc otrzymane równości możemy zapisać w postaci
$c^2 = \frac{1}{4}a^2 + m_a^2 - am_a\cos\varphi$ oraz $b^2 = \frac{1}{4}a^2 + m_a^2 + am_a\cos\varphi$.
W ten sposób otrzymaliśmy, tak jak to było w I sposobie rozwiązania, układ dwóch równań z niewiadomymi m_a i $\cos\varphi$. Dodając te równania stronami, otrzymujemy $b^2 + c^2 = \frac{2}{4}a^2 + 2m_a^2$. Stąd $m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$, więc $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Przykład 2

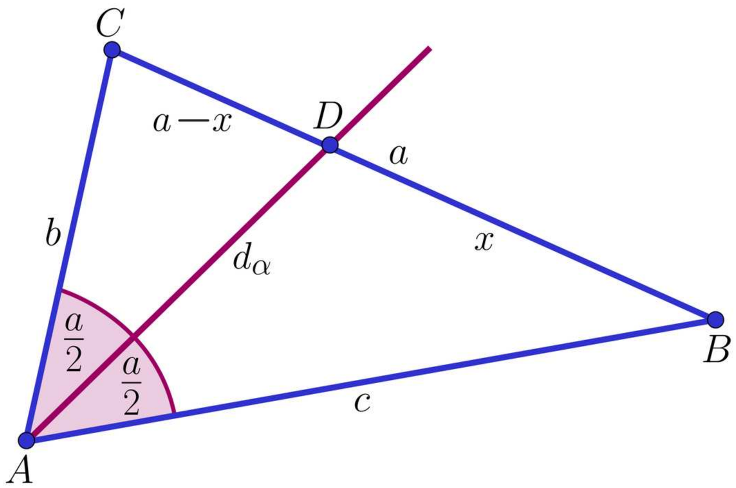
Wyprowadzimy wzór na długość dwusiecznej AD trójkąta ABC o bokach długości $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Rozwiązanie

Przypomnijmy na początek, że dwusieczną trójkąta nazywamy odcinek, którego jednym z końców jest wierzchołek trójkąta, a drugim punkt przecięcia dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku z przeciwległym bokiem. Oznaczmy $|AD| = d_\alpha$.



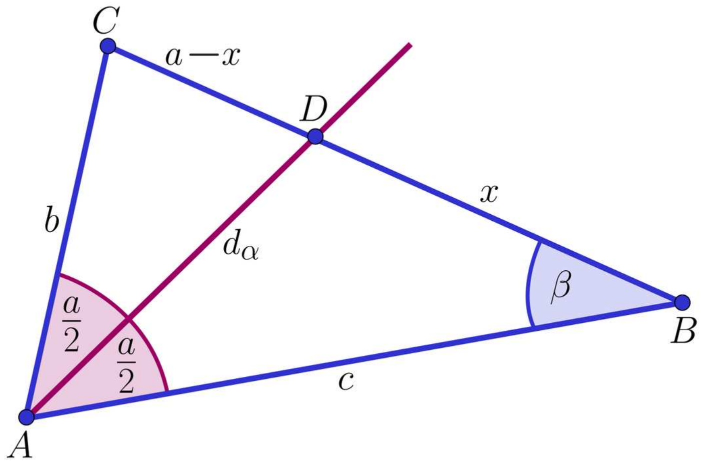
W pierwszym etapie rozwiązania wyznaczymy długości odcinków BD i CD w zależności od długości boków trójkąta. Niech $|BD| = x$. Wtedy $|CD| = a - x$.



Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta mamy $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AB|}$, czyli $\frac{a-x}{b} = \frac{x}{c}$. Stąd $bx = ac - cx$, więc $bx + cx = ac$. Zatem $(b + c)x = ac$, skąd $x = \frac{ac}{b+c}$, czyli $|BD| = \frac{ac}{b+c}$. Wobec tego $|CD| = a - x = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$.

Drugi etap dowodu przeprowadzimy dwoma sposobami, analogicznymi do sposobów omówionych w Przykładzie 1.

- **I sposób:**
  Zastosujmy twierdzenie cosinusów dla kąta β w trójkątach ABC i ABD.

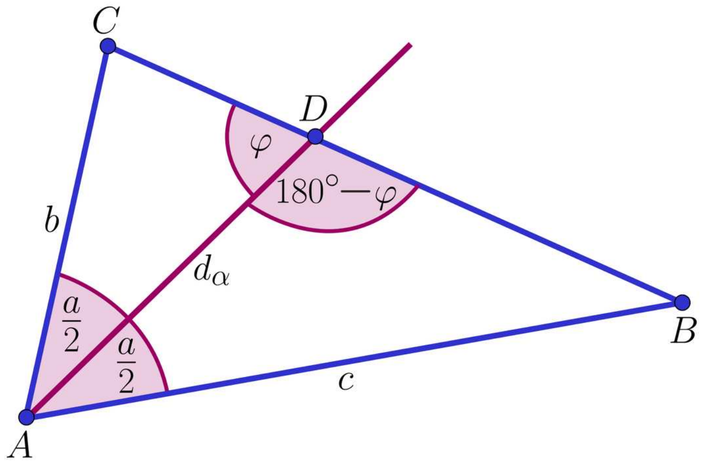


Otrzymujmy w ten sposób układ równań
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ oraz $d_\alpha^2 = x^2 + c^2 - 2\cdot xc\cos\beta$
z niewiadomymi d_α, x i $\cos\beta$. Z poprzedniej części dowodu mamy jednak $x = \frac{ac}{b+c}$, więc otrzymujemy układ równań
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ oraz $d_\alpha^2 = \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot c\cos\beta$
z dwiema niewiadomymi d_α i $\cos\beta$. Z pierwszego równania wyznaczamy
$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ (możemy też wyznaczyć $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$). Stąd i z drugiego równania dostajemy
$d_\alpha^2 = \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.
Pozostaje tylko doprowadzić ten wynik do prostszej postaci.

$$d_\alpha^2 = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} + c^2 - c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{b+c} =$$
$$= \frac{c}{(b+c)^2}\Big(a^2c + c(b+c)^2 - (b+c)\big(a^2+c^2-b^2\big)\Big) =$$
$$= \frac{c}{(b+c)^2}\Big(a^2c + (b+c)\big(c(b+c) - \big(a^2+c^2-b^2\big)\big)\Big) =$$
$$= \frac{c}{(b+c)^2}\big(a^2c + (b+c)\big(bc - a^2 + b^2\big)\big) =$$
$$= \frac{c}{(b+c)^2}\big(a^2c + b^2c - a^2b + b^3 + bc^2 - a^2c + b^2c\big) =$$
$$= \frac{c}{(b+c)^2}\big(b^2c - a^2b + b^3 + bc^2 + b^2c\big) = \frac{bc}{(b+c)^2}\big(b^2 + 2bc + c^2 - a^2\big) =$$
$$= \frac{bc}{(b+c)^2}\Big((b+c)^2 - a^2\Big)$$

Zatem $d_\alpha = \frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c}$.

- **II sposób:**
  Zastosujmy twierdzenie cosinusów dla kątów φ i $180^\circ - \varphi$ w trójkątach ACD i ABD
  .



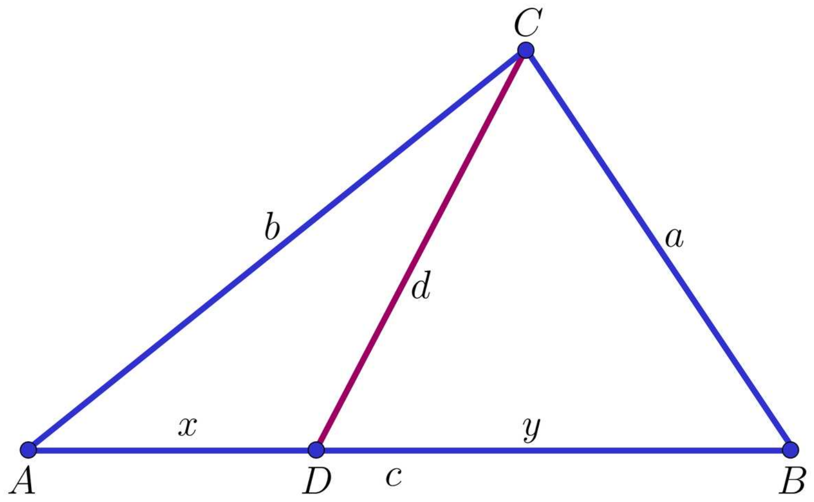
Otrzymujemy w ten sposób układ równań
$b^2 = d_\alpha^2 + |CD|^2 - 2d_\alpha \cdot |CD| \cos\varphi$ oraz
$c^2 = d_\alpha^2 + |BD|^2 - 2d_\alpha \cdot |BD| \cos(180^\circ - \varphi)$.
Stosując wzór redukcyjny $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, możemy ten układ zapisać w postaci
$b^2 = d_\alpha^2 + |CD|^2 - 2d_\alpha \cdot |CD| \cos\varphi$ oraz $c^2 = d_\alpha^2 + |BD|^2 + 2d_\alpha \cdot |BD| \cos\varphi$.
Mnożąc obie strony pierwszego równania przez $|BD|$, a drugiego przez $|CD|$, otrzymujemy
$|BD| \cdot b^2 = |BD| \cdot d_\alpha^2 + |BD| \cdot |CD|^2 - 2d_\alpha \cdot |BD| \cdot |CD| \cos\varphi$
oraz
$|CD| \cdot c^2 = |CD| \cdot d_\alpha^2 + |CD| \cdot |BD|^2 + 2d_\alpha \cdot |CD| \cdot |BD| \cos\varphi$.
Dodając stronami, dostajemy kolejno:
$|BD| \cdot b^2 + |CD| \cdot c^2 = |BD| \cdot d_\alpha^2 + |CD| \cdot d_\alpha^2 + |BD| \cdot |CD|^2 + |CD| \cdot |BD|^2$,
$|BD| \cdot b^2 + |CD| \cdot c^2 = (|BD| + |CD|) \cdot d_\alpha^2 + |BD| \cdot |CD| \cdot (|BD| + |CD|)$.
Ponieważ $|BD| + |CD| = a$ oraz $|BD| = \frac{ac}{b+c}$ i $|CD| = \frac{ab}{b+c}$, co wykazaliśmy w pierwszym etapie rozwiązania, więc równanie to możemy zapisać w postaci
$\frac{ac}{b+c} \cdot b^2 + \frac{ab}{b+c} \cdot c^2 = a \cdot d_\alpha^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a$.
Dzieląc obie strony równania przez a, otrzymujemy kolejno
$\frac{c}{b+c} \cdot b^2 + \frac{b}{b+c} \cdot c^2 = d_\alpha^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}$,
$\frac{b^2c+bc^2}{b+c} = d_\alpha^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$,
$d_\alpha^2 = \frac{b^2c+bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$,
$d_\alpha^2 = \frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$,
$d_\alpha^2 = \frac{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c)^2}$.
Zatem $d_\alpha = \frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c}$.

Zarówno w przypadku wyprowadzenia wzoru na długość środkowej trójkąta, jak i wzoru na długość dwusiecznej trójkąta korzystaliśmy dwukrotnie z twierdzenia cosinusów w dwóch trójkątach, przy czym twierdzenie to stosowaliśmy dla tego samego kąta lub dla kątów, które sumowały się do 180°. Warto tę technikę zapamiętać.

Środkowa trójkąta oraz dwusieczna trójkąta to szczególne przypadki odcinka, którego jednym z końców jest wierzchołek trójkąta, a drugim punkt leżący na przeciwległym boku. Okazuje się, że istnieje zależność między długością takiego odcinka, a długościami odcinków powstałych na boku trójkąta i długościami boków trójkąta. Zależność ta została podana i udowodniona przez szkockiego matematyka Matthew Stewarta. Sformułujemy i udowodnimy tą zależność.

Twierdzenie: Stewarta

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|CD| = d$, $|AD| = x$, $|BD| = y$, jak na rysunku.

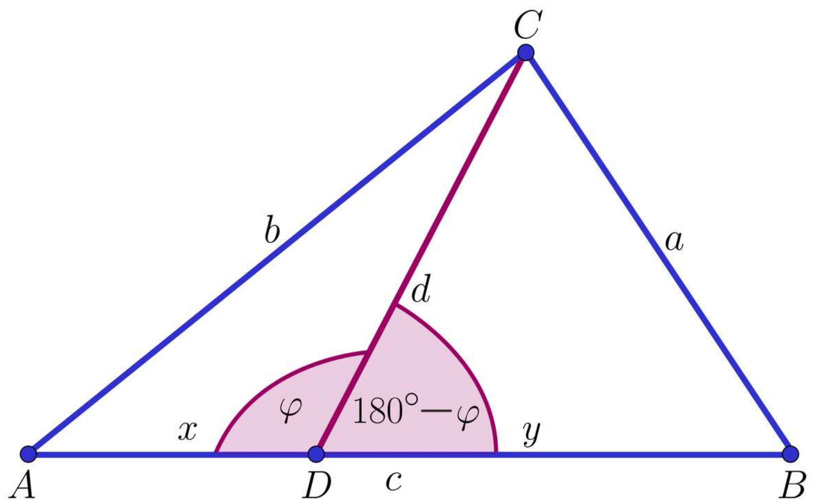


Wtedy prawdziwa jest równość:

$$a^2x + b^2y = d^2c + cxy.$$

Dowód

Niech $\varphi = |\sphericalangle ADC|$. Wtedy $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - \varphi$.



Z twierdzenia cosinusów dla kątów φ i $180^\circ - \varphi$ w trójkątach ADC i BCD otrzymujemy układ równań
$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\varphi$ oraz $a^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos(180^\circ - \varphi)$.
Ponieważ $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, więc możemy ten układ zapisać w postaci
$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\varphi$ oraz $a^2 = d^2 + y^2 + 2dy\cos\varphi$.
Mnożąc obie strony pierwszego równania przez y, a drugiego przez x, otrzymujemy
$b^2y = d^2y + x^2y - 2dxy\cos\varphi$ oraz $a^2x = d^2x + xy^2 + 2dxy\cos\varphi$.
Stąd, po zsumowaniu stron tych równań, dostajemy kolejno:
$a^2x + b^2y = d^2x + d^2y + x^2y + xy^2$,
$a^2x + b^2y = d^2(x + y) + (x + y)xy$.
Ponieważ $x + y = c$, więc otrzymujemy
$a^2x + b^2y = d^2c + cxy$.
To kończy dowód.

Znajomość tego twierdzenia oraz umiejętność jego zastosowania nie jest objęta wymaganiami podstawy programowej, warto jednak je pamiętać, gdyż pozwala znacznie skrócić rozwiązanie problemu w niektórych sytuacjach.

Słownik

wzór na długość środkowej trójkąta

długość środkowej trójkąta o bokach długości a, b, c poprowadzonej do boku o długości a jest równa:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

wzór na długość dwusiecznej trójkąta

długość dwusiecznej trójkąta o bokach długości a, b, c poprowadzonej do boku o długości a jest równa:

$$d_\alpha = \frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}}{b+c}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z rozwiązaniem zadania z pierwszego przykładu w zamieszczonej animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1gOHjWvE

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej obliczeń geometrycznych z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów.

Polecenie 2

Wykorzystując metodę omówioną w pierwszym przykładzie zamieszczonym w tej animacji, oblicz długość boku AB trójkąta ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, $|BC| = 13$ i $|AC| = 8$. Porównaj otrzymany rezultat z rezultatem z przykładu. Zastanów się, co jest przyczyną innego rezultatu.

Polecenie 3

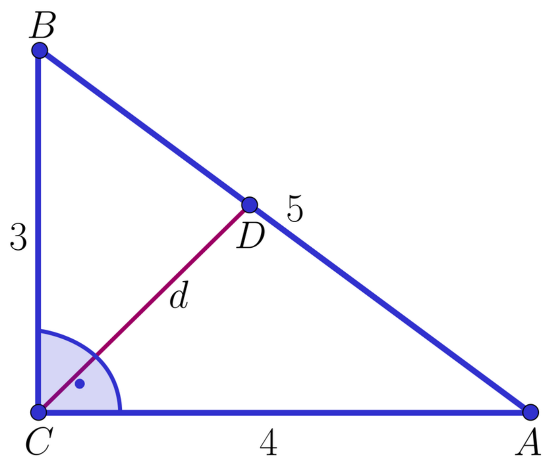
Zapoznaj się z rozwiązaniem drugiego zadania w zamieszczonej animacji. Wykorzystując omówioną metodę, oblicz długość przekątnej trapezu równoramiennego o bokach długości 3, 5, 5, 7. Jeśli wcześniej nie rozwiązywałeś zadań z sekcji „Sprawdź się”, to po rozwiązaniu tego zadania, wykonaj Ćwiczenie 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

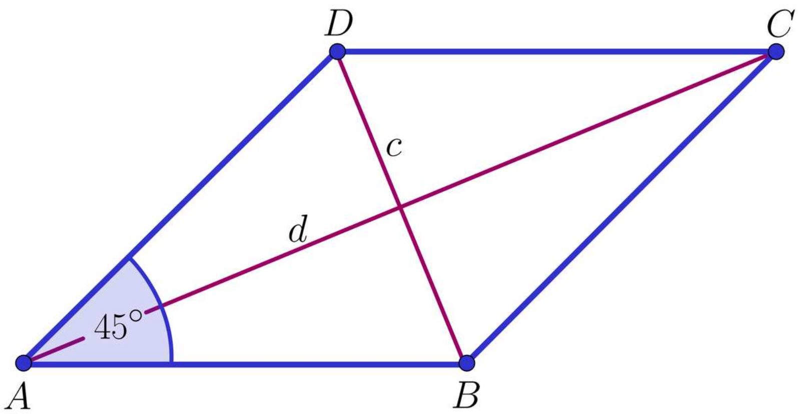
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt prostokątny ABC. Ile jest równa długość dwusiecznej CD tego trójkąta?



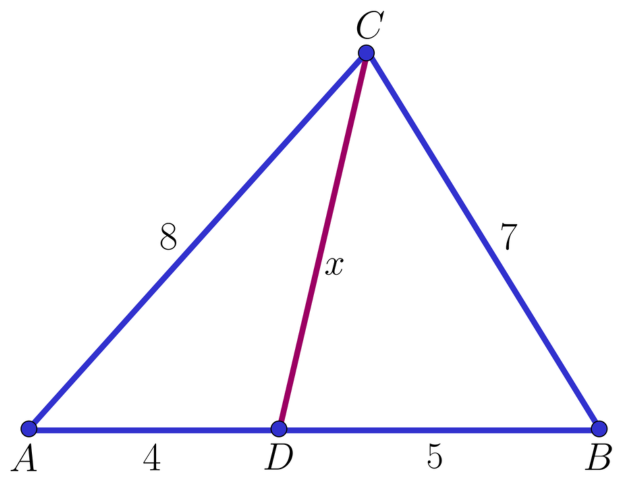
Ćwiczenie 2

Kąt ostry rombu jest równy 45°. Ile jest równy stosunek długości przekątnych (dłuższej do krótszej)?



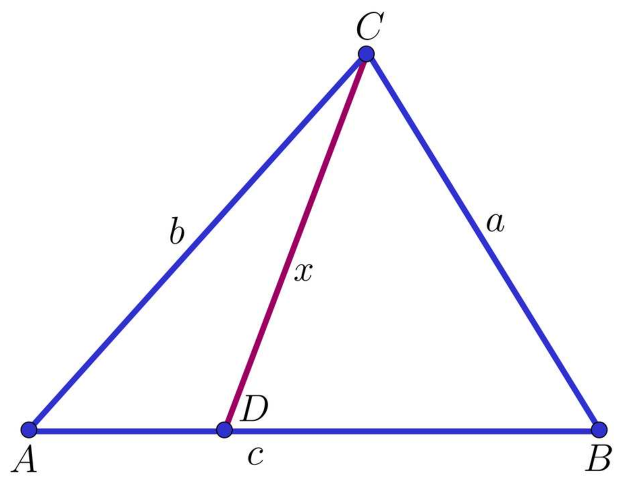
Ćwiczenie 3

Punkt D dzieli bok AB trójkąta ABC na odcinki AD i BD o długościach 4 i 5, a boki AC i BC tego trójkąta mają długości 8 i 7, jak na rysunku.



Ćwiczenie 4

Boki trójkąta ABC mają długości równe $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$. Punkt D dzieli bok AB trójkąta ABC na odcinki AD i BD w stosunku $|AD| : |BD| = 1 : 2$.

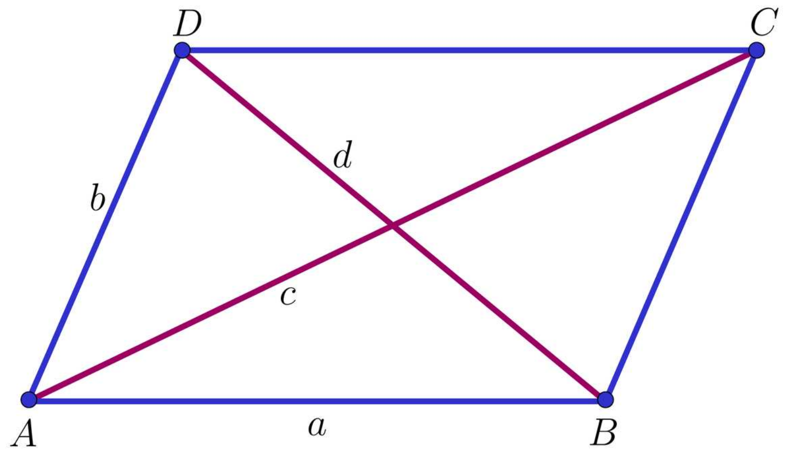


Ćwiczenie 5

Udowodnij, że jeżeli długości a, b, c boków trójkąta ABC spełniają równanie $\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} = 1$, to kąt tego trójkąta między bokami o długościach a i c jest równy 60°.

Ćwiczenie 6

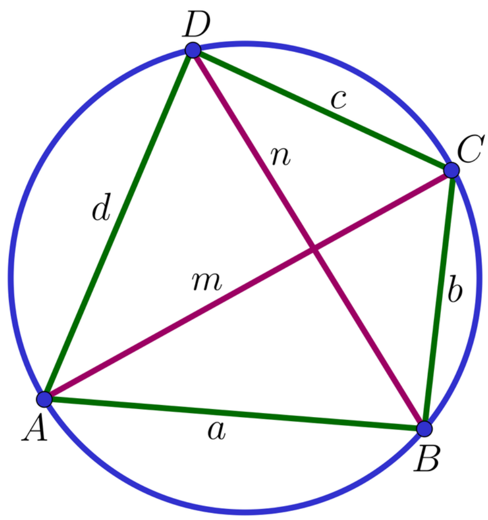
Długości dwóch sąsiednich boków równoległoboku $ABCD$ są równe a i b, a długości przekątnych tego równoległoboku są równe c i d.



Udowodnij, że $c^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Ćwiczenie 7

Czworokąt $ABCD$ o bokach długości a, b, c, d jest wpisany w okrąg, a jego przekątne mają długości m i n, jak na rysunku.



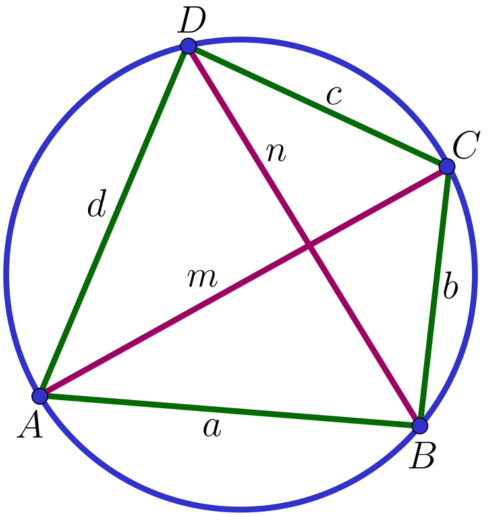
Udowodnij, że długość przekątnej tego czworokąta wyraża się wzorem

$m = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$.

Ćwiczenie 8

Udowodnij **twierdzenie Ptolemeusza**:

W czworokącie wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków. Przy oznaczeniach jak na rysunku



teza tego twierdzenia ma postać

$$mn = ac + bd.$$

W dowodzie wykorzystaj wzór na długość przekątnej czworokąta wpisanego w okrąg z Ćwiczenia 7.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczenia geometryczne z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza długości środkowych i dwusiecznych trójkąta, posługując się poznanymi wzorami wynikającymi z twierdzenia cosinusów
- stosuje twierdzenie Stewarta w typowych sytuacjach
- przeprowadza dowody geometryczne, wykorzystując twierdzenie cosinusów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia cosinusów i określenie typowych sytuacji, w których to twierdzenie można zastosować.
2. Nauczyciel prosi uczniów, zorganizowanych w grupy, o przeanalizowanie obu sposobów wykorzystania twierdzenia cosinusów do wyznaczenia wzoru na długość środkowej trójkąta z Przykładu 1.
3. Uczniowie, przy ewentualnej pomocy nauczyciela, omawiają najważniejsze elementy metody wykorzystanej w Przykładzie 1.
4. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów (pracujących indywidualnie lub w małych grupach) o wykonanie polecenia z Przykładu 2 – wyprowadzenie wzoru na długość dwusiecznej trójkąta (w razie pytań zwraca uwagę, na różnicę miedzy dwusieczną kąta trójkąta i dwusieczną trójkąta).
2. Wybrany uczeń (lub reprezentant grupy) przedstawia wynik pracy całej klasie. Nauczyciel inspiruje krótką dyskusję na temat metody użytej do wyprowadzenia wzoru.
3. Nauczyciel zapoznaje uczniów z twierdzeniem Stewarta i, o ile czas na to pozwala, poleca uczniom zapoznanie się z innym dowodem tego twierdzenia podanym w Przykładzie 3. Samodzielne przeprowadzenie dowodu tego twierdzenia może też być zadaniem domowym.
4. Nauczyciel wyświetla animację – wybrany uczeń rozwiązuje Polecenie 2.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

Materiały pomocnicze:

Wzór na sumę i różnicę cosinusów

Wskazówki metodyczne:

Ten temat e–podręcznika jest stosunkowo „bogaty”. Można wybrać z niego tylko te części, które akurat są potrzebne w pracy dydaktycznej:

- wzór na długość środkowej trójkąta,
- wzór na długość dwusiecznej trójkąta,
- wzór na długość przekątnej czworokąta wpisanego w okrąg, czy wreszcie
- twierdzenie Stewarta lub twierdzenie Ptolemeusza.

Omówienie zademonstrowanej w tym temacie metody dwukrotnego wykorzystania twierdzenia cosinusów, jako jednej z często stosowanych technik obliczeniowych w planimetrii, może też dobrym tematem powtórzeniowym przed sprawdzianem lub egzaminem maturalnym.